形式概念分析中的同效关系与概念约简

马文胜, 侯锡林

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.221000169

形式概念分析中的同效关系与概念约简

马文胜[1] 侯锡林[2]
1 辽宁科技大学电子与信息工程学院 辽宁 鞍山 114051
2 辽宁科技大学工商管理学院 辽宁 鞍山 114051
(1391291002@qq.com)

摘 要 2018年以来,学者们在形式概念分析中提出并研究了"概念约简"的新课题,包括不必要概念、核心概念、相对必要概念这3类概念的鉴别研究,以及概念约简算法的研究。文中提出了同效关系,研究了其重要性质,给出了通过同效关系鉴别3类概念的简单的方法,并给出了由同效关系子集补集的概念格来得到概念约简的新算法。多年来,"约简课题"的算法都是使用合取范式和析取范式相互转换的方法,很多学者甚至表示"约简问题"就等同于合取范式和析取范式的转换问题。文中研究了不使用合取范式和析取范式转换来解决"约简课题"的新方法。该新方法不论是在理论上还是在实践上都极具意义,是一次新的尝试。一个背景的"概念约简"往往非常多,全部求出没有太大意义,一般需要求包含某些概念的"概念约简",而所提方法在这方面具有显著的优越性。

关键词:形式概念;概念约简;同效关系;对象概念;属性概念
中图法分类号 TP311

Same Effect Relation and Concept Reduction in Formal Concept Analysis

MA Wensheng[1] and HOU Xilin[2]
1 School of Electtronic and Information Engineering,Liaoning University of Science and Technology,Anshan,Liaoning 114051,China
2 School of Business Administration,Liaoning University of Science and Technology,Anshan,Liaoning 114051,China

Abstract Since 2018,scholars have proposed and studied a new topic of "concept reduction" in formal concept analysis. Including unnecessary concepts,core concepts,relatively necessary concepts,and the identification of three types of concepts,and research on concept reduction algorithm. In this paper,the same effect relation is proposed and its important properties are studied. It presents a simple way to identify three types of concepts through the same effect relationship,and proposes a new algorithm for concept reduction which is based on the concept lattice of the complement set of subsets of the same effect relationship. For decades, the algorithm of "reduction topic" has adopted the method of conjunctive normal form and disjunctive normal form transformation. Many scholars even said that "reduction problem" was equivalent to the transformation of conjunctive paradigm and disjunctive paradigm. This paper studies a new method to solve the "reduction problem" without using the transformation between conjunctive normal form and disjunctive normal form. This new method is of significance both in theory and in practice. It is a new attempt. There are often many "concept reduction" in a background,so it is not very meaningful to find out all the results. Generally,it is necessary to find out "concept reduction" containing some concepts,and the method in this paper has particular advantages in this respect.

Keywords Formal concept,Concept reduction,Same effect relation,Object concept,Attribute concept

1 引言

形式概念分析由德国数学家Wille教授于1982年提出[1],1999年,Ganter等对其做了小结[2],目前已被应用到很多领域[3-6]。在形式概念分析中,形式概念的个数随着对象属性个数的增加而呈指数级增长,因此,形式概念分析中的"约简"成为了近年来该研究领域的热点课题。

早在2005年,Zhang等[7]就在国内最先研究了寻找保持概念格同构的极小属性子集的约简问题,给出了属性协调集与属性约简的基本定义以及判定定理,提出了利用差别矩阵求解属性约简的方法,给出了属性分类及不同类型属性的特征分析,以及利用属性特征构造属性约简的方法等一系列成果。Zhang等[7]和Wei[8]的研究思路已成为概念格属性约简的主流模式。直至今日,很多学者的研究思想与方法都沿用文献[7-8]的分析过程,形成了深远的影响。

后来,研究人员又进行了大量的相关研究。Wang等[9]提出了保持交不可约元外延集不变的属性约简方法;Mi等[10]基于轴对称伽罗瓦连接重新考虑了概念格属性约简

到稿日期:2022-10-23 返修日期:2022-11-27
通信作者:侯锡林(Hou.xilin@163.com)

问题；Li 等[11]又提出了保持并不可约元外延集不变的属性约简方法。

而后，属性约简方法又被推广到了其他类型的形式背景中。例如，Wei 等[12]将该方法推广到决策形式背景，研究了条件属性约简问题，定义了强弱协调性，以满足不同的决策需求；Li 等[13-14]研究了在保持决策规则的决策能力不变的情况下，对各种类型的决策形式背景的条件属性进行约简的问题；Shao 等[15]研究了广义单边形式背景的属性约简；Wang 等[16-17]借助区间集概念格，给出了不完备形式背景的属性约简方法；Liu 等[18]基于面向对象概念格和面向属性概念格，通过辨识矩阵来计算形式背景的所有约简；Qin 等[19]将文献[18]进一步推广到决策形式背景中；Zou 等[20]研究了语言值概念形式背景的知识约简问题；Cornejo 等[21]研究了多伴随概念格的属性约简。不仅如此，Ren 等[22]在三支概念分析[23]的框架下，利用形式背景的对象导出概念格，研究了保持格结构、交(并)不可约元、粒概念不变的 4 种属性约简及它们之间的内在联系。

2018 年，我国学者 Wei 等更提出了一个全新的约简课题——概念约简。

概念约简是由形式概念在布尔矩阵因子分解中的巧妙应用引起的。布尔矩阵因子分解是给定一个布尔矩阵(0-1 矩阵)$\boldsymbol{W}_{n\times m}$，寻找两个布尔矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times k}$，$\boldsymbol{B}_{k\times m}$，使得$\boldsymbol{W}_{n\times m}$可表示为$\boldsymbol{A}_{n\times k}$，$\boldsymbol{B}_{k\times m}$的布尔乘积$\boldsymbol{A}_{n\times k}\circ B_{k\times m}$，且 k 尽可能小。这里$\boldsymbol{A}_{n\times k}\circ\boldsymbol{B}_{k\times m}$是按普通矩阵乘法，即其第 i 行、第 j 列的元素为$\boldsymbol{A}_{i1}\times\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\times B_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ik}\times\boldsymbol{B}_{kj}$，其中×与+是：$0\times0=0$，$1\times0=0$，$0\times1=0$，$1\times1=1$ 及 $0+0=0$，$1+0=1$，$0+1=1$，$1+1=1$。2004 年，Keprt 等发现可以用形式概念解决这个问题[24]。之后，Belohlavek 等发表的一系列文章[25-28]对其进行深入研究。他们的方法是：把矩阵$\boldsymbol{W}_{n\times m}$记作 I，则 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 就是一个形式背景，可认为其中 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$，$M=\{m_1,\cdots,m_m\}$。若 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 是它所有概念的集合，$\mathfrak{D}=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k)\}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，且满足$\bigcup_{l=1}^{k}X_l\times Y_l=I$(这里×是笛卡尔积)，则用以下方法构造的矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times k}$和$\boldsymbol{B}_{k\times m}$：

$$\boldsymbol{A}_{i,l}=\begin{cases}1, & u_i\in X_l\\0, & u_i\notin X_l\end{cases},\boldsymbol{B}_{l,j}=\begin{cases}1, & m_j\in Y_l\\0, & m_j\notin Y_l\end{cases}$$

一定满足$\boldsymbol{W}_{n\times m}=\boldsymbol{A}_{n\times k}\circ\boldsymbol{B}_{k\times m}$。例如，若：

$$\boldsymbol{W}_{4\times4}=I=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix},\mathbb{K}=(U,M,I)$$

其中，$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，$M=\{m_1,m_2,m_3,m_4\}$。

则全部概念是：

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\mathbb{K})=\{&(u_1u_2u_3u_4,\emptyset),(u_2u_3u_4,m_1),(u_1u_4,m_2),\\&(u_1u_2u_3,m_3),(u_1u_3,m_3m_4),(u_4,m_1m_2),\\&(u_2u_3,m_1m_3),(u_3,m_1m_3m_4),(u_1,m_2m_3m_4),\\&(\emptyset,m_1m_2m_3m_4)\}\end{aligned}$$

若取 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$的子集

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}=\{&(u_1,m_2m_3m_4),(u_2u_3,m_1m_3),(u_3,m_1m_3m_4),\\&(u_2u_3u_4,m_1),(u_1u_4,m_2)\}\end{aligned}$$

因 $\mathfrak{D}$ 满足：

$$\begin{aligned}\bigcup_{l=1}^{5}X_l\times Y_l&=u_1\times m_2m_3m_4\cup u_2u_3\times m_1m_3\cup u_3\times m_1m_3m_4\cup\\&\quad u_2u_3u_4\times m_1\cup u_1u_4\times m_2\\&=\{\langle u_1,m_2\rangle,\langle u_1,m_3\rangle,\langle u_1,m_4\rangle,\langle u_2,m_1\rangle,\langle u_2,\\&\quad m_3\rangle,\langle u_3,m_1\rangle,\langle u_3,m_3\rangle,\langle u_3,m_4\rangle,\langle u_4,m_1\rangle,\\&\quad\langle u_4,m_2\rangle\}=I\end{aligned}$$

(这里 $u_2u_3=\{u_2,u_3\}$，$m_1m_3=\{m_1,m_3\}$等)，所以由此得到的

$$\boldsymbol{A}_{4\times5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{5\times4}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

一定有：

$$\boldsymbol{A}_{4\times5}\circ\boldsymbol{B}_{5\times4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}=I=\boldsymbol{W}_{4\times4}$$

这里，一个关键的条件是：

$$\mathfrak{D}=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k)\}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\bigcup_{l=1}^{k}X_l\times Y_l=I$$

因此，如何寻找满足这样条件且尺寸尽量小的 $\mathfrak{D}=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k)\}$的问题就成了有重要意义的研究课题。

2018 年，我国学者 Cao 等[29]在形式概念分析中开创性地提出了一个全新的约简课题：寻找保持二元关系 I 不变的极小概念子集的约简问题，并将其称为“概念约简”问题。

Cao 等[29]给出了概念约简的定义：若 $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，$\bigcup_{(X,Y)\in\mathfrak{D}}X\times Y=I$，则称 $\mathfrak{D}$ 为“协调集”；若 $\mathfrak{D}$ 为“协调集”且对任何$(X_i,Y_i)\in\mathfrak{D}$，令 $\mathscr{D}'=\mathfrak{D}-\{(X_i,Y_i)\}$，有$\bigcup_{(X,Y)\in\mathfrak{D}'}X\times Y\neq I$，则称 $\mathfrak{D}$ 为“概念约简”。该文将出现在所有概念约简中的概念称为核心概念，将不出现在任何概念约简中的概念称为不必要概念，将既不是核心概念也不是不必要概念的概念称为相对必要概念。由于在概念约简过程中对这 3 类概念的鉴别非常重要，因此概念约简课题的研究包括两部分：1)这 3 类概念鉴别方法的研究；2)求概念约简 $\mathfrak{D}$ 的方法的研究。2020 年 Wei 等[30]从算子角度和布尔矩阵角度对这 3 类概念的鉴别方法进行了更深入的研究。他们研究了极小区间，给出了考虑这 3 类概念后，基于极小区间的概念约简的计算方法；进而研究了概念约简与布尔矩阵的秩之间的关系；证明了对于任意一个形式背景，都至少存在一个概念约简，其概念个数等于与该形式背景对应的布尔矩阵的行秩，还至少存在一个概念约简，其概念个数等于与该形式背景对应的布尔矩阵的列秩。这些研究与文献[29]的结论结合起来，就展示了从二元关系、

算子、布尔矩阵这 3 个角度研究保持二元关系不变的概念约简的一个很好的理论框架。最后还给出了 3 个有趣且具有研究价值的深入探索的问题，为进一步的研究指明了方向。2020 年，Xie 等[31]从布尔向量角度得到了 3 类概念的概念特征，进而从布尔矩阵的角度给出了 3 类概念的鉴别方法；用布尔矩阵运算实现了对象概念区间集的极小运算及属性概念区间集的极小运算；最后简化辨识矩阵，给出了基于布尔矩阵运算的概念约简的求解算法，建立了一个基于布尔向量、布尔矩阵的判定三类概念以及计算概念约简的科学的完整体系。2021 年 Wang 等[32]在形式背景上定义了一种全新的可辨识矩阵，矩阵的行和列都是形式概念，矩阵的每个元素是由属于所在行的形式概念的所有对象和属性对，但不属于所在列的形式概念的对象和属性对构成的集合。利用概念可辨识矩阵给出了三类概念的特征以及这 3 类形式概念的判断方法，给出了基于概念可辨识矩阵来判定保持二元关系不变的概念协调集的定理，并给出了基于概念可辨识矩阵寻找概念约简的步骤。2021 年 Zhou 等[33]基于形式概念矩形理论，得到了 3 类概念的新判断方法，研究了相对必要概念的最大数量和不必要概念的最大数量的边界。

