混洗交换网络中最小无冲突路由分组的生成方法

张以皓[1,2] 沈越泓[1] 潘 林[2]
(解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)[1] (解放军理工大学指挥信息系统学院 南京 210016)[2]

摘 要 为了解决混洗交换网络中冲突路由的分组问题,定义了路由的无冲突极大组、最小无冲突分组、特征函数及覆盖函数等概念,并基于这些概念提出了应用布尔代数计算最小无冲突分组的理论和方法。同时,为提高冲突路由分组的效率,提出了计算最小无冲突分组的近似算法。理论分析和实验表明,近似算法不仅具有良好的时间性能,而且具有较高的准确度,它为在大规模信息交换中实施分批路由策略提供了强有力的支撑。

关键词 混洗交换网络,无冲突极大组,最小无冲突分组,特征函数,覆盖函数
中图法分类号 TP393 **文献标识码** A

Method of Computing Least No Conflict Routing Groupings in Shuffle-exchange Networks

ZHANG Yi-hao[1,2] SHEN Yue-hong[1] PAN Lin[2]
(College of Communication Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)[1]
(College of Command Information System, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210016, China)[2]

Abstract In order to resolve the problem of how to separate conflict routings in shuffle-exchange networks, the concepts of the maximal no conflict routing group, the least no conflict routing groupings, eigenfunction and covering function were defined. Based on these concepts, the theory and method of computing the least no conflict routing groupings by boolean algebra were proposed. In addition, an algorithm of approximately computing the least no conflict routing groupings was put forward to improve the efficiency of batch routing. Results of theoretical analysis and experiments show that the time efficiency and accuracy of the algorithm are excellent. It provides strong supports for carrying out batch routing policy in process of massive information exchange.

Keywords Shuffle-exchange network, Maximal no conflict routing group, Least no conflict routing groupings, Eigenfunction, Covering function

1 引言

由于并行处理系统中信息共享与交换的需求,人们提出了混洗交换网络[1](Shuffle-exchange networks)、榕树网络[2](Banyan networks)和基线网络[3](Baseline networks)等多种类型的多级互连网络。其中,$N\times N$(N 个输入端和 N 个输出端,$N=2^n$)的混洗交换网络由于其结构的可扩展性及路由机制方面的优势而被广泛研究和应用[4-7]。混洗交换网络由 2×2 的交换单元连接而成,每个交换单元通过"直通"与"交叉"状态的选择实现交换功能。根据交换单元间连接方式的不同,混洗交换网络又可分为多种类型,其中,最简单也是最典型的是 Omega 网络[8],许多其它类型的网络在拓扑结构上与其等价[9]。

在混洗交换网络的功能实现中,对路由冲突的处理是关键。路由冲突是指,两个在网络中传输的信元要求从某个网络结点的同一输出端输出。解决路由冲突的方法包括重排、分批、旁路和丢弃等。重排是受关注较多的方法,此方法是在可重排的网络中找到某种路由算法,使其对网络中入线到出线之间的任何一一对应都能确定一组无冲突的路由。目前,只在规模级 n(网络输入线数为 2^n)不大于 5 的网络中找到了可行的路由算法,但其应用范围十分有限,文献[10-12]分别提出了 $n=3,4,5$ 时混洗交换网络中实现重排的算法;旁路是通过对两个相互冲突路由中的一个进行被动重新选路来解决路由冲突,虽然方法实现简单,但时间延迟不易控制,路由性能不够稳定;丢弃方法是直接放弃部分冲突路由信号的传输,由于存在信息损失,只能用于某些路由质量要求不高的场合,而且,为了控制信息损失,采用的网络结构比较复杂[13];分批方法是通过对输入信息分批来避免路由冲突,分批路由需要的网络级数最少,路由实现也最简单,但路由分批需要解决两个问题,一是冲突检测,即通过检测判断一个随机路由组中哪些路由存在冲突,以明确分批的对象;二是最少分批的确定,即找出冲突路由批数最少的分批。对于冲突检测,可用的方法有窗口检测法[14]和路由编码特征检测法[15],但对于冲突路由最少分批的确定,目前还没有一个普遍适用而又十分有效的方法。本文研究的主要目的就是找出计算冲突路由最少分批的方法,突破分批路由的主要障碍,使分批路由策略在混

到稿日期:2013-03-08 返修日期:2013-06-03
张以皓(1978—),男,博士生,讲师,主要研究方向为并行计算、网络编码,E-mail:zhangyihao78@gmail.com;沈越泓(1959—),男,博士,教授,主要研究方向为无线通信理论、信息论;潘 林(1977—),女,硕士,讲师,主要研究方向为信息安全、并行计算。

洗交换网络路由功能的实现中发挥更重要的作用。

2 路由无冲突极大组

作为混洗交换网络的典型代表，Omega 网络不仅结构简单，而且具有良好的自路由特性。文献[16]已证明，在一个 n 级 $N\times N(N=2^n)$ 的 Omega 网络中，任意的输入和输出之间都存在唯一路由，每条路由可通过其源地址与目的地址确定。这一结论在 Omega 网络中既解决了进行分批路由需要的网络级数问题；也解决了冲突路由分批后路由的实现问题。另外，文献[15]给出了针对 Omega 网络的冲突路由检测方法，可见，在 Omega 网络中实施分批路由已具备了良好的基础，唯一需要解决的问题就是冲突路由最少分批的确定。

