

基于t-SVD的结构保持多视图子空间聚类

张华伟, 陆新东, 朱小明, 孙军涛

引用本文

张华伟, 陆新东, 朱小明, 孙军涛. 基于t-SVD的结构保持多视图子空间聚类[J]. 计算机科学, 2022, 49(11A): 210800215-6.

ZHANG Hua-wei, LU Xin-dong, ZHU Xiao-ming, SUN Jun-tao. [Structure Preserved Multi-view Subspace Clustering Based on t-SVD](#) [J]. Computer Science, 2022, 49(11A): 210800215-6.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于SSC-BP神经网络的异常检测算法](#)

Anomaly Detection Algorithm Based on SSC-BP Neural Network

计算机科学, 2021, 48(12): 357-363. <https://doi.org/10.11896/jsjkx.201000086>

[基于鲁棒低秩张量恢复的高光谱图像去噪](#)

Hyperspectral Image Denoising Based on Robust Low Rank Tensor Restoration

计算机科学, 2021, 48(11A): 303-307. <https://doi.org/10.11896/jsjkx.210200103>

[时间感知的兴趣点推荐方法](#)

Time Aware Point-of-interest Recommendation

计算机科学, 2021, 48(9): 43-49. <https://doi.org/10.11896/jsjkx.210400130>

[基于耦合随机投影的张量填充方法](#)

Tensor Completion Method Based on Coupled Random Projection

计算机科学, 2021, 48(8): 66-71. <https://doi.org/10.11896/jsjkx.200900055>

[基于自编码器和流形正则的结构保持无监督特征选择](#)

Structure Preserving Unsupervised Feature Selection Based on Autoencoder and Manifold Regularization

计算机科学, 2021, 48(8): 53-59. <https://doi.org/10.11896/jsjkx.200700211>

基于 t-SVD 的结构保持多视图子空间聚类

张华伟 陆新东 朱小明 孙军涛

河南省计量科学研究所 郑州 450000

摘要 针对基于张量的多视图子空间聚类算法不能很好地保持样本之间的流形几何结构和多视图之间相似性的缺点,提出了一种结构保持的 t-SVD 多视图子空间聚类算法。首先将重构系数作为数据构造描述流形结构的邻接矩阵,其次通过图正则限制多视图数据的重构系数,然后利用各个视图的重构系数计算描述视图之间关系的相似矩阵,最后通过交替优化的方式来分别优化邻接矩阵及相似矩阵和多视图数据的重构系数,直至收敛。在 3 个数据库上分别进行了聚类实验,准确率分别达到了 97.25%,96.97%,100%。实验结果表明,所提算法在聚类任务上具有较高的准确率。

关键词 子空间聚类;多视图学习;结构保持;张量;t-SVD

中图分类号 TP394.1

Structure Preserved Multi-view Subspace Clustering Based on t-SVD

ZHANG Hua-wei, LU Xin-dong, ZHU Xiao-ming and SUN Jun-tao

Henan Institute of Metrology, Zhengzhou 450000, China

Abstract To peruse the manifold structure and correlation among multi-view data for the tensor based subspace clustering algorithms, this paper proposes a novel algorithm named structure preserved multi-view subspace clustering based on t-SVD (t-SVD-SpMSC). For both structures in multi-view data, we employ the graph regularization in which the graph is got adaptively by iteration. To optimize the objective function, we develop an alternative optimization algorithm to solve the final objective function. The accuracy of clustering using t-SVD-SpMSC on three datasets is 100%, 91.51%, 99.81% respectively, which shows the priority of the proposed method.

Keywords Subspace clustering, Multi-view learning, Structure preserved, Tensor, t-SVD

实际应用中,为了对事物的特性进行全面的描述,经常使用多种描述子进行特征提取(或利用多种传感器采集信息),形成了大量的不同特性的数据(多视图数据)。例如,可以采用多种描述子来描述图像,如 LBP 特征、HOG 特征、灰度特征等。由于每种描述子从不同的角度来描述图像的属性,实际应用中一般利用多种视角的数据进行学习来提高聚类性能。不同特征的编码形式及特征属性具有较大差异,不能直接利用串联的方式进行下一步任务。如何从多种特性的数据中提取出有用的信息进行聚类,即多视图聚类技术吸引了众多研究者的目光。

为了利用多视图数据进行聚类,许多算法被提出^[1-3]。由于多个核矩阵可以对应于多视图数据,基于多核学习的多视图学习技术被提出^[4]。为了利用典型相关分析算法进行多视图聚类,Wang 等提出了基于谱聚类的无监督鉴别相关分析算法^[5]。Liu 等^[3]将非负矩阵分解算法应用到多视图学习中,提出了基于联合非负矩阵分解的多视图聚类算法。研究发现,多视图数据在不同视图下得到的分组结果可能不同。为了得到多视图数据的这种属性,Wei 等提出了基于深度矩阵分析算法^[6]。众所周知,从自然界中采集得到的数据中存在大量的噪声。由于直接利用原始数据进行学习,上述方法不能得到很好的聚类性能。

为了利用含有噪声的数据进行聚类,低秩表示算法(LRR)^[7]被提出。由于其优异的性能,基于子空间的聚类算法被广泛应用于聚类任务中。Cao 等^[8]提出了多视图子空间

聚类算法(MVSC)。由于算法 MVSC 独立的计算每个视图的重构系数,不能完整地考虑各个视图的数据,这可能会降低最终的聚类性能。为了解决这一问题,Zhang 等^[9]提出了广义潜层多视图子空间聚类算法(GLMSC)。