本文在文献[29-33]的成果的基础上，进一步研究概念约简问题。本文的主要贡献如下：

(1)在 3 类概念的鉴别方面：研究了一种由同效关系 I_B 的行列元素个数来鉴别 3 类概念的极其简单的方法，该方法简单、直观、方便、易行、运算次数少且不同于目前的方法。

(2)在计算概念约简方面：给出了利用 I_B 的补关系的概念格来求解 I 的概念约简的一种新方法。该方法没有采用传统的合取范式析取范式转换的框架，而是提出了一种新的思路，展示了在约简课题上除使用的合取范式析取范式转换外，还有其他方法可行，这对理论与实践都有一定意义。本文给出了相应算法及相关分析，是一次有意义的尝试。

2 基本定义与原理

定义 1[2] 设 U 是对象的集合，M 是属性的集合，$I\subseteq U\times M$ 是 U 与 M 间的关系，则称$\mathbb{K}=(U,M,I)$为一个形式背景。若 $X\subseteq U$，$Y\subseteq M$，令 $X^*=\{m\in M\mid \forall u\in X:\langle u,m\rangle\in I\}$，$Y^*=\{u\in U\mid \forall m\in Y:\langle u,m\rangle\in I\}$，

若 $X^*=Y$，$Y^*=X$，则称(X,Y)是一个形式概念。X 是这个概念的外延，Y 是这个概念的内涵。$\mathbb{K}$的全部概念的集合记作 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$。

注 1 由定义 1 可看出，当且仅当$\langle u,m\rangle\in I$ 时 $m\in u^*$ 及 $u\in m^*$。

例 1 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$，I 如表 1 所列，规定$\langle u,m\rangle\in I$ 时，u 行、m 列为 1，且记作$\langle u,m\rangle=1$。$\langle u,m\rangle\notin I$ 时，u 行、m 列为 0，且记作$\langle u,m\rangle=0$。全部概念是 $C_1=(\varnothing,abcdefghi)$，$C_2=(4,acghi)$，$C_3=(3,abcgh)$，$C_4=(7,acde)$，$C_5=(6,abcdf)$，$C_6=(34,acgh)$，$C_7=(23,abgh)$，$C_8=(123,abg)$，$C_9=(36,abc)$，$C_{10}=(678,acd)$，$C_{11}=(68,acdf)$，$C_{12}=(56,abdf)$，$C_{13}=(234,agh)$，$C_{14}=(568,adf)$，$C_{15}=(1234,ag)$，$C_{16}=(34678,ac)$，$C_{17}=(12356,ab)$，$C_{18}=(5678,ad)$，$C_{19}=(12345678,a)$，这里 123 代表$\{1,2,3\}$，$ab$ 代表$\{a,b\}$等。

表 1 一个形式背景

Table 1 Formal context

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	1	1	0	0	0	1	1	0
4	1	0	1	0	0	0	1	1	1
5	1	1	0	1	0	1	0	0	0
6	1	1	1	1	0	1	0	0	0
7	1	0	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	1	1	0	1	0	0	0

引理 1[2] 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个形式背景，$X_1,X_2\subseteq U$，$Y_1,Y_2\subseteq M$，于是：

(1)$X_1\subseteq X_2$，则 $X_1^*\supseteq X_2^*$，$Y_1\subseteq Y_2$，则 $Y_1^*\supseteq Y_2^*$；

(2)$X_1\subseteq X_1^{**}$，$Y_1\subseteq Y_1^{**}$；

(3)$X_1^*=X_1^{***}$，$Y_1^*=Y_1^{***}$；

(4)$X_1\subseteq Y_1^*\Leftrightarrow Y_1\subseteq X_1^*\Leftrightarrow X_1\times Y_1\subseteq I$。

注 2 由引理 1 知$\forall X\subseteq U$，(X^{**},X^*)一定是概念，还知$\forall Y\subseteq M$，(Y^*,Y^{**})一定是概念。特别是当 X 是一个对象 u 的集合$\{u\}$时，称(u^{**},u^*)为 u 的对象概念，记作 γu。当 Y 是一个属性 m 的集合$\{m\}$时，称(m^*,m^{**})为 m 的属性概念，记作 μm。既不是对象概念也不是属性概念的概念被称为一般概念。

定义 2[2] 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个形式背景。(X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，若 $X_1\subseteq X_2$(必有 $Y_2\subseteq Y_1$)，则称(X_1,Y_1)是(X_2,Y_2)的子概念，(X_2,Y_2)是(X_1,Y_1)的父概念，记作$(X_1,Y_1)\leqslant(X_2,Y_2)$。若 $X_1\subset X_2$，则记作$(X_1,Y_1)<(X_2,Y_2)$。若$(X_1,Y_1)<(X_2,Y_2)$且不存在概念(X_3,Y_3)满足$(X_1,Y_1)<(X_3,Y_3)<(X_2,Y_2)$，则称$(X_1,Y_1)$是$(X_2,Y_2)$的直接子概念，$(X_2,Y_2)$是$(X_1,Y_1)$的直接父概念，记作$(X_1,Y_1)\prec(X_2,Y_2)$。

若 $L=\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k)\}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，且$(X_1,Y_1)\succ\cdots\succ(X_k,Y_k)$，则称 L 是从(X_1,Y_1)到(X_k,Y_k)的一条链。若 L_1，L_2 都是链，且 $L_1\supseteq L_2$，则称 L_2 是 L_1 的子链。当 $L_1\supset L_2$ 时，则称 L_2 是 L_1 的真子链。

例 2 （继续例 1）表 1 所列的形式背景的概念集合的 Hasse 图[2]如图 1 所示，其中的对象概念及属性概念如图 2 所示。一般概念有 4 个，即 C_1，C_6，C_9，C_{10}，也如图 2 所示。

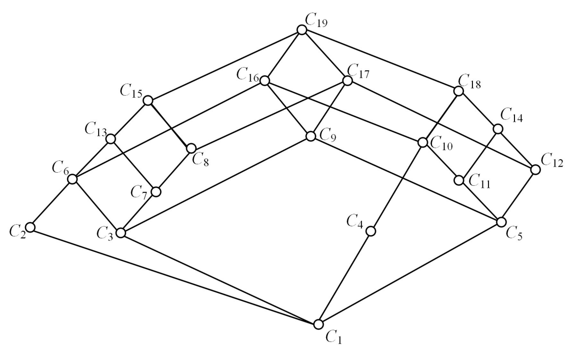


图 1 概念集合的 Hasse 图

Fig. 1 Hasse diagram of concept set

从 μa 到 $\gamma 6$ 的链 $L=\{\mu a,\mu b,\gamma 5,\gamma 6\}$如图 2 中粗实线所

示。$L_1=\{\mu b,\gamma 5\}$，则 L_1 是 L 的一条子链，而且是真子链。

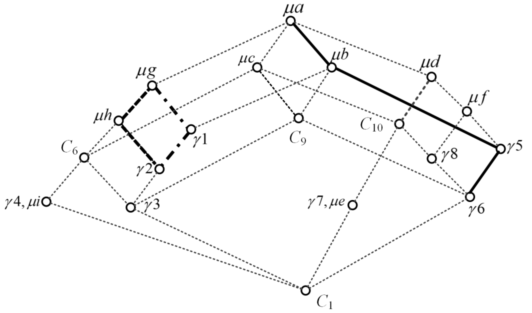


图 2 概念集合的对象概念及属性概念

Fig. 2 Object concept and attribute concept of concept set

定理 1 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 是一个形式背景。若 $\langle u,m\rangle\in I$，则存在从 μm 到 γu 的链。若 $\langle u,m\rangle\notin I$，则不存在从 μm 到 γu 的链。

证明：若 $\langle u,m\rangle\in I$，则 $m\in u^*$（见注 1），$m^*\supseteq u^{**}$（见引理 1(1)），于是 $(m^*,m^{**})\geqslant(u^{**},u^*)$，即 $\mu m\geqslant\gamma u$。于是存在（有时可能不止一组）$(X_1,Y_1),\cdots,(X_k,Y_k)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 满足 $\mu m=(X_1,Y_1)\succ\cdots\succ(X_k,Y_k)=\gamma u$，所以存在从 μm 到 γu 的链。

若 $\langle u,m\rangle\notin I$，但存在从 μm 到 γu 的链：$\mu m=(X_1,Y_1)\succ\cdots\succ(X_k,Y_k)=\gamma u$，这样就有 $\mu m\geqslant\gamma u$，即 $(m^*,m^{**})\geqslant(u^{**},u^*)$。由 $m^*\supseteq u^{**}$ 及 $u^{**}\supseteq\{u\}$（见引理 1(2)）知 $m^*\supseteq\{u\}$，即 $u\in m^*$，从而 $\langle u,m\rangle\in I$（见注 1），与 $\langle u,m\rangle\notin I$ 矛盾。所以 $\langle u,m\rangle\notin I$ 时，不存在从 μm 到 γu 的链。

为了方便起见，将从 μm 到 γu 的各条链记作 $L_k\langle m,u\rangle$，其中 $k\in T_{mu}$，T_{mu} 是索引集。

例 3（继续例 2） 对于属于 I 的元素，例如 $\langle 2,g\rangle\in I$，从图 2 可看到从 μg 到 $\gamma 2$ 有两条链：$L_1\langle g,2\rangle$ 及 $L_2\langle g,2\rangle$（见图 2 中的粗点划线及粗虚线）。对于不属于 I 的元素，例如 $\langle 2,c\rangle\notin I$，从图 2 可看到从 μc 到 $\gamma 2$ 没有链。

定义 3 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$。若 $\langle u,m\rangle\in I$，$(X,Y)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，且 $\langle u,m\rangle\in X\times Y$，则称 (X,Y) 覆盖 $\langle u,m\rangle$。若 $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，$\exists(X,Y)\in\mathfrak{D}$，$(X,Y)$ 覆盖 $\langle u,m\rangle$，则称 $\mathfrak{D}$ 覆盖 $\langle u,m\rangle$。若 $J\subseteq I$，$\mathfrak{D}$ 覆盖 J 中的所有元素，则称 $\mathfrak{D}$ 覆盖 J。若 $\mathfrak{D}$ 覆盖 J 且对任何 $(X,Y)\in\mathfrak{D}$，$\mathfrak{D}$-$\{(X,Y)\}$ 都不能覆盖 J，则称 $\mathfrak{D}$ 为 J 的无冗余覆盖。

例 4（继续例 1） $\langle 2,g\rangle\in I$，$C_8=(123,abg)$，有 $\langle 2,g\rangle\in 123\times abg$，所以 C_8 覆盖 $\langle 2,g\rangle$。

若 $\mathfrak{D}=\{C_7,C_8,C_{17}\}$，由于其中 C_8 覆盖 $\langle 2,g\rangle$，所以 $\mathfrak{D}$ 覆盖 $\langle 2,g\rangle$。

若 $J=\{\langle 1,b\rangle,\langle 5,b\rangle,\langle 3,g\rangle,\langle 3,h\rangle,\langle 2,h\rangle\}$，由于 $C_7=\{23,abgh\}$ 覆盖 $\langle 3,g\rangle,\langle 3,h\rangle,\langle 2,h\rangle$，$C_8=\{123,abg\}$ 覆盖 $\langle 1,b\rangle,\langle 3,g\rangle$，$C_{17}=\{12356,ab\}$ 覆盖 $\langle 1,b\rangle,\langle 5,b\rangle$，所以 $\mathfrak{D}$ 覆盖 $\langle 1,b\rangle,\langle 5,b\rangle,\langle 3,g\rangle,\langle 3,h\rangle,\langle 2,h\rangle$，故 $\mathfrak{D}$ 覆盖 J。