在 n 级 $N\times N$ 的 Omega 网络中，由于每条路由可通过目标出线表示，因此入线序列 $0,1,\cdots,2^n-1$ 对应的路由序列可通过这些路由的目标出线构成的序列 $R_0,R_1,\cdots,R_{2^n-1}$ 表示，每个 R_i 表示从入线 i 到出线 R_i 的路由。序列 $R_0,R_1,\cdots,R_{2^n-1}$ 中的路由可分为两类，一类是与序列中其它任何路由都不冲突的，另一类是与序列中其它路由存在冲突的路由，即为冲突路由，分批路由关注的是冲突路由。下面的路由无冲突极大组概念是确定冲突路由最少分批的基础。

设 α 是 $R_0,R_1,\cdots,R_{2^n-1}$ 中所有冲突路由构成的集合，β 是 $R_0,R_1,\cdots,R_{2^n-1}$ 中所有冲突路由对构成的集合(不区分路由对中的路由顺序)。显然，$\alpha=\bigcup\limits_{(a,b)\in\beta}\{a,b\}$。

定义 1 设路由集合 $A\subseteq\alpha$，若 A 满足

(1)任意 $a、b\in A$，有 $(a,b)\notin\beta$；

(2)任意 $c\in\alpha-A$，存在 $d\in A$，使 $(c,d)\in\beta$。

则称路由集合 A 是 β(或 α)的路由无冲突极大组。

路由无冲突极大组显然具有下面定理 1 反映的性质。

定理 1 设 $B\subseteq\alpha$，若 B 中路由相互无冲突，则 B 是某个路由无冲突极大组的子集。

证明：略

定义 2 设 $B\subseteq\alpha$，若 $C=\alpha-B$，则称 C 是 B 的补集，记 $C=\overline{B}$。

对集合 α，如果找到它的所有路由无冲突极大组，那么，计算它的最小无冲突分批就有了一定基础，下面将以布尔代数为工具讨论无冲突极大组的计算问题，首先定义布尔代数中的一类范式。

根据布尔代数理论，任何布尔表达式既可以表示为析取范式，也可以表示为合取范式。对于只包含析取与合取运算的布尔表达式，其范式表达可以定义“最简”形式。

定义 3 设 Σ 是只包含析取与合取运算的布尔析取范式，若 Σ 的任何两个析取支包含的变量集合之间都不存在包含关系，则称 Σ 为最简析取范式。

以下两个命题反映的是最简析取范式的性质。

命题 1 若 Σ 是只含析取与合取运算的布尔表达式，则存在与 Σ 逻辑等价的最简析取范式，且这样的最简析取范式是唯一的。

命题 2 设 Σ 是只含析取与合取运算的布尔合取范式，Σ' 是 Σ 的最简析取范式，则 Σ' 的任一析取支包含 Σ 的每个合取支中至少一个变量，但 Σ' 的任一析取支中变量集合的真子集没有这样的性质。

下面构造一个用于计算 α 中所有路由无冲突极大组的布尔函数 Δ_β。首先，为 α 中每个路由 R_i 指定一个布尔变量“R_i”。

定义 4 若布尔表达式 Δ_β 满足 $\Delta_\beta=\bigwedge\limits_{(R_i,R_j)\in\beta}(R_i\vee R_j)$，则称 Δ_β 是 β 的特征函数。

定理 2 设 Δ_β 是 β 的特征函数，$P\subseteq\alpha$，则 P 是路由无冲突极大组，当且仅当 $\overline{P}$ 是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支。

证明：(充分性)首先证明，对任意 $a、b\in P$，都有 $(a,b)\notin\beta$。用反证法。

根据命题 1，Δ_β 的最简析取范式存在且唯一。假设存在 $a、b\in P$，使 $(a,b)\in\beta$，由 Δ_β 的定义知，$a\vee b$ 是 Δ_β 的一个合取支，因为 $\overline{P}$ 是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支，所以 $\overline{P}$ 必然包含 $a、b$ 中至少一个元素，这与 $a、b\in P$ 矛盾。

其次证明，对任意 $c\in\overline{P}$，都存在 $d\in P$，使 $(c,d)\in\beta$。用反证法。

假设 $\overline{P}$ 中存在某个元素 c，对任意 $d\in P$，都有 $(c,d)\notin\beta$。则，对任意 $(c,f)\in\beta$，有 $f\in\overline{P}-\{c\}$，这说明，Δ_β 的任意包含 c 的合取支中必有一变量包含于 $\overline{P}-\{c\}$。又由于 $\overline{P}$ 是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支，因此，对 Δ_β 中任一不含 c 的合取支，该合取支中必有一元素在 $\overline{P}-\{c\}$ 中，综上可见，Δ_β 的每个合取支中必有一个元素在 $\overline{P}-\{c\}$ 中，即，Δ_β 的最简析取范式的析取支 $\overline{P}$ 的真子集 $\overline{P}-\{c\}$ 包含 Δ_β 的每个合取支中至少一个元素，这与命题 2 矛盾。