以上算法都是基于二阶的方法,Liu 等指出这类算法可能会丢失多视图数据中的高阶相关信息。文献[10]指出,基于张量的算法能够得到多视图数据中的潜层信息和数据中的多线性结构及高阶相关性。为了进一步利用多视图数据中存在的高阶相关性,基于张量的多视图子空间聚类算法被提出,总体来讲,它们可分为两类。第一类算法利用原始数据构造张量矩阵,然后利用张量的 t-product 技术计算重构系数张量 Z。为了利用多视图数据的高阶统计信息,Yin 等^[11]提出了三阶张量空间中的低秩多视图聚类算法。在学习过程中,该算法先计算数据的张量表示矩阵,然后计算数据潜层表示。Chen 等^[12]认为,在学习的过程中应该将这两步统一起来,提出了面向多视图聚类任务的基于张量的低维表示学习算法。(2)第二类算法目标函数中的核心部分为式(1)。先将各个视图的数据进行重构(见式(1)中的第一部分),然后利用重构系数构造张量进而最小化其秩进行计算(见式(1)中的第二部分)。为此,Zhang 等提出了低秩限制的子空间聚类算法(LT-MSC)^[13],并得到了较好的实验结果。Xie 等^[14]提出了一种基于 t-SVD 的多视图子空间聚类算法(t-SVD-MSC)。为了保持多视图空间的非线性信息,又提出了 Hyper-Laplacian 正则多视图子空间聚类算法(HLR-M²VS)^[15]。多个数据库上

的实验结果表明,基于张量的多视图学习算法得到了较好的实验性能。

$$\min_{\mathcal{Z}} \underbrace{\sum_{v=1}^V L(\mathbf{X}^{(v)}, \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)})}_{\text{多视图重构}} + \lambda \underbrace{\|\mathcal{Z}\|_g}_{\text{低秩限制}} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)})$$

式(1)给出了基于张量的多视图子空间聚类算法的第二类的一般形式。从式(1)可以看出,如果 $\{\mathbf{x}^{(v)}\}_{v=1}^V$ 为字典时,该目标函数则转化为给定字典下的低秩表示。那么从稀疏表示的角度来看, $\mathbf{Z}^{(v)}$ 的第 i 列为样本 i 在第 v 个视图中给定字典下的表示。从子空间聚类的角度来看, $Z_{ij}^{(v)}$ 表示在视图 v 中样本 i 与样本 j 的相似度。因此,上述基于张量的多视图学习技术在学习的过程中将面临以下两个问题:1)从表示学习的角度来看,该算法在表示学习的过程中没有考虑视图内部数据之间的流形结构信息;2)从子空间聚类的角度来看,每个视图的相似矩阵学习的过程中没有考虑视图之间的相关结构信息。研究发现,同一物体不同时刻采集的数据可能分布在一个潜在的流形上,并且保持这种流形结构能够提高算法的聚类性能^[16]。文献[17]指出,保持多视图数据之间的相关性,有助于降低多视图数据的冗余信息和增强它们之间的差异性,并能够提升算法的聚类性能。为了保持视图内部及视图之间的结构信息,本文提出结构保持张量多视图子空间聚类算法,从而使求得的 \mathbf{Z} 能够在保持数据空间流形几何结构的同时,得到多视图数据之间的相关性。简便起见,将以第二类的张量多视图子空间聚类技术为基础,提出一种结构保持的 t-SVD 多视图子空间聚类算法(t-SVD-SpMSC)。在 ORL 人脸库、YALE 人脸库和 BBC 文本库等数据库上的实验证实了 t-SVD-SpMSC 算法的有效性。

1 相关工作

本节将简要介绍第二类基于张量的多视图的多视图聚类算法。由于 LRR^[7] 是基于单视图数据的聚类算法,不能处理多视图数据聚类任务。为了解决这一问题,Zhang 等^[13] 提出利用低秩张量限制的方法来利用多视图数据中的互补信息,提出了基于低秩张量限制的多视图子空间聚类算法(LTM-SC)。LTMSC 算法的介绍如下:定义 v 个视图的数据矩阵为 $\{\mathbf{X}^{(i)}\}_{i=1}^v, \mathbf{X}^{(i)}$ 表示第 i 个视图的数据矩阵 $\mathbf{X}^{(i)} = [\mathbf{X}_1^{(i)}, \mathbf{X}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(i)}] \in R^{D_i \times N}$, $\mathbf{X}_j^{(i)}$ 表示第 i 个视图的第 j 个数据。 $\mathbf{Z}^{(j)}$ 表示利用第 j 个视图的数据的子空间表示矩阵, $\mathbf{E}^{(j)}$ 表示第 j 个视图的数据的重构误差矩阵。为了与矩阵低秩保持一致,定义张量低秩为: $\|\mathcal{Z}\|_* = \sum_{m=1}^V \zeta_m \|\mathbf{Z}_{(m)}\|_*$ 。其中, $\mathbf{Z}_{(m)}$ 表示张量的 m -模展开矩阵。其目标函数的定义如下:

$$\min_{\mathcal{Z}, \mathbf{E}} \|\mathcal{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1}$$

$$\mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \quad (2)$$

$$\mathcal{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)})$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}^{(1)}; \mathbf{E}^{(2)}; \dots; \mathbf{E}^{(V)}]$$

Kilmer 等^[18] 提出了一种类似于矩阵乘法运算的张量乘法运算方法(Tensor Product, t-product)。随后,一种基于 t-product 张量奇异值分解算法 t-SVD 被提出。基于 t-product 张量算法由于与矩阵运算算法具有相似的特性,因此被广泛应用于张量填充、数据恢复等领域。Xie 等^[14] 提出了一种基于 t-SVD 的张量核范数,并将该范数引入到张量多视图子空间学习中,提出了基于 t-SVD 的多视图子空间聚类算法(t-

SVD-MSC)。其目标函数的定义如下:

$$\min_{\mathcal{Z}, \mathbf{E}} \|\mathcal{Z}\|_{\otimes} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1}$$

$$\mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \quad (3)$$

$$\mathcal{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)})$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}^{(1)}; \mathbf{E}^{(2)}; \dots; \mathbf{E}^{(V)}]$$

其中, $\|\mathcal{Z}\|_{\otimes}$ 的定义参见文献[18]。目标函数的求解需要采用增广拉格朗日乘法来进行迭代求得。

2 结构保持张量多视图子空间聚类算法

2.1 目标函数

由相关工作可知,基于张量的子空间聚类算法是基于重构的角度来学习数据的重构系数,都没有考虑数据的结构信息。文献[16]指出,数据的流形结构能够提高特征的分类性能。文献[17]指出,保持多视图数据之间的相关性有助于降低多视图数据的冗余信息和增强它们之间的差异性,能够提升算法的聚类性能。然而,基于张量的多视图学习算法没有考虑多视图数据中存在以上两种结构信息。