$\mathfrak{D}$ 不是 J 的无冗余覆盖，$D'=\{C_7,C_{17}\}$ 是 J 的无冗余覆盖。

定义 4 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 是一个形式背景，$\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，若 $I=\bigcup_{(X_i,Y_i)\in\mathfrak{D}}(X_i\times Y_i)$，则称 $\mathfrak{D}$ 为保持二元关系 I 不变的概念协调集（简称协调集）。对任意 $(X,Y)\in\mathfrak{D}$，令 $\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}-\{(X,Y)\}$，有 $I\neq\bigcup_{(X_i,Y_i)\in\mathfrak{D}'}(X_i\times Y_i)$，则称 $\mathfrak{D}$ 为保持二元关系 I 不变的概念约简（简称概念约简或约简）[29]。

只包含对象概念及属性概念的约简被称为基本约简，包含一般概念的约简被称为一般约简。

定理 2 设 $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$。若 $\mathfrak{D}$ 覆盖 I，则 $\mathfrak{D}$ 为协调集，若 $\mathfrak{D}$ 是 I 的无冗余覆盖，则 $\mathfrak{D}$ 为概念约简。

证明：若 $\mathfrak{D}$ 覆盖 I，则 $\mathfrak{D}$ 覆盖 I 中的所有元素，即 $\forall\langle u,m\rangle\in I$ 在 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 中都存在 (X,Y) 覆盖 $\langle u,m\rangle$，也即 $\forall\langle u,m\rangle\in I$ 在 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 中都存在 (X,Y)，使 $\langle u,m\rangle\in X\times Y$。于是 $I\subseteq\bigcup_{(X,Y)\in\mathfrak{D}}(X\times Y)$。另一方面，由引理 1(4) 知，若 (X,Y) 是概念，则 $(X\times Y)\subseteq I$，于是 $\bigcup_{(X,Y)\in\mathfrak{D}}(X\times Y)\subseteq I$。这样 $I=\bigcup_{(X,Y)\in\mathfrak{D}}(X\times Y)$。所以 $\mathfrak{D}$ 是协调集。

若 $\mathfrak{D}$ 是 I 的无冗余覆盖，则由 $\mathfrak{D}$ 是 I 的覆盖可知 $\mathfrak{D}$ 是协调集。其次由于 $\mathfrak{D}$ 是无冗余的，所以对任何 $(X,Y)\in\mathfrak{D}$，$\mathfrak{D}-\{(X,Y)\}$ 都不能覆盖 I，即对任何 $(X,Y)\in\mathfrak{D}$，$\mathfrak{D}-\{(X,Y)\}$ 都不是协调集，所以 $\mathfrak{D}$ 是概念约简。

3 同效关系

3.1 同效关系的定义

3.1.1 定义的准备工作

引理 2 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$，$(X,Y)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，$\langle u,m\rangle\in I$，当且仅当 (X,Y) 属于某条链 $L_k\langle m,u\rangle$ 时，(X,Y) 覆盖 $\langle u,m\rangle$。

证明：（当）若 $(X,Y)\in L_k\langle m,u\rangle$，则由定义 2 知 $\mu m\geqslant(X,Y)\geqslant\gamma u$，根据注 2，$\gamma u=(u^{**},u^*)$，于是 $X\supseteq u^{**}\supseteq\{u\}$（见引理 1(2)），所以 $u\in X$。对偶地，$Y\supseteq m^{**}\supseteq\{m\}$，所以 $m\in Y$。故 $\langle u,m\rangle\in X\times Y$。

（仅当）若 $\langle u,m\rangle\in X\times Y$，则 $u\in X$，$m\in Y$，于是 $X^{**}\supseteq u^{**}$（见引理 1(1)），(X,Y) 是概念，所以 $X^{**}=X$，故 $X\supseteq u^{**}$，因此 $(X,Y)\geqslant(u^{**},u^*)=\gamma u$。

另外，因 $m\in Y$，所以 $m^*\supseteq Y^*$（见引理 1(1)）。因 (X,Y) 是概念，有 $Y^*=X$，所以 $m^*\supseteq X$，于是 $(X,Y)\leqslant(m^*,m^{**})=\mu m$，所以 $\gamma u\leqslant(X,Y)\leqslant\mu m$，于是有：

$$\gamma u=(X_1,Y_1)\prec(X_2,Y_2)\prec\cdots\prec(X,Y)\prec\cdots\prec(X_t,Y_t)=\mu m$$

所以 (X,Y) 属于某个 $L_k\langle m,u\rangle$。

引理 2 说明链 $L_k\langle m,u\rangle$，$k\in T_{mu}$ 上的每个概念都覆盖 $\langle u,m\rangle$，链 $L_k\langle m,u\rangle$，$k\in T_{mu}$ 以外的概念都不覆盖 $\langle u,m\rangle$。

例 5（继续例 1） $\langle 2,g\rangle\in I$，由图 2 可看到从 μg 到 $\gamma 2$ 有 2 条链：

$L_1\langle g,2\rangle=\{\mu g,\gamma 1,\gamma 2\}$

$L_2\langle g,2\rangle=\{\mu g,\mu h,\gamma 2\}$

$L_1\langle g,2\rangle$ 与 $L_2\langle g,2\rangle$ 上的概念是：

$\mu g=(1234,ag)$，$\gamma 1=(123,abg)$，$\gamma 2=(23,abgh)$，$\mu h=(234,agh)$，显然它们都覆盖 $\langle 2,g\rangle$。

而 $L_1\langle g,2\rangle$ 与 $L_2\langle g,2\rangle$ 以外的概念，例如 $(68,acdf)$，$(3,abcgh)$，$(36,abc)$，…都不覆盖 $\langle 2,g\rangle$。

引理 3 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$，$(X,Y)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，$\langle u_1,m_1\rangle$，$\langle u_2,m_2\rangle\in I$，当每条 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$ 都是某条 $L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$ 的子链时，(X,Y) 覆盖 $\langle u_1,m_1\rangle$，就一定覆盖 $\langle u_2,m_2\rangle$。

证明：设 (X,Y) 覆盖 $\langle u_1,m_1\rangle$，由引理 2 知，存在某个 $k1\in T_{m_1u_1}$ 使 $(X,Y)\in L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$。

而 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$ 是某条 $L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$ 的子链，所以 $(X,Y)\in$

$L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$。于是再由引理 2 知，$(X,Y)$覆盖$\langle u_2,m_2\rangle$。

引理 3 说明：每条 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$都是某条 $L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$的子链时，任何概念$(X,Y)$只要覆盖$\langle u_1,m_1\rangle$，就一定覆盖$\langle u_2,m_2\rangle$，这时$\langle u_2,m_2\rangle$的覆盖问题不用单独考虑，只需考虑$\langle u_1,m_1\rangle$的覆盖问题即可。

例 6(继续例 5) $\langle 2,g\rangle$，$\langle 3,g\rangle\in I$。

从 μg 到 $\gamma 2$ 的链有 2 条：

$L_1\langle g,2\rangle=\{\mu g,\gamma 1,\gamma 2\}$

$L_2\langle g,2\rangle=\{\mu g,\mu h,\gamma 2\}$

从 μg 到 $\gamma 3$ 的链有 3 条：

$L_1\langle g,3\rangle=\{\mu g,\gamma 1,\gamma 2,\gamma 3\}$

$L_2\langle g,3\rangle=\{\mu g,\mu h,\gamma 2,\gamma 3\}$

$L_3\langle g,3\rangle=\{\mu g,\mu h,C_6,\gamma 3\}$

由于 $L_1\langle g,2\rangle$是 $L_1\langle g,3\rangle$的子链，$L_2\langle g,2\rangle$是 $L_2\langle g,3\rangle$的子链，因 $IC\langle 3,g\rangle$的覆盖问题不用单独考虑，只需考虑$\langle 2,g\rangle$的覆盖问题即可。实际检查时我们看到覆盖$\langle 2,g\rangle$的概念是：

$\mu g=(1234,ag)$，$\gamma 1=(123,abg)$，$\gamma 2=(23,abgh)$，$\mu h=(234,agh)$，它们都覆盖$\langle 3,g\rangle$。

定义 5 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$，$\langle u_1,m_1\rangle$，$\langle u_2,m_2\rangle\in I$，$\langle u_1,m_1\rangle\neq\langle u_2,m_2\rangle$，若每条 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$都是某条 $L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$的子链，则称$\langle u_2,m_2\rangle$为“$I$ 的可删元素”，简称“可删元素”。

引理 4 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是净化的($\forall u,v\in U$，$u^*=v^*\Rightarrow u=v$ 且 $\forall m,n\in M$，$m^*=n^*\Rightarrow m=n$)[2](下文只考虑净化背景)，$\langle u_2,m_2\rangle$为可删元素，当且仅当：

$\exists u_1\in U$，$u_2^*\supset u_1^*$，$m_2\in u_1^*$

或 $\exists m_1\in M$，$m_2^*\supset m_1^*$，$u_2\in m_1^*$

证明：(当) 若$\exists u_1\in U$，$u_2^*\supset u_1^*$，$m_2\in u_1^*$，首先因 $m_2\in u_1^*$，所以根据注 1 知$\langle u_1,m_2\rangle\in I$，再由引理 2 知从 μm_2 到 γu_1 有链。任取其中一条 $L_{k1}\langle m_2,u_1\rangle=\{C_i,\cdots,C_j\}$，则：

$\mu m_2=C_i\succ\cdots\succ C_j=\gamma u_1$

由于 $u_2^*\supset u_1^*$，因此$(u_2^{**},u_2^*)<(u_1^{**},u_1^*)$，即 $\gamma u_2<\gamma u_1$，所以有 $C_j,\cdots,C_k$ 满足：

$\gamma u_1=C_j\succ\cdots\succ C_k=\gamma u_2$

于是存在从 μm_2 到 γu_2 的链：

$\mu m_2=C_i\succ\cdots\succ C_j\succ\cdots\succ C_k=\gamma u_2$

$L_{k1}\langle m_2,u_1\rangle$是它的子链。再因 $u_2^*\supset u_1^*$，所以 $u_2\neq u_1$，$\langle u_2,m_2\rangle\neq\langle u_1,m_2\rangle$，所以由定义 5 知$\langle u_2,m_2\rangle$为 I 的可删元素。($\exists m_1\in M$，$m_2^*\supset m_1^*$，$u_2\in m_1^*$ 的情况对偶可证)。

(仅当) 若$\langle u_2,m_2\rangle$是可删元素，则由定义 5 知，存在$\langle u_1,m_1\rangle\in I$ 使$\langle u_1,m_1\rangle\neq\langle u_2,m_2\rangle$，设 $u_1\neq u_2$($m_1\neq m_2$ 的情况同理可证)。由定义 5 还知每条 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$都是某条 $L_{k2}\langle m_2,u_2\rangle$的子链，由这个子链关系知 $\mu m_2\geqslant\mu m_1$ 及 $\gamma u_1\geqslant\gamma u_2$，再由链 $L_{k1}\langle m_1,u_1\rangle$本身知 $\mu m_1\geqslant\gamma u_1$，于是 $\mu m_2\geqslant\mu m_1\geqslant\gamma u_1\geqslant\gamma u_2$。由 $\mu m_2\geqslant\gamma u_1$ 知$(m_2^*,m_2^{**})\geqslant(u_1^{**},u_1^*)$，所以 $m_2^{**}\subseteq u_1^*$。再因 $m_2\in m_2^{**}$(见引理 1(2))，所以 $m_2\in u_1^*$。再由 $\gamma u_1\geqslant\gamma u_2$ 知 $u_1^*\subseteq u_2^*$。因 $u_1\neq u_2$，且背景是净化的，所以 $u_1^*\subset u_2^*$，这样 $\exists u_1\in U$，$u_2^*\supset u_1^*$，$m_2\in u_1^*$。

例 7(继续例 6) 由于 $1^*\subset 2^*$，$a\in 1^*$，$b\in 1^*$，$g\in 1^*$，所以$\langle 2,a\rangle$，$\langle 2,b\rangle$，$\langle 2,g\rangle$是可删元素。由于 $h^*\subset g^*$，$2\in h^*$，$3\in h^*$，$4\in h^*$，所以$\langle 2,g\rangle$，$\langle 3,g\rangle$，$\langle 4,g\rangle$是可删元素。