(必要性)首先证明，对 Δ_β 的每个合取支，$\overline{P}$ 必然包含该合取支中至少一个元素，即，对任意 $(a,b)\in\beta$，有 $a\in\overline{P}$ 或 $b\in\overline{P}$。假设 $a\notin\overline{P}$，且 $b\notin\overline{P}$，则有 $a、b\in P$，因为 P 是路由无冲突极大组，于是 $(a,b)\notin\beta$，这与 $(a,b)\in\beta$ 矛盾。$\overline{P}$ 包含 Δ_β 的每个合取支中至少一个元素说明，Δ_β 的最简析取范式中至少有一个析取支包含于 $\overline{P}$。接下来证明，$\overline{P}$ 就是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支。这只需证明，对任意 $x\in\overline{P}$，$\overline{P}-\{x\}$ 不是 Δ_β 的最简析取范式的析取支。因为 P 是路由无冲突极大组，于是，对任意 $x\in\overline{P}$，存在 $y\in P$，使 $(x,y)\in\beta$，显然，$x、y$ 都不属于 $\overline{P}-\{x\}$。$(x,y)\in\beta$ 说明 $x\vee y$ 是 Δ_β 的一个合取支，若 $\overline{P}-\{x\}$ 是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支，根据命题 2，有 x 或 y 属于 $\overline{P}-\{x\}$，这与 $x、y$ 都不属于 $\overline{P}-\{x\}$ 矛盾。所以，$\overline{P}-\{x\}$ 一定不是 Δ_β 最简析取范式的析取支。从而，$\overline{P}$ 就是 Δ_β 的最简析取范式的一个析取支。证毕。

从定理 2 不难看出，只需计算 Δ_β 的最简析取范式就可获得 β 的所有路由无冲突极大组，记 β 的所有路由无冲突极大组的集合为 Γ_β。

例 1 在 5 级 32×32 的 Omega 网络中，设前一半入线对应的路由序列 $R_0,R_1,\cdots,R_{15}$ 为：14,11,22,30,21,0,18,25,5,27,16,7,2,24,13,29，计算该路由序列中所有路由无冲突极大组。

序列 $R_0,R_1,\cdots,R_{15}$ 对应的路由目标结点序列 $D_0,D_1,\cdots,D_{15}$ 为：7,5,11,15,10,0,9,12,2,13,8,3,1,12,6,14。利用冲突路由编码检测方法可得出 $R_0,R_1,\cdots,R_{15}$ 中的冲突路由对构成的集合为：$\beta=\{(R_0,R_1),(R_0,R_2),(R_0,R_3),(R_2,R_3),(R_4,R_5),(R_5,R_7),(R_7,R_{13}),(R_{14},R_{15})\}$。于是

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= (R_0 \vee R_1)(R_0 \vee R_2)(R_0 \vee R_3)(R_2 \vee R_3)(R_4 \vee R_5)\\ &\quad (R_5 \vee R_7)(R_7 \vee R_{15})(R_{14} \vee R_{15})\\ &= (R_0R_2 \vee R_0R_3 \vee R_1R_2R_3)(R_4R_7 \vee R_5R_7 \vee R_5R_{13})\\ &\quad (R_{14} \vee R_{15})\\ &= R_0R_2R_4R_7R_{14} \vee R_0R_2R_5R_7R_{14} \vee R_0R_2R_5R_{13}R_{14} \vee\\ &\quad R_0R_3R_4R_7R_{14} \vee R_0R_3R_5R_7R_{14} \vee R_0R_3R_5R_{13}R_{14} \vee\\ &\quad R_1R_2R_3R_4R_7R_{14} \vee R_1R_2R_3R_5R_7R_{14} \vee R_1R_2R_3R_5R_{13}R_{14}\\ &\quad \vee R_0R_2R_4R_7R_{15} \vee R_0R_2R_5R_7R_{15} \vee R_0R_2R_5R_{13}R_{15} \vee\\ &\quad R_0R_3R_4R_7R_{15} \vee R_0R_3R_5R_7R_{15} \vee R_0R_3R_5R_{13}R_{15} \vee\\ &\quad R_1R_2R_3R_4R_7R_{15} \vee R_1R_2R_3R_5R_7R_{15} \vee R_1R_2R_3R_5R_{13}R_{15}\end{aligned}$$

Δ_β 的最简析取范式共有 18 个析取支，这些析取支对应的路由集关于冲突路由集 $\alpha(\alpha=\{R_0,R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_7,R_{13},R_{14},R_{15}\})$ 的补集构成所有路由无冲突极大组。

注：为书写方便，省略 Δ_β 的表达式中合取运算符“∧”，并约定，“∧”运算优先级高于“∨”运算。

3 冲突路由集的覆盖与分组

3.1 冲突路由集的覆盖与分组

为了能依据路由无冲突极大组找到冲突路由的最少分批，定义几个与 α 相关的概念。

定义 5 设集合 $P=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 的每个元素都是非空路由集，若 P 满足

(1)任意 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$A_i\subseteq\alpha$，且 A_i 中的路由相互无冲突；

(2)对任意 $x\in\alpha$，存在某个 A_i，使 $x\in A_i$。

则称集合 P 是 α 的 k 元覆盖，简称 α 的覆盖。

由于 α 完全由集合 β 确定，α 的覆盖也可称为 β 的覆盖。

定义 6 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 α 的覆盖，若对任意 $i\neq j$，有 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 α 的 k 元无冲突分组，简称 α 的无冲突分组，其中，包含元素最少的无冲突分组称为最小无冲突分组。

定义 7 设 Γ 是 α 的覆盖，若 Γ 的任意真子集都不是 α 的覆盖，则称 Γ 是 α 的极小覆盖。

定义 8 α 的所有覆盖中元素最少的覆盖称为 α 的最小覆盖。

不难看出，α 的最小覆盖一定是 α 的极小覆盖，但反之不成立。α 的最小和极小覆盖都存在但都不一定唯一。α 的任何最小覆盖 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 都可通过如下方式转化为 α 的最小无冲突分组。

构造集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$，使 $B_1=A_1$，$B_i=A_i-\bigcup_{t=1}^{i-1}B_t$ $(i=2,3,\cdots,k)$，不难证明，$\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 是 α 的一个最小无冲突分组。