由文献[13]可知,基于 t-SVD 的低秩张量限制多视图学习算法能够得到更好的实验结果。由第 1 节可知,它通过重构的角度来学习数据的关系矩阵。如果 $\mathbf{X}^{(v)}$ 为字典,该目标函数则转化为给定字典下的低秩表示。从表示学习的角度来看, $\mathbf{Z}^{(v)}$ 的第 i 列为样本 i 在第 v 个视图中给定字典下的表示。文献[16]指出,保持数据的流形结构能够提高特征的分类性能。然而,t-SVD-MSC 算法没有考虑视图内部数据点之间的流形结构信息。Yan 等^[16,19] 提出了图嵌入框架理论,该方法首先构造数据之间的邻接矩阵,然后利用图嵌入思想构造数据的局部保持矩阵,通过最小化局部保持矩阵的迹来保持流形结构信息。为了保持数据的流形结构信息,本节将利用流形正则对重构系数进行限制。因此,视图内部结构信息的保持可以通过最小化式(4)来实现:

$$J_w = \sum_{v=1}^V \sum_{i,j=1}^N (Z_i^{(v)} - Z_j^{(v)})^2 S_{ij}^w = \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathbf{Z}^{(v)} \mathbf{L}^w (\mathbf{Z}^{(v)})^T)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{L}^w = \mathbf{D}^w - \mathbf{S}^w, \mathbf{S}^w = \text{diag}(\text{sum}(\mathbf{S}^w)) \quad (4)$$

其中, S_{ij}^w 表示样本 i 和样本 j 之间的近邻相似关系,可以使用多种方式^[16]。定义 $Z_i^{(v)}$ 表示第 v 个视图的第 i 个样本的表示系数, $\text{Tr}(\cdot)$ 表示迹运算操作。

然而,传统的近邻相似关系的定义方法存在两个缺点:1)由于原始数据中含有大量噪声,这类方法利用原始数据定义相似关系可能存在错误的近邻关系,进而降低聚类性能;2)这类方法需要提前定义数据的近邻关系,不一定有利于后续的学习任务。受到文献[17]的启发,本文拟采用学习的方法来计算数据的近邻相似矩阵。为了得到理想的相似矩阵,采用 L_2 范数正则项来对 S_{ij}^w 进行限制。因此,视图内部数据点之间的流形结构信息保持可以通过最小化式(5)来实现:

$$\min_{\mathcal{Z}, \mathbf{E}} \|\mathcal{Z}\|_{\otimes} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \sum_{v=1}^V \text{tr}((\mathbf{Z}^{(v)})^T \mathbf{L}^w \mathbf{Z}^{(v)}) + \eta \sum_{i,j=1}^N (S_{ij}^w)^2$$

$$\text{s. t. } \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \quad (5)$$

$$\mathcal{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)})$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}^{(1)}; \mathbf{E}^{(2)}; \dots; \mathbf{E}^{(V)}]$$

从子空间聚类的角度来看, $Z_{ij}^{(v)}$ 表示在视图 v 中样本 i 与样本 j 的相似度。然而,t-SVD-MSC 算法在每个视图的相似矩阵学习的过程中没有充分考虑视图之间的相关结构信息。

文献[17]指出,保持多视图数据之间的相关性有助于降低多视图数据的冗余信息和增强它们之间的差异性,提升算法的聚类性能。为了利用各个视图之间的相互关系(结构信息),本文拟通过对各个视角的重构系数进行限制,来保证相似度较高的视角之间重构系数相似度也较大。因此,视角之间的结构信息可以通过最小化式(6)来实现:

$$J_b = \sum_{i,j=1}^V (\text{vec}(\mathbf{Z}^{(i)}) - \text{vec}(\mathbf{Z}^{(j)}))^2 \mathbf{S}_{ij}^b = \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}^b \mathbf{Z}^T) \\ \text{s. t. } \mathbf{Z} = [\text{vec}(\mathbf{Z}^{(1)}), \text{vec}(\mathbf{Z}^{(2)}), \dots, \text{vec}(\mathbf{Z}^{(V)})] \quad (6)$$

$$\mathbf{L}^b = \text{diag}(\text{sum}(\mathbf{S}^b)) - \mathbf{S}^b$$

其中, \mathbf{S}_{ij}^b 表示视角 i 与视角 j 之间的相关性。Liu 等[13] 提出利用视角 i 和视角 j 的原始数据来构造相似矩阵。然而,由于原始数据中含有大量噪声,这种定义方法不能很好地得到视角之间的关系,进而降低聚类性能。本文拟采用学习的方法来计算视角之间的相似矩阵 \mathbf{S}^b 。为了得到理想的相似矩阵 \mathbf{S}^b , 采用 Shannon 熵正则来限制 \mathbf{S}^b 。因此,视角之间的结构信息可以通过最小化式(7)来实现:

$$J_b = \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}^b \mathbf{Z}^T) + t \sum_{i,j=1, i \neq j}^M \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b \quad (7)$$

由式(4)一式(6),可得 T-SVD-SpMSC 的目标函数:

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{S}^w, \mathbf{S}^b} \|\mathcal{L}\|_{\odot} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \alpha \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathbf{Z}^{(v)} \mathbf{L}^w (\mathbf{Z}^{(v)})^T) + \\ \eta \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{S}_{ij}^w)^2 + \beta \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}^b \mathbf{Z}^T) + t \sum_{i,j}^V \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b \\ \text{s. t. } \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \\ \mathcal{L} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)}) \\ \mathbf{S}_{ij}^w \geq 0, \sum_j \mathbf{S}_{ij}^w = 1, \mathbf{S}_{ii}^w = 0, \mathbf{L}^w = \mathbf{D}^w - \mathbf{S}^w \\ \mathbf{S}_{ij}^b \geq 0, \sum_j \mathbf{S}_{ij}^b = 1, \mathbf{S}_{ii}^b = 0, \mathbf{L}^b = \mathbf{D}^b - \mathbf{S}^b \\ \mathbf{E} = [\mathbf{E}^{(1)}; \mathbf{E}^{(2)}; \dots; \mathbf{E}^{(V)}] \quad (8)$$