3.1.2 同效关系的定义

定义 6 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$，若 I_B 是 I 中删去所有可删元素后得到的，则称 I_B 是 I 的同效关系。

例 8(继续例 1) 我们用以下方法得到 I(见表 1)的 I_B。首先令 $I_B=I$，然后在 I_B 中删各个可删元素。

由于在 I 中，$1^*\subset 2^*$，$a\in 1^*$，$b\in 1^*$，$g\in 1^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 2,a\rangle$，$\langle 2,b\rangle$，$\langle 2,g\rangle$；由于在 I 中，$2^*\subset 3^*$，$a\in 2^*$，$b\in 2^*$，$g\in 2^*$，$h\in 2^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 3,a\rangle$，$\langle 3,b\rangle$，$\langle 3,g\rangle$，$\langle 3,h\rangle$；由于在 I 中，$5^*\subset 6^*$，$a\in 5^*$，$b\in 5^*$，$d\in 5^*$，$f\in 5^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 6,a\rangle$，$\langle 6,b\rangle$，$\langle 6,d\rangle$，$\langle 6,f\rangle$；由于在 I 中，$8^*\subset 6^*$，$a\in 8^*$，$c\in 8^*$，$d\in 8^*$，$f\in 8^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 6,a\rangle$，$\langle 6,c\rangle$，$\langle 6,d\rangle$，$\langle 6,f\rangle$；由于在 I 中，$b^*\subset a^*$，$1\in b^*$，$2\in b^*$，$3\in b^*$，$5\in b^*$，$6\in b^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 1,a\rangle$，$\langle 2,a\rangle$，$\langle 3,a\rangle$，$\langle 5,a\rangle$，$\langle 6,a\rangle$；由于在 I 中，$c^*\subset a^*$，$3\in c^*$，$4\in c^*$，$6\in c^*$，$7\in c^*$，$8\in c^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 3,a\rangle$，$\langle 4,a\rangle$，$\langle 6,a\rangle$，$\langle 7,a\rangle$，$\langle 8,a\rangle$。至此 a 列元素已全部被删，所以不用再考虑哪列是 a 列的子列。由于在 I 中，$e^*\subset c^*$，$7\in e^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 7,c\rangle$；由于在 I 中，$e^*\subset d^*$，$7\in e^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 7,d\rangle$；由于在 I 中，$f^*\subset d^*$，$5\in f^*$，$6\in f^*$，$8\in f^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 5,d\rangle$，$\langle 6,d\rangle$，$\langle 8,d\rangle$；由于在 I 中，$i^*\subset h^*$，$4\in i^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 4,h\rangle$；由于在 I 中，$i^*\subset g^*$，$4\in i^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 4,g\rangle$；由于在 I 中，$h^*\subset g^*$，$2\in h^*$，$3\in h^*$，$4\in h^*$，所以在 I_B 中删去$\langle 2,g\rangle$，$\langle 3,g\rangle$，$\langle 4,g\rangle$；已再没有子集隶属关系，最后的 I_B 如表 2 所列。

表 2 同效关系 I_B

Table 2 Same effect relation I_B

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	1	0	0	0

3.2 同效关系的性质

定理 3 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$，若 I_B 是 I 的同效关系，$\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，则 $\mathfrak{D}$ 只要覆盖 I_B 就一定覆盖整个 I。

证明：设 $\mathfrak{D}$ 覆盖 I_B。任取一个$\langle u,m\rangle\in I$ 但$\langle u,m\rangle\notin I_B$ 的$\langle u,m\rangle$，现证明 $\mathfrak{D}$ 也覆盖$\langle u,m\rangle$。

因为$\langle u,m\rangle\notin I_B$，所以$\langle u,m\rangle$是可删元素，于是由引理 4 知，存在 $u_1\in U$ 满足 $u_1^*\subset u^*$ 且 $m\in u_1^*$(存在 $m_1\in M$ 满足 $m_1^*\subset m^*$ 且 $u\in m_1^*$ 的情况对偶可证)。取满足以上条件按 u_1^* 子集隶属关系最小的 u_1，即不存在 $u_2^*\subset u_1^*$ 也满足 $u_2^*\subset u^*$ 且 $m\in u_2^*$。这样取值的 u_1，不存在 $u_2^*\subset u_1^*$ 且 $m\in u_2^*$，所以$\langle u_1,m\rangle$一定是不可删元素，即$\langle u_1,m\rangle\in I_B$。设 $\mathfrak{D}$ 中是(X,Y)覆盖了$\langle u_1,m\rangle$，于是 $u_1\in X$，$m\in Y$，这样 $u_1^*\supseteq X^*$(引理 1(1))。而 $u_1^*\subset u^*$，所以 $u^*\supseteq X^*$，于是 $u^{**}\subseteq X^{**}$(见引理 1(1))。又因$\{u\}\subseteq u^{**}$(见引理 1(2))及(X,Y)是概念，$X^{**}=X$，所以$\{u\}\subseteq u^{**}\subseteq X^{**}=X$，于是 $u\in X$，$m\in Y$，所以(X,Y)覆盖$\langle u,m\rangle$。

定理 4 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$。若 I_B 是 I 的同效关系，$u\in U$，$m\in M$，则 γu 能且只能覆盖 I_B 中 u 行的每个元素，μm 能且只能覆盖 I_B 中 m 列的每个元素。

证明：设$\langle u,m_1\rangle$是 I_B 中 u 行的任一元素，当然它也是 I 中 u 行的一个元素，于是 $m_1\in u^*$(见注 1)。另外 $u\in u^{**}$(见

引理 1(2)),所以$\langle u,m_1\rangle\in u^{**}\times u^*$,因$\gamma u=(u^{**},u^*)$,所以$\gamma u$覆盖$\langle u,m_1\rangle$。由于$\langle u,m_1\rangle$是$I_B$中$u$行的任一元素,所以$\gamma u$能覆盖$I_B$中$u$行的每个元素。现设$\gamma u$还覆盖$I_B$中$u$行以外的元素$\langle u_1,m_2\rangle$。因$\gamma u=(u^{**},u^*)$,所以$u_1\in u^{**}$,$m_2\in u^*$。由$u_1\in u^{**}$得$u_1^*\supseteq u^{***}=u^*$(见引理 1(1)和(3)),所以$(u_1^{**},u_1^*)\leqslant(u^{**},u^*)$,即$\gamma u_1\leqslant\gamma u$。由$m_2\in u^*$得,$m_2^{**}\subseteq u^{***}=u^*$(见引理 1(1)和(3)),所以$(m_2^*,m_2^{**})\geqslant(u^{**},u^*)$,即$\mu m_2\geqslant\gamma u$。所以$\mu m_2\geqslant\gamma u\geqslant\gamma u_1$,每条$L_{k1}\langle m_2,u\rangle$都是某条$L_{k2}\langle m_2,u_1\rangle$的子链,且$\langle u,m_2\rangle\neq\langle u_1,m_2\rangle$。因此由定义 5 知$\langle u_1,m_2\rangle$可删,这与$\langle u_1,m_2\rangle$是$I_B$中的元素矛盾,所以$\gamma u$不能覆盖$I_B$中$u$行以外的元素($\mu m$能且只能覆盖$I_B$中$m$列的每个元素对偶可证)。

例 9(继续例 8) 由表 2 可看出,在I_B中,$\gamma 1=(123,abg)$覆盖且只覆盖 1 行的元素$\langle 1,b\rangle$及$\langle 1,g\rangle$;$\gamma 2=(23,abgh)$覆盖且只覆盖 2 行的元素$\langle 2,h\rangle$;$\gamma 3=(3,abcgh)$覆盖且只覆盖 3 行的元素$\langle 3,c\rangle$;$\mu b=(12356,ab)$覆盖且只覆盖b列的元素$\langle 1,b\rangle$及$\langle 5,b\rangle$;$\mu c=(34678,ac)$覆盖且只覆盖c列的元素$\langle 3,c\rangle$及$\langle 8,c\rangle$;$\mu e=(7,acde)$覆盖且只覆盖e列的元素$\langle 7,e\rangle$;等。

通过同效关系可以极其简便地鉴别 3 类概念。

4 3 类概念的鉴别方法

定义 7[29-30] 将出现在所有约简中的概念称为核心概念,不出现在任何约简中的概念称为不必要概念,将既不是核心概念也不是不必要概念的概念称为相对必要概念。核心概念、不必要概念、相对必要概念被统称 3 类概念。

除 3 类概念外,本文还定义了一种伪核心概念。

定义 8 若某个对象u及某个属性m满足:每个基本约简中或者有γu或者有μm,且γu与μm不同时出现在同一个基本约简中,则称$(\gamma u,\mu m)$为"伪核心概念对",称γu及μm为"伪核心概念"。

根据定理 3 及定理 4,对 3 类概念及伪核心概念,我们提出了极其简单的鉴别方法。

方法 1(1)当且仅当I_B的u行为全 0 时,γu是不必要概念。

(2)当且仅当I_B的m列为全 0 时,μm是不必要概念。

(3)当且仅当I_B的u行只有一个元素$\langle u,m\rangle=1$时,γu是伪核心概念,与μm形成伪核心概念对。

(4)当且仅当I_B的m列只有一个元素$\langle u,m\rangle=1$时,μm是伪核心概念,与γu形成伪核心概念对。

(5)$\gamma u=\mu m$是核心概念[30],则I_B的I_B行、m列都只有一个元素$\langle u,m\rangle=1$。

(6)当且仅当I_B的u行有两个或两个以上元素为 1 时,γu是相对必要概念。

(7)当且仅当I_B的m列有两个或两个以上元素为 1 时,μm是相对必要概念。

(8)当且仅当一般概念$C=(X,Y)$满足$(X\times Y)\cap I_B=\emptyset$时,$C$是不必要概念。

(9)当且仅当一般概念$C=(X,Y)$满足$(X\times Y)\cap I_B\neq\emptyset$时,$C$是相对必要概念。

(10)一般概念C不可能是核心概念。

证明:(1)若u行为全 0,则根据定理 4,γu不覆盖I_B中的任何元素,于是γu不出现在I_B的任何无冗余覆盖中。根据定理 3,γu也不出现在I的任何无冗余覆盖中。根据定理 2,γu不出现在任何约简中。

(2)对偶可证。

(3)根据定理 4,在每个基本约简中$\langle u,m\rangle$或者由γu覆盖,或者由μm覆盖,所以在每个基本约简中或者有γu或者有μm。由于u行除$\langle u,m\rangle=1$外全为 0,因此γu只覆盖$\langle u,m\rangle$,不覆盖别的元素,于是基本约简中如果γu与μm同时出现,则γu将是冗余。这样γu与μm不同时出现在同一个基本约简中,所以$(\gamma u,\mu m)$是伪核心概念对。

(4)对偶可证。

(5)因$\gamma u=\mu m$,所以$(u^{**},u^*)=(m^*,m^{**})$。由于$u\in u^{**}$(见引理 1(2)),而$u^{**}=m^*$,所以$u\in m^*$,由注 1 知$\langle u,m\rangle\in I$,$\langle u,m\rangle=1$。若$u$行还有$m_1\neq m$而$\langle u,m_1\rangle=1$,则$m_1\in u^*$(见注 1)。于是$m_1^*\supseteq u^{**}$(见引理 1(1)),但$u^{**}=m^*$,所以$m_1^*\supseteq m^*$,而$m_1\neq m$,背景是净化的,所以$m_1^*\supset m^*$。由于$u\in m^*$,因此$\langle u,m_1\rangle$是可删元素(见引理 4)。这样$I_B$中$u$行只能有一个元素$\langle u,m\rangle=1$($m$列只有一个元素$\langle u,m\rangle=1$,对偶可证)。

(6)若u行有两个或两个以上元素为 1,则γu不是不必要概念,也不是核心概念,而是相对必要概念。

(7)对偶可证。

(8)若$(X\times Y)\cap I_B=\emptyset$,则$C$不覆盖$I_B$中的任何元素,于是$C$不出现在$I_B$的任何无冗余覆盖中。根据定理 3,$C$也不出现在$I$的任何无冗余覆盖中。根据定理 2,$C$不出现在任何约简中。