最小无冲突分组是冲突路由分批的最优结果，根据最小无冲突分组与极小覆盖之间的关系，寻找 α 的一个最小无冲突分组只需找到 α 的一个最小覆盖。

定理 3 存在 Γ_β 的子集 P，P 是 α 的最小覆盖。

证明：设 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 α 的一个最小覆盖。对任意 $A_i\in\Gamma$，由于 A_i 中的路由相互无冲突，根据定理 1，A_i 必是某路由无冲突极大组 B_i 的子集。令 $P=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$，显然 $P\subseteq\Gamma_\beta$，且 P 是 α 的覆盖。由于 P 与 Γ 元素个数相同，因此 P 也是 α 的最小覆盖。证毕。

定理 3 指明，可在 Γ_β 中寻找 α 最小覆盖，如何能找到呢？布尔代数依然是很好的工具。

3.2 冲突路由集的覆盖函数

令 $\Gamma_\beta=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$，为 Γ_β 中每个元素 A_i 指定一个对应的布尔变量“a_i”，对每个 $x\in\alpha$，构造一个对应的布尔表达式 $\delta(x)$，使 $\delta(x)=\bigvee_{x\in A_i\wedge A_i\in\Gamma_\beta}a_i$。

定义 9 若布尔表达式 Φ_α 满足 $\Phi_\alpha=\bigwedge_{x\in\alpha}\delta(x)$，则称 Φ_α 是 α 的覆盖函数。

定理 4 设 $S\subseteq\Gamma_\beta$，则 S 是 α 的极小覆盖，当且仅当，S 中元素对应的布尔变量集合是 Φ_α 的最简析取范式的一个析取支。

证明：(充分性)首先证明，S 是 α 的覆盖。根据命题 1，Φ_α 的最简析取范式存在且唯一。设 T 是 S 中元素对应的布尔变量集合，则，T 是 Φ_α 的最简析取范式的一个析取支。对任意 $x\in\alpha$，由于 $\delta(x)$ 是 Φ_α 的一个合取支，根据命题 2，T 包含 $\delta(x)$ 中至少一个变量，令 $a\in T\cap\delta(x)$。$a\in T$ 说明，存在路由集合 $A\in S$，a 是 A 的对应变量；$a\in\delta(x)$ 说明，x 在 a 对应的路由集合 A 中，可见，存在 $A\in S$，满足 $x\in A$，故 S 是 α 的覆盖。其次证明，S 的任意真子集都不是 α 的覆盖。令 S' 是 S 的任意真子集，T' 是 S' 中元素对应的布尔变量集合，根据命题 2，存在 Φ_α 的合取支 $\delta(x)$，$\delta(x)$ 与 T' 的交集为空集。对任意 $A\in S'$，令 A 的对应变量为 a，显然，$a\in T'$，由于 $\delta(x)$ 与 T' 的交集为空集，于是 $a\notin\delta(x)$，这说明 $x\notin A$，可见，S' 不是 α 的覆盖，结合 S' 的任意性知，S 是 α 的极小覆盖。

(必要性)首先证明，T 包含 Φ_α 的每个析取支中至少一个变量。对 Φ_α 的任意合取支 $\delta(x)$，由于 S 是 α 的覆盖，于是，存在 $A\in S$，满足 $x\in A$。令 A 的对应变量为 a，由 $x\in A$ 可知，$a\in\delta(x)$；由 $A\in S$ 可知，$a\in T$。可见，T 包含 Φ_α 的每个合取支中至少一个变量。这说明，Φ_α 的最简析取范式中存在包含于 T 的析取支。其次证明，T 就是 Φ_α 的最简析取范式的一个析取支。用反证法。假设 T 不是 Φ_α 的最简析取范式的一个析取支，则存在 T 的真子集 T'，T' 是 Φ_α 的最简析取范式的一个析取支。根据已证明的充分性知，T' 中的变量对应的路由集合 S' 是 α 的极小覆盖，T' 是 T 的真子集说明 S' 是 S 的真子集，于是，S 必不是 α 的极小覆盖，这与必要性条件矛盾。证毕。

根据定理 4，Γ_β 中 α 的所有极小覆盖可通过简单的布尔运算得到，这些极小覆盖中，元素最少的就是 α 的最小覆盖。

3.3 最小无冲突分组确定算法

定理 2 和定理 4 奠定了最小无冲突分组的计算基础，下面的算法 1 给出了最小无冲突分组的完整计算过程。

算法 1 最小无冲突分组的确定算法

输入：冲突路由集 α，冲突路由对集 β。

输出：α 的一个最小无冲突分组。

Step1 构造 β 的特征函数 $\Delta_\beta=\bigwedge_{(R_i,R_j)\in\beta}(R_i\vee R_j)$，计算 Δ_β 的最简析取范式，并由最简析取范式的析取支求补集得 β 的路由无冲突极大组集合 Γ_β；

Step2 构造 α 的覆盖函数 $\Phi_\alpha=\bigwedge_{x\in\alpha}\delta(x)$，其中，$\delta(x)=\bigvee_{x\in A_i\wedge A_i\in\Gamma_\beta}a_i$，$a_i$

是路由无冲突极大组 A_i 对应的布尔变量。计算 Φ_α 的最简析取范式，由最简析取范式的析取支得 α 在 Γ_β 中的所有极小覆盖；

Step3 从所求的 α 的极小覆盖中选择一个包含元素最少的覆盖，得 α 的一个最小覆盖 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$；