其中, α 和 β 为正则项平衡参数。

2.2 优化

为了简便期间,引入辅助变量 ζ 和 Q 。目标函数可转化为:

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{Q}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{S}^w, \mathbf{S}^b} \|\zeta\|_{\odot} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \alpha \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathbf{Q}^{(v)} \mathbf{L}^w \\ (\mathbf{Q}^{(v)})^T) + \eta \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{S}_{ij}^w)^2 + \beta \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{L}^b \mathbf{Z}^T) + \\ t \sum_{i,j}^V \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b \\ \text{s. t. } \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \\ \mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)}), \zeta = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{(v)} = \mathbf{Q}^{(v)} \\ \mathbf{S}_{ij}^w \geq 0, \sum_j \mathbf{S}_{ij}^w = 1, \mathbf{S}_{ii}^w = 0, \mathbf{L}^w = \mathbf{D}^w - \mathbf{S}^w \\ \mathbf{S}_{ij}^b \geq 0, \sum_j \mathbf{S}_{ij}^b = 1, \mathbf{S}_{ii}^b = 0, \mathbf{L}^b = \mathbf{D}^b - \mathbf{S}^b \\ \mathbf{E} = [\mathbf{E}^{(1)}; \mathbf{E}^{(2)}; \dots; \mathbf{E}^{(V)}] \quad (9)$$

由式(9)可知,目标函数中有多个优化变量,并且都没有封闭解。为了解决这一问题,本文采用 ADMM 算法进行优化。此时目标函数可转化为:

$$\min_{\mathcal{Z}^{(v)}} \|\zeta\|_{\odot} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \sum_{v=1}^V \{ \langle \mathbf{Y}_v, \mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \\ \mathbf{E}^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)}\|_F^2 + \beta \text{tr}((\mathbf{Z}^{(v)})^T \\ \sum_{i=1, i \neq v}^V \mathbf{Z}^{(i)} \mathbf{Z}_{vi}^b) + \alpha \sum_{v=1}^V \text{tr}(\mathbf{Q}^{(v)} \mathbf{L}^w (\mathbf{Q}^{(v)})^T) + \langle \mathbf{U}^{(v)}, \mathbf{Q}^{(v)} - \\ \mathbf{Z}^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)}\|_F^2 \} + \langle \mathbf{W}, \mathbf{Z} - \mathbf{G} \rangle + \\ \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{G}\|_F^2 + t \sum_{i,j}^V \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b + \eta \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{S}_{ij}^w)^2 \quad (10)$$

具体优化过程如下:

(1) 固定其他变量,优化 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 。目标函数可转化为:

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)}} \langle \mathbf{Y}_v, \mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \\ \mathbf{E}^{(v)}\|_F^2 + \langle \mathbf{W}^{(v)}, \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{G}^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{G}^{(v)}\|_F^2 + \\ \langle \mathbf{U}^{(v)}, \mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)}\|_F^2 + \beta \text{tr}((\mathbf{Z}^{(v)})^T \\ \sum_{i=1, i \neq v}^V \mathbf{Z}^{(i)} \mathbf{Z}_{vi}^b) \quad (11)$$

式(11)对 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 求导等于 0。可得:

$$\mathbf{Z}^{(v)} = (2\mathbf{I} + \frac{\mu}{\rho} \mathbf{X}^{(v)T} \mathbf{X}^{(v)})^{-1} ((\mathbf{X}^{(v)T} \mathbf{Y}_v + \mu \mathbf{X}^{(v)T} \mathbf{X}^{(v)} - \\ \mu \mathbf{X}^{(v)T} \mathbf{E}^{(v)} - \mathbf{W}^{(v)} + \mathbf{U}^{(v)} + 2\beta \sum_{i=1, i \neq v}^V \mathbf{Z}^{(i)} \mathbf{S}_{vi}^b) / \rho + \\ \mathbf{G}^{(v)} + \mathbf{Q}^{(v)}) \quad (12)$$

(2) 固定其他变量,优化 $\mathbf{Q}^{(v)}$ 。目标函数可转化为:

$$\min_{\mathbf{Q}^{(v)}} \alpha \text{tr}(\mathbf{Q}^{(v)} \mathbf{L}^w (\mathbf{Q}^{(v)})^T) + \langle \mathbf{U}^{(v)}, \mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)} \rangle + \frac{\rho}{2} \\ \|\mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)}\|_F^2 \quad (13)$$

式(13)对 $\mathbf{Q}^{(v)}$ 求导等于 0,可得:

$$\mathbf{Q}^{(v)} = (\alpha \mathbf{L}^w + \rho \mathbf{I})^{-1} (\rho \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{U}^{(v)}) \quad (14)$$

(3) 固定其他变量,优化 $\mathbf{E}^{(v)}$ 。目标函数可转化为:

$$\mathbf{E} = \arg \min_{\mathbf{E}} \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \sum_{v=1}^V (\langle \mathbf{Y}_v, \mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} \rangle \\ + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)}\|_F^2) \\ = \arg \min_{\mathbf{E}} \frac{\lambda}{\mu} \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{E} - \mathbf{D}\|_F^2$$

where $\mathbf{D}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + (\mu/\mu) \mathbf{Y}_v$;

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}^{(1)}; \dots; \mathbf{D}^{(V)}]^T \quad (15)$$

由文献[11]可知,式(15)有如下解:

$$\mathbf{E}_{i,i} = \begin{cases} \|\mathbf{D}_{i,i}\|_2 - \frac{\lambda}{\mu}, & \|\mathbf{D}_{i,i}\|_2 > \frac{\lambda}{\mu} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (16)$$