(9)若$(X\times Y)\cap I_B\neq\emptyset$,则$C$不是不必要概念。另外由下面的(10)知,$C$也不可能是核心概念,所以是相对必要概念。

(10)根据定理 4,$\{\gamma u|u\in U\}$将覆盖I_B的每一行,从而覆盖整个I_B。根据定理 3,$\{\gamma u|u\in U\}$也将覆盖整个I。于是根据定理 2,$\{\gamma u|u\in U\}$是协调集。这样它或它的子集将是概念约简,所以存在完全由对象概念组成的概念约简,这样一般概念C不可能出现在所有概念约简中,不可能是核心概念。

例 10(继续例 1 及例 8) 在例 8 中,我们从I(见表 1)得到I_B(见表 2)。由I_B可看出:

(1)6 行为全 0,所以$\gamma 6$是不必要概念。

(2)a列和d列为全 0,所以μa及μd是不必要概念。

(3)2 行只有 1 个元素$\langle 2,h\rangle=1$,所以$\gamma 2$是伪核心概念,与μh组成伪核心概念对$(\gamma 2,\mu h)$;3 行只有 1 个元素$\langle 3,c\rangle=1$,所以$\gamma 3$是伪核心概念,与μc组成伪核心概念对$(\gamma 3,\mu c)$;4 行只有 1 个元素$\langle 4,i\rangle=1$,所以$\gamma 4$是伪核心概念,与μi组成伪核心概念对$(\gamma 4,\mu i)$;7 行只有 1 个元素$\langle 7,e\rangle=1$,所以$\gamma 7$是伪核心概念,与μe组成伪核心概念对$(\gamma 7,\mu e)$。

(4)e列只有 1 个元素$\langle 7,e\rangle=1$,所以μe是伪核心概念,与$\gamma 7$组成伪核心概念对$(\gamma 7,\mu e)$;g列只有 1 个元素$\langle 1,g\rangle=1$,所以μg是伪核心概念,与$\gamma 1$组成伪核心概念对$(\gamma 1,\mu g)$;h列只有 1 个元素$\langle 2,h\rangle=1$,所以μh是伪核心概念,与$\gamma 2$组成伪核心概念对$(\gamma 2,\mu h)$ i列只有 1 个元素$\langle 4,i\rangle=1$,所以μi是伪核心概念,与$\gamma 4$组成伪核心概念对$(\gamma 4,\mu i)$。

(5)2 行、h列分别只有一个元素$\langle 2,h\rangle=1$;4 行、i列分别只有一个元素$\langle 4,i\rangle=1$;7 行、e列分别只有一个元素$\langle 7,e\rangle=1$。核心概念只能在这三者之中。$2^*\neq h^{**}$,$\gamma 2$,μh不是核心概念;$4^*=i^{**}$,$\gamma 4=\mu i$是核心概念;$7^*=e^{**}$,$\gamma 7=\mu e$是核心

概念。这大大缩小了用 $u^*=m^{**}$ 查找核心概念的搜寻范围。

(6)1 行、5 行、8 行有两个或两个以上元素为 1，所以 $\gamma1$，$\gamma5$，$\gamma8$ 是相对必要概念。

(7)b 列、c 列、f 列有两个或两个以上元素为 1，所以 μb，μc，μf 是相对必要概念。

(8)$C_6=(34,acgh)$，$C_9=(36,abc)$ 与 $C_{10}=(678,acd)$ 是一般概念(见例 1 及图 2)

$34\times acgh\cap I_B\neq\emptyset$

$36\times abc\cap I_B\neq\emptyset$

$678\times acd\cap I_B\neq\emptyset$

所以它们都是相对必要概念。

本例中一般概念都不是不必要概念，但有一般概念是不必要概念的情况，具体见下例。

例 11　I 如表 3 所例，I_B 如表 4 所列。

表 3　例 11 的形式背景

Table 3　Formal context of example 11

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	1	1	1
4	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1

表 4　例 11 的同效关系 I_B

Table 4　Same effect relation I_B of example 11

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

其所有概念是：

$C_1=(\emptyset,abcde)$，$C_2=(3,bcde)$，$C_3=(5,acde)$，$C_4=(4,abde)$，$C_5=(35,cde)$，$C_6=(34,bde)$，$C_7=(45,ade)$，$C_8=(25,acd)$，$C_9=(345,de)$，$C_{10}=(145,ae)$，$C_{11}=(235,cd)$，$C_{12}=(245,ad)$，$C_{13}=(1345,e)$，$C_{14}=(2345,d)$，$C_{15}=(1245,a)$，$C_{16}=(12345,\emptyset)$。其中一般概念 $C_7=(45,ade)$ 满足 $(45\times ade)\cap I_B=\emptyset$，是不必要概念。一般概念 $C_9=(345,de)$ 满足 $(345\times de)\cap I_B=\emptyset$，也是不必要概念。可验证，它们将不出现在任何约简中。

本文的约简方法不需要用到极小区间，但同效关系 I_B 简单地提供了极小区间，我们提出了以下方法。

方法 2　$I_{um}=[\gamma u,\mu m]$ 是极小区间，当且仅当 $\langle u,m\rangle\in I_B$ (关于极小区间的定义请参考文献[29-32])。

证明：若 $\langle u,m\rangle\in I$，而 I_{um} 不是极小区间，则存在 $\langle v,n\rangle\in I$，有 $I_{vn}\subset I_{um}$，即 $[\gamma v,\mu n]\subset[\gamma u,\mu m]$，也即 $[(v^{**},v^*),(n^*,n^{**})]\subset[(u^{**},u^*),(m^*,m^{**})]$，于是 $(u^{**},u^*)\leqslant(v^{**},v^*)$ 及 $(n^*,n^{**})\leqslant(m^*,m^{**})$，且至少有一个是 $<$。若是 $(u^{**},u^*)<(v^{**},v^*)$，则 $u^*\supset v^*$。另外由 $n^{**}\supseteq m^{**}$ 及 $m\in m^{**}$ (见引理 1(2))知 $m\in n^{**}$。再因 $[(v^{**},v^*),(n^*,n^{**})]$ 是区间，所以 $(v^{**},v^*)\leqslant(n^*,n^{**})$，所以 $v^*\supseteq n^{**}$。由此 $m\in v^*$。这样由 $u^*\supset v^*$ 及 $m\in v^*$ 根据引理 4 知 $\langle u,m\rangle$ 是可删元素。

同理，若是 $(n^*,n^{**})<(m^*,m^{**})$，也能得出 $\langle u,m\rangle$ 是可删元素。这样只要 I_{um} 不是极小区间，存在 $I_{vn}\subset I_{um}$，则 $\langle u,m\rangle$ 就是可删元素，所以根据定义 6，删掉所有可删元素后，每个 $\langle u,m\rangle\in I_B$，$I_{um}=[\gamma u,\mu m]$ 都是极小区间。

例 12(继续例 1)　由 I_B (见表 2)可以看出，有 10 个极小区间：$[\gamma1,\mu b]$，$[\gamma5,\mu b]$，$[\gamma3,\mu c]$，$[\gamma8,\mu c]$，$[\gamma7,\mu e]$，$[\gamma5,\mu f]$，$[\gamma8,\mu f]$，$[\gamma1,\mu g]$，$[\gamma2,\mu h]$，$[\gamma4,\mu i]$。其中 $[\gamma7,\mu e]$，$[\gamma4,\mu i]$，因 $\gamma7=\mu e$，$\gamma4=\mu i$，所以它们将退化为一个概念。

5　现有 3 类概念及极小区间判定法比较

本文只利用背景 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 中的 I 及判定子集的运算，即可求出一个 I_B (见例 8)。而由 I_B 即能得到不必要概念、核心概念、相对必要概念及极小区间(见方法 1 及方法 2)。这与其他方法的具体对比如下。

(1)文献[31]着重于细致、严格的矩阵运算，因此判定方法需要计算以下 29 个矩阵：对象关系矩阵 $\boldsymbol{M}$、属性关系矩阵 $\boldsymbol{N}$、对象概念线性组合矩阵 $\boldsymbol{S}$、属性概念线性组合矩阵 $\boldsymbol{T}$、对象不必要概念特征矩阵 $\boldsymbol{S}_d$、属性不必要概念特征矩阵 $\boldsymbol{T}_d$、对象不必要概念特征复制矩阵 $\boldsymbol{S}_c$、属性不必要概念特征复制矩阵 $\boldsymbol{T}_c$、对象概念可线性表示系数矩阵 $\boldsymbol{S}_I$、属性概念可线性表示系数矩阵 $\boldsymbol{T}_I$、对象核心概念判定矩阵 $\boldsymbol{H}$、属性核心概念判定矩阵 $\boldsymbol{L}$、对象核心概念特征矩阵 $\boldsymbol{H}_d$、属性核心概念特征矩阵 $\boldsymbol{L}_d$、对象相对必要概念特征矩阵 $\boldsymbol{O}_d$、属性相对必要概念特征矩阵 $\boldsymbol{A}_d$、对象概念区间简化矩阵 $\boldsymbol{K}$、属性概念区间简化矩阵 $\boldsymbol{R}$、对象复制矩阵 $\boldsymbol{C}^j$、属性复制矩阵 $\boldsymbol{C}_i$、对象概念区间极小运算矩阵 $\boldsymbol{C}^j_{\mathrm{del}}$、属性概念区间极小运算矩阵 $\boldsymbol{C}_{i\ \mathrm{del}}$、概念辨别矩阵 $\boldsymbol{D}$ 以及 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{W}_u$,$\boldsymbol{V}_u$。而本文只需要计算一个 I_B 即可。

(2)文献[32]着重于对一种可辨识矩阵 $\mathfrak{D}$ 的研究，创新且富有意义。但计算可辨识矩阵 $\mathfrak{D}$ 不仅需要背景中的 I，还需要概念格。本文计算 I_B 只需要 I，不需要概念格。另外文献[32]在判定不必要概念时，如果 $\bigcap_{\mathbb{C}\in C}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)\neq\emptyset$，就要使用定理 9，而定理 9 要判定：$\forall(g,m)\in\bigcap_{\mathbb{C}\in C}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$ 都有 $|\varepsilon_{(g,m)}|\geqslant3$ 且 $\exists\,\varepsilon\subset\varepsilon_{(g,m)}$，使得 $\varepsilon=\varepsilon_{(g_1,m_1)}$，$(g_1,m_1)\in Y$，在理论上意义巨大，但计算工作量也非常大。这样的情况很常见，例如表 5 所列的背景中，有 $C=\{(12,abdf)\}$，除 $(\emptyset,abcdef)$ 外，所有概念都有 $\bigcap_{\mathbb{C}\in C}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)\neq\emptyset$，都要使用定理 9 中的运算。再如表 6 所例的背景，没有核心概念，所有概念都要使用定理 9 中的运算。而本文只根据 I_B 行全 0 或列全 0 即可得到各个不必要概念。

表 5　计算工作量大的形式背景

Table 5　Computationally heavy formal context

	a	b	c	d	e	f
1	1	1	0	1	0	1
2	1	1	1	1	0	1
3	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	1	1	0	1
6	0	1	1	1	1	1

表 6　另一个计算工作量大的形式背景

Table 6　Another formal context that is computationally heavy

	a	b	c	d
1	0	1	0	1
2	1	0	0	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0
5	0	1	1	1

(3)文献[29-30]的方法是国内外第一个概念约简的方法,该方法全面、准确、严格。由于该方法不需要一般概念是否是不必要概念的判定,所以该方法中不包括一般概念是否是不必要概念的判定。本文考虑了这方面的判定。

(4)文献[33]着重于深入、精准地研究矩形理论及集合覆盖理论。但其判定方法同样需要背景中的 I 和概念格。另外该方法在计算核心概念时要检查所有概念的覆盖,在计算不必要概念时,要对很多核心概念及边缘覆盖概念的覆盖情况进行检查。而本文只需要背景中的 I,不需要使用概念格,只需用几次判定子集的运算。

(5)实验对比

本文使用 Matlab 随机生成的数据。实验配置为:Intel(R) CPU G1840@2.80GHz,4.00GB 内存,NVIDIA GeForce GT 610 显卡。第一批 12 组数据的比较如图 3 所示,第二批 12 组数据的比较如图 4 所示。