Step4 根据所选覆盖 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，计算新覆盖 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$，使 $B_1 = A_1$，$B_i = A_i - \bigcup_{t=1}^{i-1} B_t$，$(i = 2, 3, \cdots, k)$，新覆盖 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 就是 α 的一个最小无冲突分组。

下面的定理 5 及其推论有助于更方便地从 Γ_β 中找到 α 的一个最小覆盖。

定理 5 设 $X = \{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ 是 Δ_β 的最简析取范式中某 k 个析取支组成的集合，则 $X' = \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \cdots, \overline{P}_k\}$ 是 α 的极小覆盖，当且仅当，$\bigcap_{i=1}^{k} P_i = \emptyset$，且对任意 $i(i = 1, 2, \cdots, k)$，$\bigcap_{P \in X - \{P_i\}} P \neq \emptyset$。

证明：(充分性)由定理 2 可知，对任意 i，$\overline{P}_i$ 是无冲突路由组；由 $\bigcap_{i=1}^{k} P_i = \emptyset$ 可知，$\overline{\bigcap_{i=1}^{k} P_i} = \alpha$，即 $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i = \alpha$，可见，$\overline{P}_1, \overline{P}_2, \cdots, \overline{P}_k$ 是 α 的覆盖。对 X' 的任意真子集 M，显然，存在 $P_t \in X$，满足 $M \subseteq X' - \{\overline{P}_t\}$。由于 $\bigcap_{P \in X - \{P_t\}} P \neq \emptyset$，于是，存在 α 中的路由 a，满足 $a \in \bigcap_{P \in X - \{P_t\}} P$。显然，$a \notin \overline{\bigcap_{P \in X - \{P_t\}} P}$，即 $a \notin \bigcup_{P \in X - \{P_t\}} \overline{P}$，也即 $a \notin \bigcup_{P \in X' - \{\overline{P}_t\}} P$；又由于 $M \subseteq X' - \{\overline{P}_t\}$，从而 $a \notin \bigcup_{P \in M} P$，这说明 M 不是 α 的覆盖，故，$\overline{P}_1, \overline{P}_2, \cdots, \overline{P}_k$ 是 α 的极小覆盖。

(必要性)由于 $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \cdots, \overline{P}_k$ 是 α 的极小覆盖，于是，一方面，$\bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i = \alpha$，从而 $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i} = \emptyset$，即 $\bigcap_{i=1}^{k} P_i = \emptyset$；另一方面，对任意 $i(i = 1, 2, \cdots, k)$，$X' - \{\overline{P}_i\}$ 不是 α 的覆盖，从而，存在 $a \in \alpha$ 满足 $a \notin \bigcup_{P \in X' - \{\overline{P}_i\}} P$，从而 $a \in \overline{\bigcup_{P \in X' - \{\overline{P}_i\}} P}$，即 $a \in \bigcap_{P \in X' - \{\overline{P}_i\}} \overline{P}$，也即 $a \in \bigcap_{P \in X - \{P_i\}} P$，由此可见，$\bigcap_{P \in X - \{P_i\}} P \neq \emptyset$。证毕。

定理 5 说明，Δ_β 的最简析取范式的析取支集合的所有子集中，满足所有元素的交集为空集，且所含元素个数最少的集合，其元素的补集构成 α 的极小覆盖。

推论 1 设 P_1、P_2 是 Δ_β 的最简析取范式的两个析取支，若 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$，则 $X = \{P_1, P_2\}$ 是 α 的最小无冲突分组。

证明：首先，由于 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$，且 $P_1 \neq \emptyset$，$P_2 \neq \emptyset$，根据定理 5 的充分性知，$X' = \{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ 是 α 的极小覆盖。其次，α 的任何覆盖显然至少包含两个元素，于是有，$X' = \{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ 是 α 的最小覆盖，显然，它也是 α 的最小无冲突分组。另外，由于 $\overline{P}_1 = P_2$，$\overline{P}_2 = P_1$，因此 $X = \{P_1, P_2\}$ 是 α 的最小无冲突分组。证毕。

例 2 考察例 1 中 β 的子集 $\beta_1 = \{(R_4, R_5), (R_5, R_7), (R_7, R_{13})\}$，$\beta_1$ 确定的冲突路由集合为 $\alpha_1 = \{R_4, R_5, R_7, R_{13}\}$，$\beta_1$ 的特征函数为：

$$\Delta_{\beta_1} = (R_4 \vee R_5)(R_5 \vee R_7)(R_7 \vee R_{13})$$
$$= R_4 R_7 \vee R_5 R_7 \vee R_5 R_{13}$$

因 $\{R_4, R_7\} \cap \{R_5, R_{13}\} = \emptyset$，故 $\{\{R_5, R_{13}\}, \{R_4, R_7\}\}$ 是 α_1 的最小覆盖。

不难看出，在 Δ_β 的极小析取范式中，如果任意两个析取支的交都非空，那么，满足交集为空集的 3 个析取支的补集便构成 α 的一个最小覆盖，如此类推，可得最小覆盖的另一种求法。

4 最小无冲突分组的近似算法

算法 1 中计算最小无冲突分组的方法是简单的，但过程中涉及的最简析取范式的计算具有非多项式时间复杂度，这使得在大规模路由条件下应用算法 1 变得不可行。为了解决路由分组的效率问题，下面构造一个只有多项式时间复杂度的最小无冲突分组近似算法。