(4) 固定其他变量,优化 \mathcal{G} 。此时目标函数可转化为:

$$\mathcal{G}^* = \arg \min_{\mathcal{G}} \|\mathcal{G}\|_{\odot} + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{G} - (\mathcal{L} + \frac{1}{\rho} \mathcal{W})\|_F^2 \quad (17)$$

与 t-SVD-MSC 算法一致,式(17)可利用 t-SVD 算法和软阈值算法进行计算[18]。

(5) 固定其他变量,更新 $\mathbf{Y}_v, \mathbf{U}^{(v)}$ 和 \mathcal{W} 。

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{Y}_v + \mu(\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)}) \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^{(v)} = \mathbf{U}^{(v)} + \mu(\mathbf{Q}^{(v)} - \mathbf{Z}^{(v)}) \quad (19)$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{W} + \rho(\mathbf{Z} - \mathcal{G}) \quad (20)$$

(6) 固定其他变量,更新 \mathbf{S}_{pq}^w 。此时目标函数可转化为:

$$L(\mathbf{Y}^w, \phi_p, \varphi_q) = \sum_q (d_{pq} \mathbf{S}_{pq}^w - \eta(1 - \|\mathbf{S}_{pq}^w\|_2^2)) \\ \text{s. t. } \mathbf{S}_{ij}^w \geq 0, \mathbf{S}_{p,p} = 1$$

其中, $d_{pq} = \sum_i \|\mathbf{Z}_{p,i}^{(v)} - \mathbf{Z}_{q,i}^{(v)}\|_2^2$ 表示样本 p 和 q 之间的二范数距离。由式(21)可知, \mathbf{S}_{pq}^w 和 $\mathbf{S}_{q,p}^w$ 之间相互独立。因此,式(21)的优化问题可转化为对 \mathbf{S}_{pq}^w 的优化问题。利用拉格朗日乘子法可得:

$$L(\mathbf{S}_{pq}^w, \phi_p, \varphi_p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\eta} \Delta_p + \mathbf{S}_{pq}^w \right)^2 - \phi_p (\mathbf{S}_{pq}^w - 1) - \varphi_p^T \\ (\mathbf{S}_{pq}^w)^T$$

$$\text{where } \Delta_p = [d_{p1}, d_{p2}, \dots, d_{pN}]$$

(22)

利用 KKT 条件,可得:

$$\mathbf{S}_{pq} = \begin{cases} -\frac{d_{pq}}{2\eta} + \phi_p, & \text{if } x_p \text{ in } N_p \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (23)$$

其中, N_p 表示与样本 p 最近的 k 个点组成的集合。由限制条件 $\mathbf{S}_p \mathbf{1} = 1$, 可得:

$$\sum_{q \in N_p} \mathbf{S}_{pq} = \sum_{q \in N_p} -\frac{d_{pq}}{2\eta} + k\phi_p = 1 \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{k} + \sum_{q \in N_p} \frac{d_{pq}}{2\eta k} \quad (24)$$

因此,最优的 \mathbf{S} 可由式(25)计算得到:

$$\mathbf{S}_{pq} = \left(\frac{1}{k} + \sum_{q \in N_p} \frac{d_{pq}}{2\eta k} - \frac{d_{pq}}{2\eta} \right)_+ \quad (25)$$

(7) 固定其他变量,更新 \mathbf{S}_{ij}^b 。目标函数可转化为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{S}^b} \sum_{i=1}^{n_p} \{ \mathbf{S}_{ij}^b \Phi_{ij} + \beta \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b \} \\ \text{s. t. } \mathbf{S}_{ij}^b \geq 0, (\mathbf{S}_{ij}^b)^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\Phi_{pq} = \sum_i \| \mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j \|_2^2$ 表示视角 p 和 q 之间的二范数相似度。由式(26)可知, \mathbf{S}_{ij}^b 和 \mathbf{S}_{ij}^a 之间相互独立。因此,式(26)的优化问题可转化为对 \mathbf{S}_p 的优化问题。利用拉格朗日乘子法可得:

$$L(\mathbf{S}_{ij}^b) = (\mathbf{S}_{ij}^b)^T \Phi_{ij} + \beta \sum_j \mathbf{S}_{ij}^b \log \mathbf{S}_{ij}^b - \phi \left((\mathbf{S}_{ij}^b)^T \mathbf{1} - 1 \right) - \phi^T \mathbf{S}_{ij}^b \quad (27)$$

经过一系列的推导可得:

$$\mathbf{S}_{ij}^b = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\Phi_{ij}}{\beta}\right) / \sum_{j=1}^{n_q} \exp\left(-\frac{\Phi_{ij}}{\beta}\right), & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (28)$$

2.3 聚类

由于利用低秩限制得到的不同视角的重构系数矩阵保持了各个视角中含有的鉴别信息,本文算法利用各个视角的重构系数的均值作为数据的邻接矩阵,然后采用谱聚类进行聚类。目前,有两种不同的归一化谱聚类的方法^[20-21]。本文采用文献[21]中提出的聚类方法计算样本的分簇信息。

t-SVD-SpMSC 完整的过程如算法 1 所示。实验中发现,目标函数能够快速收敛到局部最优值。

算法 1 t-SVD-SpMSC 算法

输入:数据矩阵 $\{\mathbf{X}^{(i)}\}_{i=1}^V$, 真实的标签矩阵 \mathbf{Y} , 超参数 $\mu = 10^{-5}$, $\rho = 10^{-4}$, $\eta = 2$, $\mu_{\max} = \rho_{\max} = 10^{10}$, $\epsilon = 10^{-7}$, α, β