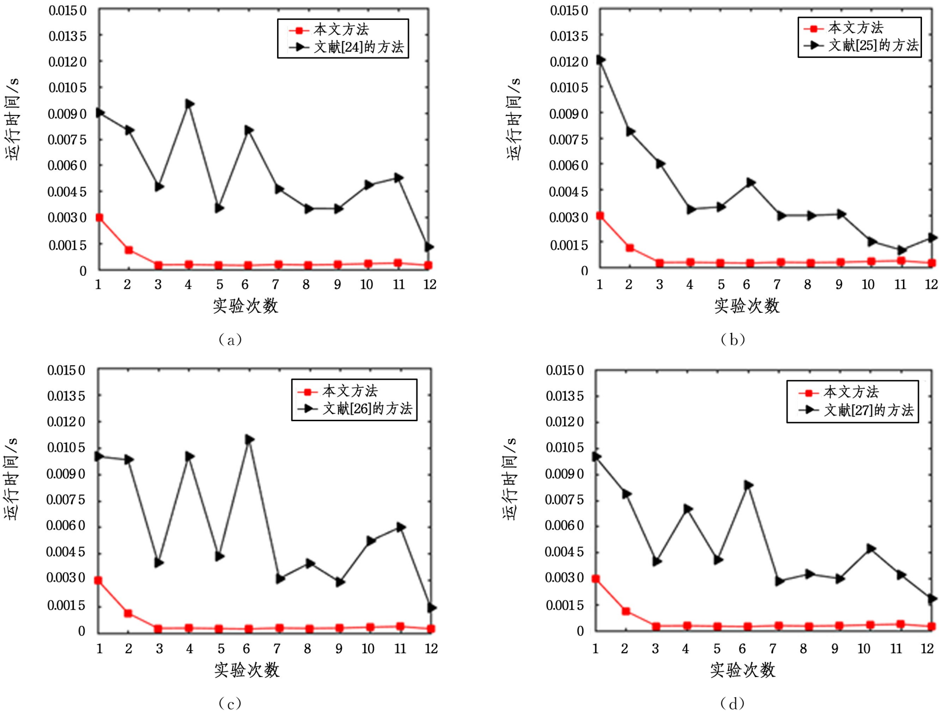


图 3 运行时间比较(1)

Fig.3 Comparison of running time(1)

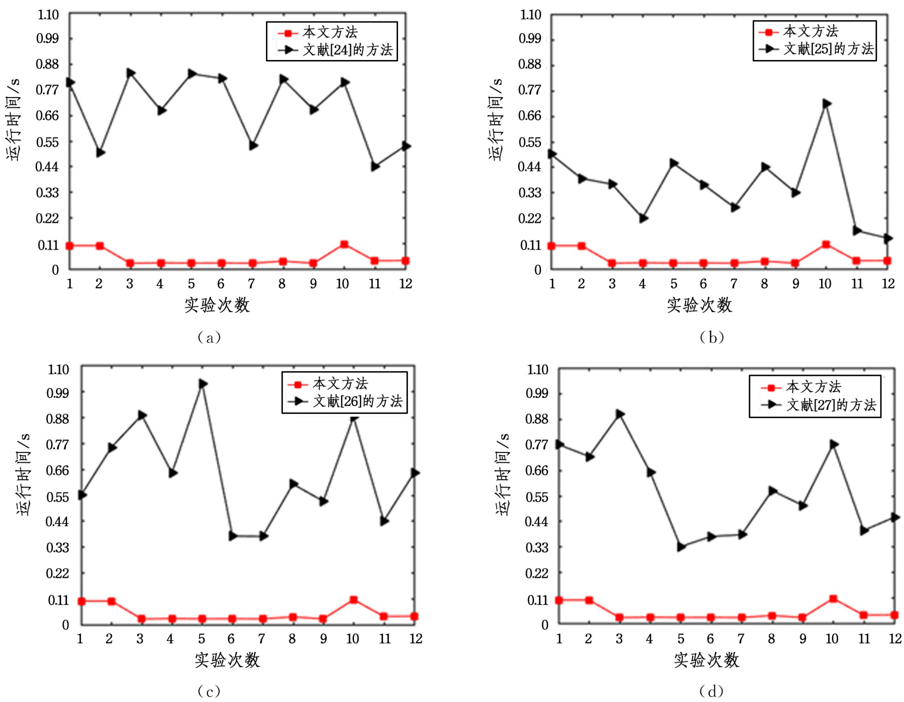


图 4 运行时间比较(2)

Fig 4 Comparison of running time(2)

6 概念约简的方法

6.1 基本约简的计算方法

由定理 2 及定理 3 知，I_B 的无冗余覆盖就是概念约简。

根据方法 1(1)、(2)知，在 I_B 中不必要概念 $\gamma u(\mu m)$ 的 u 行（m 列）为全 0，所以考虑 I_B 无冗余覆盖时可删掉 u 行（m 列）。由方法 1(5)知，核心概念 $\gamma v = \mu n$ 对应的 v 行、n 列，都只有一个元素 $\langle v, n\rangle = 1$，所以考虑 I_B 的无冗余覆盖时可先删掉 v 行、n 列，研究 I_B 剩余子集的无冗余覆盖。最后，在这个无冗余覆盖的基础上添上 $\gamma v, \mu n$ 之一，用于覆盖 $\langle v, n\rangle$，就是 I_B 的无冗余覆盖了。这样做可以减少计算工作量。因此下面我们考虑的是删除不必要概念和核心概念对应的行列后的 I_B 子集 J 的无冗余覆盖。

定义 9 设 $\mathbb{K} = (U, M, I)$，$X \subseteq U$，$Y \subseteq M$，对于 $J \subseteq I_B$，令：$J_O = \{u \mid \langle u, m\rangle \in J\}$，$J_A = \{m \mid \langle u, m\rangle \in J\}$，$\sim X = J_O - X$，$\sim Y = J_A - Y$，$K_J = (J_O, J_A, J)$，$J^C = \{\langle u, m\rangle \in I_B \mid \langle u, m\rangle \notin J\}$，$K_{J^C} = (J_O, J_A, J^C)$。

定理 5 设 $\mathbb{K} = (U, M, I)$，$J \subseteq I_B$，$\mathfrak{D} = \{\gamma u_1, \cdots \gamma u_P, \mu m_1, \cdots, \mu m_Q\}$。令 $\mathfrak{D}_O = \{u_1, \cdots, u_P\}$，$\mathfrak{D}_A = \{m_1, \cdots, m_Q\}$，则当且仅当 $(\sim \mathfrak{D}_O, \sim \mathfrak{D}_A)$ 是 K_{J^C} 的一个概念时，$\mathfrak{D}$ 是 J 的无冗余覆盖。

证明：(仅当)设 $\mathfrak{D}$ 是 J 的无冗余覆盖。因 $J \subseteq I_B$，所以根据定理 4 知，$\gamma u_1, \cdots, \gamma u_P$ 覆盖且只覆盖了 J 中的 $u_1, \cdots, u_P$ 行的元素，即 $\mathfrak{D}_O$ 行的元素，于是 J 中 $\sim \mathfrak{D}_O$ 行的元素是由 $\mu m_1, \cdots, \mu m_Q$ 覆盖的。再根据定理 4 知 $\mu m_1, \cdots, \mu m_Q$ 覆盖且只覆盖了 J 中 $m_1, \cdots, m_Q$ 列的元素，即 $\mathfrak{D}_A$ 列的元素。若 $u \in \sim \mathfrak{D}_O$，$\langle u, m\rangle$ 是 J 中 u 行的一个元素，因 $\langle u, m\rangle \in J$，所以 $m \in u^{*J}$（见注 1）。然而 $\mu m_1, \cdots, \mu m_Q$ 只覆盖 J 中 $\mathfrak{D}_A$ 列的元素，所以 $\langle u, m\rangle$ 必是 $\mathfrak{D}_A$ 中某列的元素，故 $m \in D_A$。因 $m \in u^{*J}$ 就有 $m \in \mathfrak{D}_A$，所以 $u^{*J} \subseteq \mathfrak{D}_A$，于是 $\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J} \subseteq \mathfrak{D}_A$。现证明不可能是 $\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J} \subset \mathfrak{D}_A$，只能是 $\bigcup_{u \in \sim D_O} u^{*J} = Y\mathfrak{D}_A$。反证法，若 $\bigcup_{u \in \sim D_O} u^{*J} \subset \mathfrak{D}_A$，则存在 $m \in \mathfrak{D}_A$，$m \notin \bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J}$，于是 $\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J} \subseteq D_A - \{m\}$。这意味着 $\mathfrak{D}_A - \{m\}$ 列就已包括了 $\sim \mathfrak{D}_O$ 行的所有元素：$\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J}$。这样 $\mathfrak{D}_O$ 对应的对象概念与 $\mathfrak{D}_A - \{m\}$ 对应的属性概念就已经覆盖了 J，即 $\mathfrak{D} - \{\mu m\}$ 已经覆盖了 J，这与 $\mathfrak{D}$ 是 J 的无冗余覆盖矛盾。因此 $\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J} = \mathfrak{D}_A$。于是 $\sim \mathfrak{D}_A = \sim (\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u^{*J}) = \bigcap_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} (\sim u^{*J}) = \bigcap_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} (u^{*J^C}) = (\bigcup_{u \in \sim \mathfrak{D}_O} u)^{*J^C} = (\sim \mathfrak{D}_O)^{*J^C}$。对偶的可以先考虑列，$\mu m_1, \cdots, \mu m_Q$ 覆盖且只覆盖了 J 中的 $m_1, \cdots, m_Q$ 列的元素，即 $\mathfrak{D}_A$ 列的元素，于是 $\sim \mathfrak{D}_A$ 列的元素由 $\gamma u_1, \cdots \gamma u_P$ 来覆盖。与上面对偶的推导，将得到 $\sim \mathfrak{D}_O = (\sim \mathfrak{D}_A)^{*J^C}$。

这样 $\sim \mathfrak{D}_O = (\sim \mathfrak{D}_A)^{*J^C}$，$\sim \mathfrak{D}_A = (\sim \mathfrak{D}_O)^{*J^C}$，因此 $(\sim \mathfrak{D}_O, \sim D_A)$ 是 $\mathbb{K}_{J^C}$ 的一个概念。

(当)反之若 $(\sim X, \sim Y)$ 是 $\mathbb{K}_{J^C}$ 的一个概念，则 $\sim X = (\sim Y)^{*J^C}$ 及 $\sim Y = (\sim X)^{*J^C}$。由于 $\sim X = (\sim Y)^{*J^C} = \bigcap_{m \in \sim Y} m^{*J^C} = \bigcap_{m \in \sim Y} (\sim m^{*J}) = \sim \bigcup_{m \in \sim Y} m^{*J}$，即 $X = \bigcup_{m \in \sim Y} m^{*J}$，这说明没被 $\{\mu m \mid m \in Y\}$ 覆盖的列 $(m \in \sim Y)$ 上面的元素所涉及到的行 m^{*J} 的全体 $\bigcup_{m \in \sim Y} m^{*J}$ 正好是 X，于是 $\{\gamma u \mid u \in X\}$ 及 $\{\mu m \mid m \in Y\}$ 合在一起正好形成了 J 的覆盖。而且由定理 4 知这个覆盖一定是无冗余覆盖（也可对偶利用 $\sim Y = (\sim X)^{*J^C}$ 来证明）。

例 13（继续例 8） 求背景 $\mathbb{K} = (U, M, I)$（见表 1）的基本约简。

在 I_B 中 6 行、a 列、d 列为全 0（知 $\gamma 6$，μa，μd 为不必要概念），删掉 I_B 中的 6 行、a 列、d 列；根据某 u 行及某 m 列，只有一个元素 $\langle u, m\rangle = 1$，并检查是否有 $u^* = m^{**}$，知 $\gamma 7 = \mu e$，$\gamma 4 = \mu i$ 是核心概念。删掉 I_B 中的 7 行与 e 列，4 行与 i 列后，将得到的结果记作 J，如表 7 所列，其补关系 J^C 如表 8 所列。由此得到的 J^C 的概念如表 9 第 2 列"K_{J^C} 的概念"所示，求补如表 9 第 3 列所示，改成对象概念及属性概念如表 9 第 4 列所示。根据定理 5，它们是 J 的所有无冗余覆盖。再根据方法 1(5)所述的核心概念的性质知，添加核心概念就会将都是 I_B 的无冗余覆盖。如表 9 第 5 列所示。再由定理 3 知这些都是 I 的无冗余覆盖，再由定理 2 知它们都是概念约简。由于这些约简都由对象概念与属性概念组成，所以都是基本约简。