算法 2 最小无冲突分组的近似算法

输入：冲突路由集合 $\alpha = \{R_1, R_2, \cdots, R_m\}$，冲突路由对集合 β。

输出：α 的一个最小无冲突分组。

Step1 建立一个二维表，表的首行首列都由 α 中所有元素组成(元素顺序不限)，其它行列中的元素由冲突特征元“0”或“1”构成。对任意 $R_i, R_j \in \alpha$，如果 $(R_i, R_j) \in \beta$，则表中 R_i 所在的行(列)与 R_j 所在列(行)交叉点元素为“1”，否则，交叉点元素为“0”，表的最后一列中的元素是其所在行中路由的“冲突基数”，是所在行中所有冲突特征元的和；

Step2 构造集合 A，X。$A = \emptyset$，X 为当前二维表中所有行路由(每行首位的路由)构成的集合；

Step3 在 X 中任选一个对应冲突基数最大的路由 R_i，更新集合 A，$A = A \cup \{R_i\}$，并搜索 R_i 所在行中的元素，找出所有元素“1”对应的列路由(每列首位的路由)构成的集合 $S(R_i)$，更新集合 X，$X = X - \{R_i\} - S(R_i)$；

Step4 考察当前集合 X，若 $X = \emptyset$，则将集合 A 作为 α 最小无冲突分组中的一个元素，否则，循环执行 Step3 的过程，直至 $X = \emptyset$；

Step5 去掉二维表中当前集合 A 中的路由所在的行，若更新后的二维表中不再含有行路由，则算法执行结束，此时，算法得到的所有集合 A 构成的集合是 α 的一个近似最小无冲突分组。否则，循环执行 Step2－Step5 的过程，直至二维表中不再含有行路由。

容易证明，算法 2 确定的所有集合 A 构成 α 的一个无冲突分组。

算法 2 通过路由扩充方法生成每个集合 A，扩充过程进行至 A 成为当前二维表中行路由集合的一个无冲突极大组时结束，这种贪心的路由扩充过程使得每个集合 A 包含了尽可能多的路由，如此可保证算法结果在分组数量上尽可能接近最小无冲突分组。

例 3 使用算法 2 计算例 1 中 α 的一个近似最小无冲突分组。

(1)针对集合 $\beta = \{(R_0, R_1), (R_0, R_2), (R_0, R_3), (R_2, R_3), (R_4, R_5), (R_5, R_7), (R_7, R_{13}), (R_{14}, R_{15})\}$ 建立对应的二维表，如表 1 所列。

表 1 确定覆盖元 $\{R_0, R_5, R_{13}, R_{14}\}$ 的二维表

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_7	R_{13}	R_{14}	R_{15}	
R_0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
R_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
R_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
R_4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
R_5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
R_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
R_{13}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
R_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
R_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

(2)构造集合 $X=\alpha, A=\emptyset$,并针对 X、A,循环执行算法 2 Step3 的过程更新 X 与 A,直至 $X=\emptyset$。共需 4 次更新,更新结果依次为:i)$A=\{R_0\}, X=\{R_4, R_5, R_7, R_{13}, R_{14}, R_{15}\}$;ii)$A=\{R_0, R_5\}, X=\{R_{13}, R_{14}, R_{15}\}$;iii)$A=\{R_0, R_5, R_{13}\}, X=\{R_{14}, R_{15}\}$;iv)$A=\{R_0, R_5, R_{13}, R_{14}\}, X=\emptyset$。$A$ 的最后更新结果$\{R_0, R_5, R_{13}, R_{14}\}$作为所求最小无冲突分组中的一个元素。

(3)从当前二维表中去掉路由 R_0, R_5, R_{13}, R_{14} 所在的行得新的二维表(如表 2 所列)与新的 X,反复执行算法 2 Step2 的过程,直至 $X=\emptyset$,得最小无冲突分组的第二个元素 $A=\{R_2, R_7, R_1, R_4, R_{15}\}$。

表 2 确定覆盖元$\{R_2, R_7, R_1, R_4, R_{15}\}$的二维表

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_7	R_{13}	R_{14}	R_{15}	
R_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R_2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
R_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
R_4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
R_7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
R_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

(4)从当前二维表中去掉路由 $R_2, R_7, R_1, R_4, R_{15}$ 所在的行得新的二维表(如表 3 所列)与新的 X,循环执行算法 2 Step3 的过程,直至 $X=\emptyset$,得最小无冲突分组的第 3 个元素 $A=\{R_3\}$。

表 3 确定覆盖元$\{R_3\}$的二维表

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_7	R_{13}	R_{14}	R_{15}	
R_3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2

(5)从当前二维表中去掉路由 R_3 所在的行,此时表中不再含有行路由,算法执行结束,所得的 3 个集合 A 构成 α 的一个最小无冲突分组$\{\{R_0, R_5, R_{13}, R_{14}\}, \{R_2, R_7, R_1, R_4, R_{15}\}, \{R_3\}\}$。

5 实验与分析

5.1 算法的时间复杂度

算法 2 的运算集中在两方面,一是冲突分组中每个元素 A 的计算,二是用于产生集合 A 的路由集合 X 的计算。为确定算法的时间复杂度,作如下假设。

假设冲突路由规模也即集合 α 的基数为 n;算法针对 α 生成的集合 A 的个数为 M,第 i 个 A 记为 A_i,A_i 包含的路由数为 n_i;用于生成 A_i 的初始 X 设为 $X_i(X_1=\alpha, i=1,2,\cdots,M)$,$X_i$ 包含的路由数为 t_i;在针对 X_i 的更新中,第 $j(j=1,2,\cdots,n_i)$次更新后的 X_i(记为 X_{ij})包含的路由数为 t_{ij}。