输出:数据的标签矩阵 \mathbf{H}

1. 初始化 $\mathbf{Z}^{(v)}$, \mathbf{E} , \mathcal{G} , \mathbf{Y}_v , \mathcal{W} , \mathbf{S}^w , \mathbf{S}^b ;
2. 重复:
 - 2.1 固定其他变量,利用式(11)计算 $\mathbf{Z}^{(v)}$;
 - 2.2 固定其他变量,利用式(13)优化 \mathbf{E} ;
 - 2.3 固定其他变量,利用式(14)优化 \mathcal{G} ;
 - 2.4 固定其他变量,利用式(15)一式(16)更新 \mathbf{Y}_v 和 \mathcal{W} ;
 - 2.5 固定其他变量,利用式(18)更新 \mathbf{S}^w ;
 - 2.6 固定其他变量,利用式(23)更新 \mathbf{S}^b ;
3. 如果 $\| \mathcal{Q}^{(v)} - \mathcal{Q}^{(v)} \mathcal{Q}^{(v)} - \mathcal{E}^{(v)} \|_{\infty} < \epsilon$ 和 $\| \mathcal{Q}^{(v)} - \mathcal{G}^{(v)} \|_{\infty} < \epsilon$, 停止迭代; 否则跳转到步骤 1;
4. 计算最终邻接矩阵 $\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2M} \sum_{v=1}^M (\mathbf{Z}^{(v)} + (\mathbf{Z}^{(v)})^T)$;
5. 利用谱聚类算法计算最终的标签指示矩阵。

3 实验

3.1 数据库描述

(1) ORL 人脸库。ORL 人脸数据库^[16]是由英国剑桥大学 Olivetti 研究所制作的。该图像库包含 40 人、每人采集 10

幅共 400 幅人脸图像,每幅图像为 256 个灰度级,分辨率为 112×92 。ORL 人脸图像是在不同时间、不同视角、各种表情(闭眼、睁眼、微笑、吃惊、生气、愤怒、高兴等)和不同脸部细节(戴眼睛/不戴眼睛、有胡子/没胡子、不同发型)的条件下拍摄的。图 1 中的第一行显示了 ORL 人脸库中的 10 张样例图像。实验中,所有图像被裁剪为分辨率为 88×88 的图像。在实验中,依照文献[5]的方法从每幅图像中提取 3 种特征。

1) 像素特征:采用下采样的方法将图像的维数降低至 16×16 , 然后将其转化为列向量。

2) Gabor 小波特征:依照文献[22]中的方法,提取每幅图像 5 个尺度,8 个方向的 Gabor 小波特征。

3) Local binary pattern(LBP)特征:依照文献[23]中的方法,提取每幅图像的标准 LBP 特征。因此,每幅人脸图像所提取的 LBP 特征为 128 维。

(2) Yale 人脸库。Yale 人脸数据库^[24]由 15 人、每人 11 幅共 165 幅人脸图像组成,每幅图像灰度级为 256。Yale 数据库中人脸图像的光照条件变化较大,并且人的脸部表情和细节也有一定的变化。图 1 中的第二行显示了 Yale 人脸库中的 10 张样例图像。与 ORL 人脸库上的方法一致,从每幅图像中提取 3 种特征。

(3) MSRC-v1 物体库。MSRC-v1 数据库^[25]包含 9 个类别,共 240 幅图像。这 9 个类别分别为马、羊、树、建筑物、飞机、奶牛、人脸、汽车、自行车等。图 1 给出了 MSRC-v1 中 1 类共 9 张样例图像。实验中,与文献[26]相似的方法选取其中的 7 个类别进行聚类,它们分别是树、建筑物、飞机、奶牛、人脸、汽车、自行车等,其中每类选取 30 幅图像。与文献[27]相似,提取图像的 3 种特征作为多视角进行聚类实验: LBP^[23], GIST^[28], HOG^[29]。



图 1 数据库样例图像

Fig. 1 Database sample image

3.2 对比算法

本文选取 5 种算法作为对比算法,其中包含 1 种基于单个视图的聚类算法和 4 种基于多视图学习的聚类算法。

(1) 单一视图低秩表示算法(LRR_best)^[7]: 分别在各个视角上执行低秩子空间聚类算法,选取效果最好的作为最终的性能。

(2) 自适应邻域多视图学习(MLAN)^[22]: 为了进行多视图学习, Nie 等将 CAN 算法扩展到多视图学习中, MLAN 算法交替学习局部结构和聚类获得最优的聚类结果。

(3) 多视图非负矩阵分解(multiNMF)^[3]: 为了利用多视图数据进行聚类, Liu 等提出多视图非负矩阵分解算法,该算法结合非负矩阵分解和多视图聚类,为所有视图寻找一个一致的聚类结果。

(4) 低秩张量限制多视图子空间聚类(LTMSM)^[13]: 为了保持多视图数据之间的高阶相关性,该算法将不同视角的子空间表示矩阵组成一个张量, LTMSM 在通过低秩张量限制来保持多视图数据之间交叉信息的同时,降低了数据中的冗余信息,进而提升了最终的聚类性能。

(5)基于 t-SVD 低秩限制多视图子空间聚类^[14](t-SVD-MSC):为了进一步提升多视图聚类性能,Xie 等提出基于 t-SVD 低秩限制的多视图子空间聚类算法,该算法利用基于 t-SVD 的低秩限制来改善各个视图的重构系数矩阵,同时获得视图之间的高阶相关性。

3.3 实验设置

本文利用 K-means 算法^[23]计算数据的类别信息。为了评价实验结果,本节采用聚类准确率(ACC)、归一化互信息(NMI)、纯度(purity)、F-measure、精度(Precision)、召回率(Recall)和调整兰德系数(ARI) 7 个指标来评价聚类结果。实验中,与算法 t-SVD-MSC 保持一致, $\mu=10^{-5}$, $\rho=10^{-4}$, $\lambda=2$, $\mu_{\max}=\rho_{\max}=10^{10}$, $\epsilon=10^{-7}$ 。对于本文算法,对超参数 α, β, λ 进行网格搜索来确定其最优值。 α 的搜索范围为 $[10^{-5}, 1]$, β 的搜索范围为 $[2^{-6}, 1]$ 。 η 的设置与文献[17]一致, t 设置为不同视图重构系数矩阵 $Z^{(v)}$ 之间欧氏距离的均值。其他算法按照各自论文中的参数设置方法进行设置。