表 7 由 I_B 得到的 J

Table 7 J getted from I_B

	b	c	f	g	h
1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0
8	0	1	1	0	0

表 8 由 J 得到的 J^C

Table 8 J^C getted from J

	b	c	f	g	h
1	0	1	1	0	1
2	1	1	1	1	0
3	1	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1
8	1	0	0	1	1

表 9 基本约简（仅由对象概念与属性概念组成的概念约简）

Table 9 Basic reduction(concept reduction consisting only of object concepts and attribute concepts)

	$\mathbb{K}_{J^C}$ 的概念	求补	改成对象概念，属性概念	添加核心概念后概念约简的最终结果
1	$(12358, \emptyset)$	$\emptyset, bcfgh$	$\{\mu b, \mu c, \mu f, \mu g, \mu h\}$	$\{\mu b, \mu c, \mu f, \mu g, \mu h, \mu e, \mu i\}$
2	$(125, c)$	$38, bfgh$	$\{\gamma 3, \gamma 8, \mu b, \mu f, \mu g, \mu h\}$	$\{\gamma 3, \gamma 8, \mu b, \mu f, \mu g, \mu h, \mu e, \mu i\}$
3	$(123, f)$	$58, bcgh$	$\{\gamma 5, \gamma 8, \mu b, \mu c, \mu g, \mu h\}$	$\{\gamma 5, \gamma 8, \mu b, \mu c, \mu g, \mu h, \mu e, \mu i\}$
4	$(12, cf)$	$358, bgh$	$\{\gamma 3, \gamma 5, \gamma 8, \mu b, \mu g, \mu h\}$	$\{\gamma 3, \gamma 5, \gamma 8, \mu b, \mu g, \mu h, \mu e, \mu i\}$
5	$(2358, g)$	$1, bcfh$	$\{\gamma 1, \mu b, \mu c, \mu f, \mu h\}$	$\{\gamma 1, \mu b, \mu c, \mu f, \mu h, \mu e, \mu i\}$
6	$(238, bg)$	$15, cfh$	$\{\gamma 1, \gamma 5, \mu c, \mu f, \mu h\}$	$\{\gamma 1, \gamma 5, \mu c, \mu f, \mu h, \mu e, \mu i\}$
7	$(25, cg)$	$138, bfh$	$\{\gamma 1, \gamma 3, \gamma 8, \mu b, \mu f, \mu h\}$	$\{\gamma 1, \gamma 3, \gamma 8, \mu b, \mu f, \mu h, \mu e, \mu i\}$
8	$(23, bfg)$	$158, ch$	$\{\gamma 1, \gamma 5, \gamma 8, \mu c, \mu h\}$	$\{\gamma 1, \gamma 5, \gamma 8, \mu c, \mu h, \mu e, \mu i\}$
9	$(2, bcfg)$	$1358, h$	$\{\gamma 1, \gamma 3, \gamma 5, \gamma 8, \mu h\}$	$\{\gamma 1, \gamma 3, \gamma 5, \gamma 8, \mu h, \mu e, \mu i\}$

（续表）

	$\mathbb{K}_J{}^C$的概念	求补	改成对象概念，属性概念	添加核心概念后概念约简的最终结果
10	$(1358,h)$	$2,bcfg$	$\{\gamma2,\mu b,\mu c,\mu f,\mu g\}$	$\{\gamma2,\mu b,\mu c,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\}$
11	$(15,ch)$	$238,bfg$	$\{\gamma2,\gamma3,\gamma8,\mu b,\mu f,\mu g\}$	$\{\gamma2,\gamma3,\gamma8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\}$
12	$(13,fh)$	$258,bcg$	$\{\gamma2,\gamma5,\gamma8,\mu b,\mu c,\mu g\}$	$\{\gamma2,\gamma5,\gamma8,\mu b,\mu c,\mu g,\mu e,\mu i\}$
13	$(1,cfh)$	$2358,bg$	$\{\gamma2,\gamma3,\gamma5,\gamma8,\mu b,\mu g\}$	$\{\gamma2,\gamma3,\gamma5,\gamma8,\mu b,\mu g,\mu e,\mu i\}$
14	$(358,gh)$	$12,bcf$	$\{\gamma1,\gamma2,\mu b,\mu c,\mu f\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\mu b,\mu c,\mu f,\mu e,\mu i\}$
15	$(38,bgh)$	$125,cf$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\mu c,\mu f\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\mu c,\mu f,\mu e,\mu i\}$
16	$(5,cgh)$	$1238,bf$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma3,\gamma8,\mu b,\mu f\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma3,\gamma8,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\}$
17	$(3,bfgh)$	$1258,c$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\gamma8,\mu c\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\gamma8,\mu c,\mu e,\mu i\}$
18	$(\varnothing,bcfgh)$	$12358,\varnothing$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma3,\gamma5,\gamma8\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma3,\gamma5,\gamma8,\mu e,\mu i\}$

6.2 一般约简的计算方法

对于含有一个指定一般概念子集的一般概念约简，我们提出了以下定理：

定理6 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$，$J\subseteq I_B$，$\mathfrak{D}^0\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$，$\mathfrak{D}^0$无冗余覆盖了$J$中的$J^0$，且不覆盖$J-J^0$中的元素。则当且仅当$(\sim\mathfrak{D}_O,\sim\mathfrak{D}_A)$是$\mathbb{K}_{(J-J^0)^C}$的一个概念，且$\mathfrak{D}^0$中的每个概念$(A,B)$都满足，$((A\times B)\cap J)_O\subseteq\mathfrak{D}_O$及$((A\times B)\cap J)_A\subseteq\mathfrak{D}_A$时，$\mathfrak{D}^0\cup\mathfrak{D}$是$J$的一个无冗余覆盖。这里：

$$((A\times B)\cap J)_O=\{u\mid\langle u,m\rangle\in(A\times B)\cap J\}$$

$$((A\times B)\cap J)_A=\{m\mid\langle u,m\rangle\in(A\times B)\cap J\}$$

证明：(1)因$(\sim\mathfrak{D}_O,\sim\mathfrak{D}_A)$是$\mathbb{K}_{(J-J^0)^C}$的一个概念，所以根据定理5，$\mathfrak{D}$无冗余覆盖$J-J^0$。

(2)$\mathfrak{D}^0$无冗余覆盖J^0(原始条件)。

(3)$\mathfrak{D}^0$不覆盖$J-J^0$中的元素(原始条件)。

(4)虽然$\mathfrak{D}$可能覆盖J^0的某些元素，但因$((A\times B)\cap J)_O\subseteq\mathfrak{D}_O$，$((A\times B)\cap J)_A\subseteq\mathfrak{D}_A$，对所有$\mathfrak{D}^0$中的$(A,B)$成立，所以对于每个$(A,B)\in\mathfrak{D}^0$，总有$u\in((A\times B)\cap J)_O$但$u\notin\mathfrak{D}_O$及$m\in((A\times B)\cap J)_A$，$m\notin\mathfrak{D}_A$，即总有$\langle u,m\rangle\in J$，满足$\langle u,m\rangle\in(A\times B)$但$\langle u,m\rangle\notin(\mathfrak{D}_O\times D_A)$，也即总有$\langle u,m\rangle\in J$被$(A,B)$覆盖，但不被$\mathfrak{D}$覆盖，所以每个$(A,B)\in\mathfrak{D}^0$仍是不可缺少的，不是冗余的。综上可知，$\mathfrak{D}\cup\mathfrak{D}^0$无冗余覆盖$J$。

由定理6我们容易求出包含某些指定一般概念的一般概念约简。

例14(继续例10) 包含C_6，C_{10}的概念约简。$\mathfrak{D}^0=\{C_6,C_{10}\}$。$C_6=(34,acgh)$，$C_{10}=(678,acd)$覆盖了$J$中的$J^0=\{\langle3,c\rangle,\langle8,c\rangle\}$，且不覆盖$J-J^0$中的元素。对$\forall(A,B)\in\mathfrak{D}^0$，即$C_6$及$C_{10}$，计算$((A\times B)\cap J)_O$及$((A\times B)\cap J)_A$：

$((34\times acgh)\cap J)_O=\{3\}$

$((34\times acgh)\cap J)_A=\{c\}$

$((678\times acd)\cap J)_O=\{8\}$

$((678\times acd)\cap J)_A=\{c\}$

$J-J^0$如表10所列，$(J-J^0)^C$如表11所列。

表10 $J-J^0$的全部元素

Table 10 All elements of $J-J^0$

	b	c	f	g	h
1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0
8	0	0	1	0	0

表11 $(J-J^0)^C$的全部元素

Table 11 All elements of $(J-J^0)^C$

	b	c	f	g	h
1	0	1	1	0	1
2	1	1	1	1	0
3	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	1
8	1	1	0	1	1

$(J-J^0)^C$的概念如表12第2列所示，求补如表12第3列所示，将其中不是$\{3\}$或$\{c\}$或$\{8\}$超集的改成对象概念及属性概念如表12第4列所示。

根据定理6添加$\mathfrak{D}^0=\{C_6,C_{10}\}$后它们都是$J$的无冗余覆盖。再根据方法1(5)显示的核心概念的性质知，添加上核心概念就将都是I_B的无冗余覆盖，如表12第5列所示。再由定理3知这些也都是I的无冗余覆盖。再由定理2知些这都是概念约简，都是包含C_6，C_{10}的概念约简。

表12 包含指定概念C_6和C_{10}的概念约简

Table 12 Concept reduction contains the specified concept C_6 and C_{10}

	$(J-J_0)^C$的概念	求补	改成对象概念、属性概念	添加C_6和C_{10}及核心概念后概念约简的最终结果
1	$(12358,c)$	$\varnothing,bfgh$	$\{\mu b,\mu f,\mu g,\mu h\}$	$\{\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
2	$(123,cf)$	$58,bgh$	$\{5,8\}$是$\{8\}$的超集	
3	$(2358,cg)$	$1,bfh$	$\{\gamma1,\mu b,\mu f,\mu h\}$	$\{\gamma1,\mu b,\mu f,\mu h,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
4	$(238,bcg)$	$15,fh$	$\{\gamma1,\gamma5,\mu f,\mu h\}$	$\{\gamma1,\gamma5,\mu f,\mu h,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
5	$(23,bcfg)$	$158,h$	$\{1,5,8\}$是$\{8\}$的超集	
6	$(1358,ch)$	$2,bfg$	$\{\gamma2,\mu b,\mu f,\mu g\}$	$\{\gamma2,\mu b,\mu f,\mu g,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
7	$(13,cfh)$	$258,bg$	$\{2,5,8\}$是$\{8\}$的超集	
8	$(358,cgh)$	$12,bf$	$\{\gamma1,\gamma2,\mu b,\mu f\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\mu b,\mu f,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
9	$(38,bcgh)$	$125,f$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\mu f\}$	$\{\gamma1,\gamma2,\gamma5,\mu f,c_6,c_{10},\mu e,\mu i\}$
10	$(3,bcfgh)$	$1258,\varnothing$	$\{1,2,5,8\}$是$\{8\}$的超集	

计算$\mathbb{K}=(U,M,I)$，包含$\mathfrak{D}^0$的概念约简的严格算法，请见“8 概念约简的相关算法”中的算法2。

性质1 设形式背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$的所有概念约简是$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_N\}$。对其中任一个概念约简标记其组成情况，即若$\omega_i=\{C_1,\cdots,C_k,\gamma u_1,\cdots,\gamma u_p,\mu m_1,\cdots,\mu m_q\}$（其中$C_1,\cdots,C_k$是一般概念，$\gamma u_1,\cdots,\gamma u_p$是对象概念，$\mu m_1,\cdots,\mu m_q$是属性概念），则记$N(\omega_i)=\{C_1,\cdots,C_k\}$，$O(\omega_i)=\{u_1,\cdots,u_p\}$，$A(\omega_i)=\{m_1,\cdots,m_q\}$。