根据算法 2,对任一 A_i,生成 A_i 的第 $j(j=1,2,\cdots,n_i)$次扩充需要对 $X_{i(j-1)}(X_{i0}=X_i)$进行元素扫描,从中选择一个冲突基数最大的路由。如果将扫描单个路由所需的时间作为单位时间,那么,产生 A_i 的计算量为 $t_i+\sum_{j=1}^{n_i-1} t_{ij}$。另外,在生成 $A_i(i=1,2,\cdots,M)$的过程中,需对 X_i 进行 n_i 次更新,每次更新需扫描二维表的 n 个行路由,故更新 X_i 需要的计算量为 nn_i,于是,算法 2 的计算时间总量为$\sum_{i=1}^{M}(t_i+\sum_{j=1}^{n_i-1} t_{ij})+\sum_{i=1}^{M} nn_i$。

由于,

$$\sum_{i=1}^{M}(t_i+\sum_{j=1}^{n_i-1} t_{ij})+\sum_{i=1}^{M} nn_i$$
$$<\sum_{i=1}^{M}(t_i+\sum_{j=1}^{n_i-1} t_i)+\sum_{i=1}^{M} nn_i=\sum_{i=1}^{M} n_i t_i+n\sum_{i=1}^{M} n_i$$
$$<\sum_{i=1}^{M} n_i n+n\sum_{i=1}^{M} n_i=2n\sum_{i=1}^{M} n_i=2n^2$$

又因为$\sum_{i=1}^{M}(t_i+\sum_{j=1}^{n_i-1} t_{ij})+\sum_{i=1}^{M} nn_i>\sum_{i=1}^{M} nn_i=n\sum_{i=1}^{M} n_i=n^2$,所以,算法 2 的时间复杂度为 $O(n^2)$。

为确定随机路由组中路由冲突情况及冲突路由分组算法的实际时间效能,基于 Visual C++2005 实现了若干不同规模下随机路由组的生成、冲突路由的检测及基于算法 2 的冲突路由分组。实验平台环境为,CPU:Intel(R) 4,2.80GHz;内存:512M;OS:Windows XP。实验选择了 n 从 3 到 10 的 8 个不同的路由组规模等级,针对每个规模等级,首先以随机方式生成一定数量的路由组,然后使用文献[15]中的算法检测出每个路由组中的冲突路由,最后用算法 2 计算每个冲突路由组的最小无冲突分组,并产生冲突路由分组的平均计算时间。相关数据如表 4 所列。

表 4 不同规模路由组中冲突路由分组相关数据

路由组规模等级(n)	路由组规模(2^n)	随机路由组数量	冲突路由平均规模	冲突路由平均占比(%)	分组数量均值	冲突分组平均时间(ms)
3	8	10000	5.69	71	2.00	0.0014
4	16	10000	12.45	78	2.33	0.0048
5	32	1000	26.78	84	3.02	0.0210
6	64	1000	46.53	73	3.16	0.0630
7	128	1000	98.51	78	3.94	0.3420
8	256	100	226.76	89	4.51	1.2600
9	512	100	483.28	94	5.23	5.3100
10	1024	100	991.77	97	5.56	15.0200

表 4 的数据显示,不同规模的路由组中,冲突路由在路由组中所占比例都在 70%以上,相互间差距不大,这说明冲突路由平均规模和对应路由组规模之间近似成线性关系。结合前面的算法时间复杂度分析结果可推知,平均分组时间与对应路由组规模之间应当近似为二次函数关系,图 1 直观反映了这一事实(图 1 中的二次函数 f 为:平均分组时间 = 0.00002×路由组规模^2),实验与理论分析的结果相互基本吻合。

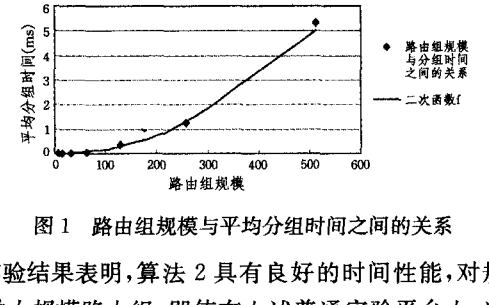

图 1 路由组规模与平均分组时间之间的关系

实验结果表明,算法 2 具有良好的时间性能,对规模达 1024 的大规模路由组,即使在上述普通实验平台上,冲突分组的平均时间也仅约为 15 毫秒,因此,算法 2 能基本满足大规模信息交换的需求。

5.2 算法的准确度

衡量算法性能的另一项重要指标是结果的准确度。随机选择了实验中部分由算法得到的冲突路由分组结果,对它们的"最小性"进行了检验,统计显示,在规模不超过 32 的路由组中,算法生成的结果就是最小无冲突分组的占比超过

97%，在规模为64和128的路由组中，占比都在90%以上，依然保持了较高的准确度。

进一步分析表4的数据还可发现，冲突路由平均分组数与路由组规模等级近似成正比关系，如图2所示。由此可推知，冲突路由平均分组数与路由组规模近似成对数函数关系，如图3所示。这说明，算法生成的路由分组数受路由组规模的影响加速递减，这使得即使在较大规模的路由组中，算法生成的路由分组数也是很有限的。例如，在规模为1024的路由组中，实验所得冲突路由平均分组数仅为5.56，最大分组数也只有7。这体现出分批路由方法较强的规模适应性。