3.4 实验结果与分析

表 1—表 3 与图 2、图 3 分别给出了各算法在 3 个数据库上的实验结果。

表 1 ORL 数据集的实验结果

Table 1 Experimental results on ORL dataset

算法	ACC	NMI	purity	Precision	Fscore	ARI
LRR-best	70.50	83.72	74.00	55.40	58.81	57.80
MLAN	83.51	88.76	81.25	53.91	63.13	62.13
multiNMF	79.50	85.88	74.25	54.86	61.53	60.53
MDcR	80.00	88.76	76.00	45.62	55.70	54.44
MVGL	94.00	95.19	89.25	68.87	75.25	77.96
LTMSC	91.00	96.45	93.00	80.92	86.46	86.13
t-SVD-MSC	96.75	99.02	97.00	94.27	96.71	96.23
Ours	97.25	99.41	97.50	94.71	97.04	97.04

表 2 Yale 数据集的实验结果

Table 2 Experimental results on Yale dataset

算法	ACC	NMI	purity	Precision	Fscore	ARI
LRR-best	75.75	76.06	75.75	59.03	60.74	58.11
MLAN	78.78	75.21	69.69	45.19	51.68	48.06
multiNMF	62.60	57.45	53.93	34.07	34.14	32.66
MDcR	80.60	71.81	66.06	40.35	49.46	45.37
MVGL	81.81	79.08	76.96	54.04	59.00	54.04
LTMSC	78.18	79.99	78.78	58.02	62.40	59.77
t-SVD-MSC	85.45	88.30	85.45	85.45	79.60	78.23
Ours	96.97	96.18	96.97	93.26	93.59	93.18

表 3 MSRC 数据集的实验结果

Table 3 Experimental results on MSRC dataset

算法	ACC	NMI	purity	Precision	Fscore	ARI
LRR-best	77.14	66.37	77.14	58.63	61.94	55.41
MLAN	83.14	78.01	83.23	70.97	73.45	69.00
multiNMF	74.19	65.07	73.08	57.23	60.26	53.46
MDcR	78.57	67.89	73.33	47.80	56.79	48.26
MVGL	81.90	62.83	60.00	31.63	44.65	31.17
LTMSC	83.81	75.94	83.81	68.61	71.77	66.98
t-SVD-MSC	99.52	98.92	99.52	99.01	99.03	98.87
Ours	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

由表 1—表 3 可得到以下结论:

(1)从 3 个表中可以发现,多视图学习算法在大多数情况下都能得到较算法 LRR 更优异的效果。因此,与单视图学习算法相比,基于多视图学习的聚类算法能够得到更好的实验结果。

(2)由于保持了数据的非线性结构信息,算法 MLAN,

MVGL,t-SVD-SpMSC 得到了更优异的实验结果。因此,保持多视图数据中存在的非线性结构能够提升算法的聚类性能。图 2 和图 3 是利用 t-SNE 算法绘制出的各个视角的原始数据分布图,颜色对应于利用本文算法得到的标签信息。从图中可以发现,本文计算得到的数据保持了数据流形结构信息。

(3)与其他算法相比,LTMSC,t-SVD-MSC 和 t-SVD-SpMSC 在大多数情况下能够得到更好的实验结果。因此,保持数据的高阶相关性提升了算法的聚类性能。

(4)由于本文算法保持了多视图数据之间的结构信息,t-SVD-SpMSC 在大多数情况下都优于其他算法。

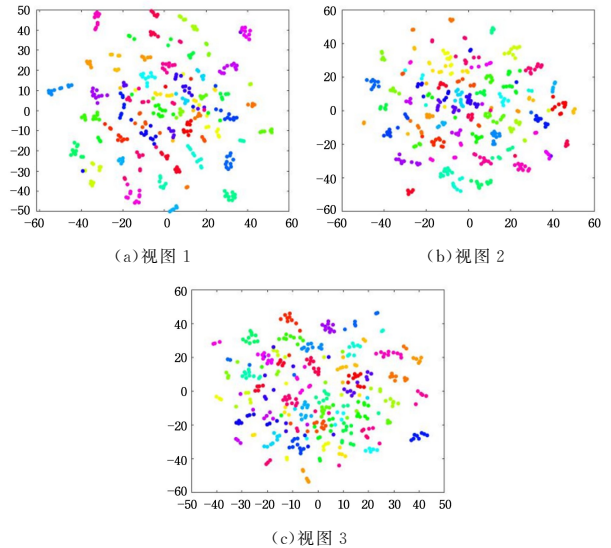


图 2 ORL 数据库上 t-SNE 算法的可视化结果(电子版为彩图)

Fig. 2 Visualization results of t-SNE algorithm on ORL database

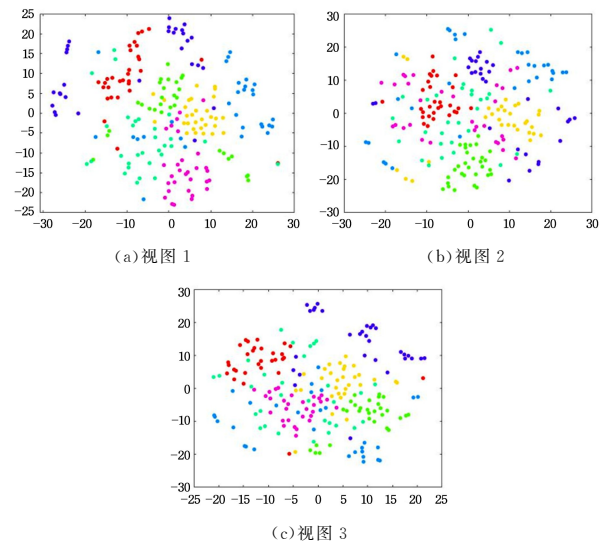


图 3 MSRC-v1 数据库上 t-SNE 算法的可视化结果(电子版为彩图)

Fig. 3 Visualization results of t-SNE algorithm on MSRC-v1 database

3.5 参数敏感性分析

从式(7)可以看出,参数 α 控制流形结构对结果的影响权重,参数 β 控制视图之间的相关性对结果的影响,参数 λ 控制残差的权重。图 4 给出了各个权重对实验结果的影响曲线。

由图 4 可知,对于 Yale 数据库,参数的最优结果为 $\alpha=10^{-3}$, $\beta=2^{-4}$, $\lambda=1.2\sim 1.6$ 。由于不同的数据库数据分布不同,最优参数可能存在较大偏差。由图 4(a)可知,当 $\alpha \ll 10^{-3}$

或 $\alpha \gg 10^{-3}$ 时,得到的结果远低于最优结果。当 α 很小时,相当于没有考虑数据分布结构,因此效果较差;反之,效果会大大降低。 β 控制了多视图数据的不同视图之间的相似性。由图 4(b)可知,当 β 很小时,由于没有考虑数据之间的相似性,因此结果较差;若没有考虑多视图数据之间的差异性,则也不能得到最优的实验结果。 λ 参数控制残差的权重,如果该参数值过小(小于 1),则不能很好地去除噪声干扰的影响,若降低了其他因素的影响,则也不能得到最优的结果。

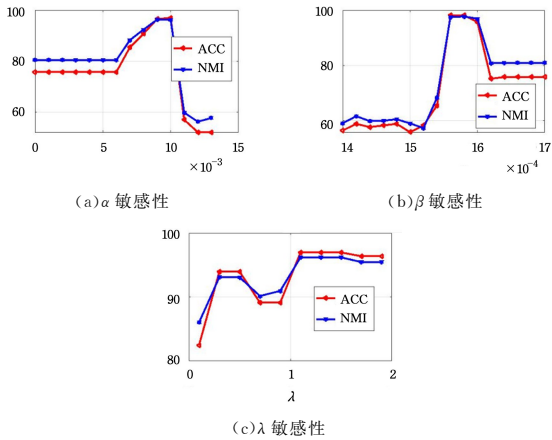


图 4 实验结果随着超参数变化的曲线

Fig. 4 Curves of experimental results change with 3 parameters

结束语 本文针对 t-SVD-MSC 算法没有考虑数据非线性结构的问题,提出了结构保持的 t-SVD-MSC 算法。该算法通过自适应学习样本之间的流形结构关系矩阵,利用图正则的方法正则样本的重构系数;为保持多视图之间的相似性,设计了一种保持策略。因此,本文提出的结构保持 t-SVD 多视图子空间聚类,更适合用于多视图聚类问题。在 ORL, Yale, MSRC-V1 数据库上的实验结果表明,与 LRR, multiNMF, MLAN, MVGL, LTMSC 和 t-SVD-MSC 相比, t-SVD-SpMSC 更适用于多视图聚类任务,具有较高的聚类精度。

参考文献

- [1] LIU S J, WEI L. Block Integration Based Image Clustering Algorithm[J]. Computer Science, 2020, 47(6): 170-175.
- [2] YANG Y, WANG H. Multi-view clustering: A survey[J]. Big Data Mining and Analytics, 2018, 1(2): 83-107.
- [3] LIU J, WANG C, GAO J, et al. Multi-View Clustering via Joint Nonnegative Matrix Factorization[C]// Proceedings of ICDM, 2013: 252-260.
- [4] LU Y, WANG L, LU J, et al. Multiple kernel clustering based on centered kernel alignment[J]. Pattern Recognition, 2014, 47(11): 3656-3664.
- [5] WANG S, LU J, GU X, et al. Unsupervised discriminant canonical correlation analysis based on spectral clustering[J]. Neurocomputing, 2016, 171(1): 425-433.
- [6] WEI S, WANG J, YU G, et al. Multi-View Multiple Clusterings Using Deep Matrix Factorization[C]// Proceedings of AAAI, 2020, 34: 6348-6355.
- [7] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184.
- [8] CAO X, ZHANG C, FU H, et al. Diversity-induced Multi-view Subspace Clustering[C]// Proceedings of CVPR, 2015: 586-594.
- [9] ZHANG C, FU H, HU Q, et al. Generalized Latent Multi-View Subspace Clustering[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020, 42(1): 86-99.
- [10] LIU X, JI S, GLÄNZEL W, et al. Multiview Partitioning via Tensor Methods[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2013, 25(5): 1056-1069.
- [11] YIN M, GAO J, XIE S. Multi-view Subspace Clustering via Tensorial t-Product Representation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(3): 851-864.
- [12] CHENG M, JING L, NG M K. Tensor-Based Low-Dimensional Representation Learning for Multi-View Clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(5): 2399-2414.
- [13] ZHANG C, FU H, LIU S, et al. Low-Rank Tensor Constrained Multiview Subspace Clustering[C]// Proceeding of ICCV, 2015: 1582-1590.
- [14] XIE Y, TAO D, ZHANG W, et al. On Unifying Multi-view Self-Representations for Clustering by Tensor Multi-rank Minimization[J]. International Journal of Computer Vision, 2018, 126(11): 1157-1179.
- [15] XIE Y, ZHANG W, QU Y, et al. Hyper-Laplacian Regularized Multilinear Multiview Self-Representations for Clustering and Semisupervised Learning[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(2): 572-586.
- [16] HE X F, YAN S C, HU Y X, et al. Face recognition using Laplacianfaces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328-340.
- [17] LIU X. Multiple Kernel k-Means Clustering with Matrix-induced Regularization[C]// proceeding of AAAI, 2016.
- [18] KILMER M E, MARTIN C D. Factorization strategies for third-order tensors[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 435(3): 641-658.
- [19] YAN S, XU D, ZHANG B. Graph Embedding and Extensions: A General Framework for Dimensionality Reduction[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1): 40-51.
- [20] SHI J B, MALIK J. Normalized cuts and image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905.
- [21] NG A Y, JORDAN M I, WEISS Y. On Spectral Clustering: Analysis and an algorithm[C]// Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems. Natural and Synthetic, 2001: 849-856.
- [22] NIE F, CAI G, LI X. Multi-View Clustering and Semi-Supervised Classification with Adaptive Neighbours[C]// Proceeding of AAAI, 2017.
- [23] CAI D, CHEN X. Large Scale Spectral Clustering Via Landmark-Based Sparse Representation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(8): 1669-1680.



ZHANG Hua-wei, born in 1975, undergraduate, senior engineer. His main research interests include electromagnetic measurement and computer-aided design.