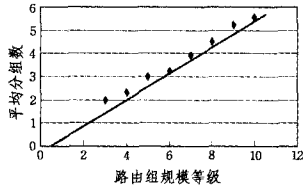

图2 平均分组数与路由组规模间的关系

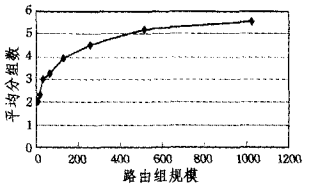

图3 平均分组数与路由组规模之间的关系

结束语 混洗交换网络中，如何确定冲突路由的最小无冲突分组是分批路由的核心问题。基于布尔代数的最小无冲突分组生成方法将分组的确定转化为布尔运算，虽然运算的时间复杂度受路由组规模影响较大，但其计算方法简单，并且可计算所有最小无冲突分组，是混洗交换网络研究的又一重要理论成果。最小无冲突分组近似算法实现了冲突路由的快速分组，不仅时间效率高，而且具有较高的准确度，能满足大规模信息交换的需求，它与文献[15]中的路由冲突检测算法结合将构成Omega网络中一个理想的分批路由实施方案。

参考文献

[1] Stone H S. Parallel Processing with the Perfect shuffle[J]. IEEE Transactions on Computers, 1971, C-20(2): 153-161

[2] Goke L R, Lipovski G J. Banyan networks for partitioning multiprocessing systems[C]// Proc Fist Annual Computer Architecture Conf. 1973: 21-28

[3] Wu C, Feng T. On a Distributed processor communication architecture[C]// Proc Compcon Fall. 1980: 599-605

[4] Akbar S, Reza S N, Hamid Sarbazi A. The Shuffle-Exchange Mesh Topology for 3D NoCs[C]// The International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks. IEEE, 2008, 23: 275-280

[5] Chou W Y, Chen R B, Chen Chiu-yuan. All-to-All Personalized Exchange Algorithms in Generalized Shuffle-exchange Networks [C]// Eighth International Conference on Networks. 2009: 185-190

[6] Muller O, Baghdadi A, Jezequel M. From parallelism levels to amulti-asip architecture for turbo decoding[J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration(VLSI) Systems, 2009, 17 (1): 92-102

[7] Ding N, Ma H L, Tan G Z. The Parallelization Design of Chaotic Encryption System Based on Mulitlevel Shuffle-Exchange Network[C]// Fifth International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing. 2009: 698-671

[8] Lawrire D H. Access and alignment of data in an array processor[J]. IEEE Transactions on Computers, 1975, C-24 (12): 1145-1155

[9] Clonan T J. Topological equivalence of optical crossover networks and modified data manipulator networks[J]. Appl. Opt., 1989, 28(13): 94-98

[10] Raghavendra C S, Varma A. Rearrangeability of the 5-Stage Shuffle-Exchange Network for $N=8$ [A]// Proceedings of 1986 International Conference on Parallel Proceeding[C]. University Park, USA, 1987: 119-122

[11] 戴浩，沈孝钧. 在7级混洗交换网络中实现16×16的可重排性[J]. 电子学报，2007，35(10)：1875-1885

[12] 葛方斌，张涛，宋金玉，等. $3n-1$级混洗交换网络的重排性研究[J]. 通信学报，2011，32(10)：10-18

[13] 李挥，何伟，伊鹏，等. 排序集线器多级互连交换结构的多路径自路由模型[J]. 电子学报，2008，36(1)：1-8

[14] Linial N, Tarsi M. Interpolation between bases and the shuffle exchange network[J]. European J Combin, 1989, 10(1): 29-39

[15] Ge F B, Zhao M, Zhang T, et al. A new policy to solve routing conflict in shuffle-exchange network[J]. Science China Information Sciences, 2011, 54(7): 1512-1523

[16] Raghavendra C S. On the Rearrangeability Conjecture of (2log2$N-1$)-stage Shuffle- Exchange Network [A]// IEEE Computer Society Technical Committee on Computer Architecture Newsletter[C]. 1994-95: 10-12

(上接第165页)

[8] Sun K, Yu J Q. Video affective content representation and recognition using video affective tree and hidden Markov models [C]// Proc. of the second International Conference on Affective Computing and Intelligent Interaction (ACII2007). Lisbon, Portugal, Sep. 2007: 594-605

[9] 闫乐林，温向明，郑伟，等. 基于未确知测度的视频情感内容识别[J]. 东南大学学报：自然科学版，2011，41(3)：473-477

[10] 闫乐林，冯希叶. 一种基于内容的视频情感类型识别算法[J]. 计算机系统应用，2011，20(3)：102-105

[11] Valdez P, Mehrabian A. Effects of color on emotions[J]. Journal of Experimental Psychology: General, 1994, 123(4): 394-409

[12] Zettl H. 图像、声音、运动：实用媒体学[M]. 赵淼淼，译. 北京：北京广播电影学院出版社，2003

[13] Wang H L, Cheong L F. Affective understanding in film [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2006, 16(6): 689-704

[14] Lefevre S, Vincent N. Efficient and robust shot change detection [J]. Journal of Real-Time Image Processing, 2007, 2: 23-34

[15] Sundaram H, Chang S F. Computable scene and structures in films[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2002, 4(4): 482-491

[16] Su J H, Huang Y T, Yeh H H, et al. Effective content-based video retrieval using pattern-indexing and matching techniques [J]. Expert systems with applications, 2010, 37(11): 5079-5085

[17] 林新棋，严晓明，郑之. 基于模糊理论和三段论推理的电影情感分类[J]. 山东大学学报：工学版，2011，41(4)：61-67