如果令$R=\{\langle\omega_i,\omega_j\rangle\in\Omega\times\Omega\mid N(\omega_i)=N(\omega_j)\}$，显然$R$自反、对称、传递，因而是等价关系。于是$R$将$\Omega$划分成一些等价类。若$S\in\Omega/R$是$R$的一个等价类，则对任两个$\omega_i,\omega_j\in S$有：

$$O(\omega_i)\subset O(\omega_j)\Leftrightarrow A(\omega_i)\supset A(\omega_j)$$

即有子集逆序关系。

证明：因$\omega_i=\{C_1,\cdots,C_k,\gamma u_1,\cdots,\gamma u_p,\mu m_1,\cdots,\mu m_q\}=\mathfrak{D}^0\cup\mathfrak{D}$，这里

$$\mathfrak{D}^0=\{C_1,\cdots,C_k\}$$

$$\mathfrak{D}=\{\gamma u_1,\cdots,\gamma u_p,\mu m_1,\cdots,\mu m_q\}$$

于是

$$\mathfrak{D}_O=\{u_1,\cdots,u_p\}=O(\omega_i)$$

$$\mathfrak{D}_A=\{m_1,\cdots,m_q\}=A(\omega_i)$$

由定理6知$(\sim D_O,\sim D_A)$是$\mathbb{K}_{(J-J^0)^C}$的一个满足条件：$\forall(A,B)\in\mathfrak{D}^0$，$((A\times B)\cap J)_O\nsubseteq\mathfrak{D}_O$及$((A\times B)\cap J)_A\nsubseteq\mathfrak{D}_A$的概念。所以$(\sim O(\omega_i),\sim A(\omega_i))$，$i=1,\cdots,N$都是$\mathbb{K}_{(J-J^0)^C}$的概念。所以$O(\omega_i)\subset O(\omega_j)\Leftrightarrow\sim O(\omega_i)\supset\sim O(\omega_j)\Leftrightarrow(\sim O(\omega_i))^{*J^C}\subset(\sim O(\omega_j))^{*J^C}$（见引理1(1)）。

但$(\sim O(\omega_i))^{*J^C}=\sim A(\omega_i)$，$(\sim O(\omega_j))^{*J^C}=\sim A(\omega_j)$（见定义1），所以$(\sim O(\omega_i))^{*J^C}\subset(\sim O(\omega_j))^{*J^C}\Leftrightarrow\sim A(\omega_i)\subset\sim A(\omega_j)\Leftrightarrow A(\omega_i)\supset A(\omega_j)$。

例15（继续例1、例2） 形式背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$（见表1）有3个一般概念C_6,C_9,C_{10}（见例2的图2），$\mathbb{K}$的概念约简的等价类有8个（若有t个一般概念，则等价类有2^t个）。

(1)$N(\omega)=\varnothing$（这个等价类就是全部基本约简）：

$S_1=\{\{\mu b,\mu c,\mu f,\mu g,\mu h\},\{\gamma 3,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu h\},\{\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu c,\mu g,\mu h\},\{\gamma 3,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu h\},\{\gamma 1,\mu b,\mu c,\mu f,\mu h\},\{\gamma 1,\gamma 5,\mu c,\mu f,\mu h\},\{\gamma 1,\gamma 3,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu h\},\{\gamma 1,\gamma 5,\gamma 8,\mu c,\mu h\},\{\gamma 1,\gamma 3,\gamma 5,\gamma 8,\mu h\},\{\gamma 2,\mu b,\mu c,\mu f,\mu g\},\{\gamma 2,\gamma 3,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g\},\{\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu c,\mu g\},\{\gamma 2,\gamma 3,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g\},\{\gamma 1,\gamma 2,\mu b,\mu c,\mu f\},\{\gamma 1,\gamma 2,\gamma 5,\mu c,\mu f\},\{\gamma 1,\gamma 2,\gamma 3,\gamma 8,\mu b,\mu f\},\{\gamma 1,\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu c\},\{\gamma 1,\gamma 2,\gamma 3,\gamma 5,\gamma 8\}\}$

(2)$N(\omega)=\{C_6\}$：

$S_2=\{\{C_6,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 1,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 1,\gamma 5,\gamma 8,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 2,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 1,\gamma 2,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\},\{C_6,\gamma 1,\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu e,\mu i\}\}$

(3)$N(\omega)=\{C_9\}$：

$S_3=\{\{C_9,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 1,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 1,\gamma 5,\gamma 8,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 2,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 1,\gamma 2,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\},\{C_9,\gamma 1,\gamma 2,\gamma 5,\gamma 8,\mu e,\mu i\}\}$

(4)$N(\omega)=\{C_{10}\}$：

$S_4=\{\{C_{10},\gamma 3,\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_{10},\gamma 1,\gamma 3,\mu b,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_{10},\gamma 1,\gamma 3,\gamma 5,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_{10},\gamma 2,\gamma 3,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_{10},\gamma 1,\gamma 2,\gamma 3,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\},\{C_{10},\gamma 1,\gamma 2,\gamma 3,\gamma 5,\mu f,\mu e,\mu i\}\}$

(5)$N(\omega)=\{C_6,C_{10}\}$：

$S_5=\{\{C_6,C_{10},\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,C_{10},\gamma 1,\mu b,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,C_{10},\gamma 1,\gamma 5,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_6,C_{10},\gamma 2,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_6,C_{10},\gamma 1,\gamma 2,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\},\{C_6,C_{10},\gamma 1,\gamma 2,\gamma 5,\mu f,\mu e,\mu i\}\}$

(6)$N(\omega)=\{C_9,C_{10}\}$：

$S_6=\{\{C_9,C_{10},\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,C_{10},\gamma 1,\mu b,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,C_{10},\gamma 1,\gamma 5,\mu f,\mu h,\mu e,\mu i\},\{C_9,C_{10},\gamma 2,\mu b,\mu f,\mu g,\mu e,\mu i\},\{C_9,C_{10},\gamma 1,\gamma 2,\mu b,\mu f,\mu e,\mu i\}\}$

(7)$N(\omega)=\{C_6,C_9\}$：

$S_7=\varnothing$

(8)$N(\omega)=\{C_6,C_9,C_{10}\}$：

$S_8=\varnothing$

任何一个等价类，例如S_2，任两个约简，例如：

$\omega_i=\{C_6,\gamma 8,\mu b,\mu f,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\}$

$\omega_j=\{C_6,\gamma 5,\gamma 8,\mu b,\mu g,\mu h,\mu e,\mu i\}$

$O(\omega_i)=\{8\}$是$O(\omega_j)=\{5,8\}$的子集，则：$A(\omega_i)=\{b,f,g,h,e,i\}$一定是$A(\omega_j)=\{b,g,h,e,i\}$的超集。

注3 依次计算出各个等价类，即可计算出全部概念约简。以例1中的背景为例，先根据定理5计算基本约简（等价于令$\mathfrak{D}^0=\varnothing$，按定理6计算），再依次令$\mathfrak{D}^0=\{C_6\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_9\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_{10}\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_6,C_{10}\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_9,C_{10}\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_6,C_9\}$，$\mathfrak{D}^0=\{C_6,C_9,C_{10}\}$，

根据定理6计算各等价类。这些等价类的总和就是全部概念约简。

7 与现有概念约简方法的比较

在概念约简的计算方面，对本文方法与现有方法进行比较，具体如下：

(1)目前约简的方法（包括粗糙集及知识发现中的约简）都是使用合取范式和析取范式间的转化。很多学者表示，约简问题就等同于合取范式和析取范式的转换问题。在检索出的几百篇约简问题的文献中，都是用合取范式和析取范式的转换来解决约简问题的。本文提出了一种新的不使用合取范式和析取范式转换的约简方法。

(2)由于采用了新的计算方法，所以本文计算所有约简的时间略短于目前的方法，而且不依赖于概念格的结构，波动较小。

(3)概念约简的个数可能很多，如表13所列的背景中，概念约简多达384个，表14所列的背景中，概念约简多达2110个。

表 13 形式背景 1

Table 13 Formal context 1

	a	b	c	d	e	f
1	0	1	1	1	0	0
2	1	1	1	0	1	1
3	1	0	1	1	0	1
4	0	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

表 14 形式背景 2

Table 14 Formal context 2

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	1	1	1	1	0
2	0	1	1	0	1	1	1
3	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0	1
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0
7	1	0	0	0	1	0	1

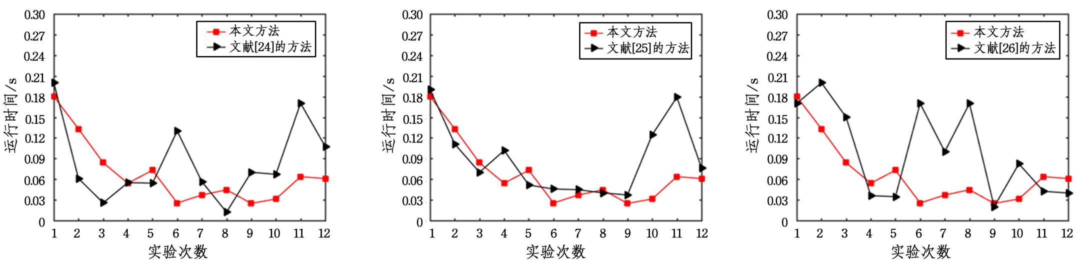
计算全部概念约简的意义并不大,通常人们希望计算包括指定概念的各种特定约简。但目前的方法大都是求全部约简。本文首次给出了直接求特定约简的方法。本文的方法方便、快捷,比求全部概念约简后从中筛选特定约简的方法省力、省时,在求特定约简方面很有优越性。

(4)针对概念约简的数目可能很大的情况,Wei 等[30]指出,这正好给我们提供了诸多有趣的可进一步研究的问题:这些概念约简分别具有什么特点?何时该使用哪个约简?某种特定的约简如何获得等?本文沿着文献[30]的方向做了探讨,初步证明了可将概念约简划分成一些等价类,这些等价类都有子集逆序等特性,且这些初步探讨有继续研究的意义。

(5)实验对比

本文使用 Matlab 随机生成的数据。实验配置为:Intel(R) CPU G1840 @2.80 GHz,4.00 GB 内存,NVIDIA GeForce GT 显卡。

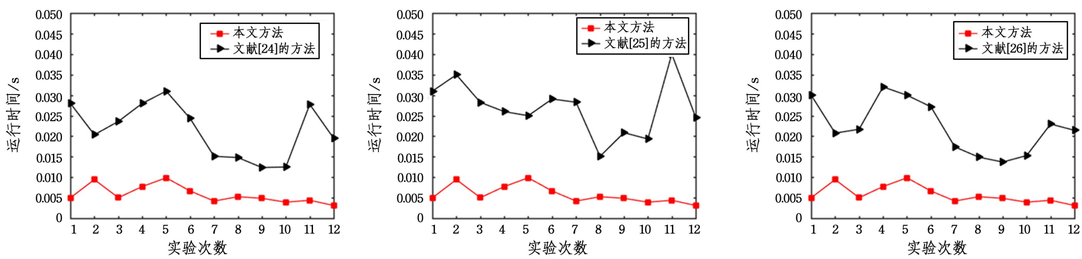
计算全部概念约简的比较结果如图 5 所示。计算包括指定一般概念的各种特定的约简的比较结果如图 6 所示(文献[33]没有给出概念约简的具体计算方法)。可看出本文在计算特定约简方面更具有优越性。



(a) (b) (c)

图 5 计算全部概念约简运行时间比较

Fig. 5 Comparison of running time calculating all concept reductions



(a) (b) (c)

图 6 计算特定概念约简运行时间比较

Fig. 6 Comparison of running time calculating specific concept reductions

8 概念约简的相关算法

算法 1 计算$\mathbb{K}=(U,M,I)$的同效关系 I_B

输入:I (n×m 的 0−1 矩阵)

输出:同效关系 I_B

1. $I_B:=I$
2. 对每一个$\langle u_i,u_j\rangle\in U\times U$,若 $u_i^*\subset u_j^*$,则对每一个 $m\in u_i^*$,在 I_B 中令$\langle u_j,m\rangle:=0$
3. 对每一个$\langle m_i,m_j\rangle\in M\times M$,若 $m_i^*\subset m_j^*$,则对每一个 $u\in m_i^*$,在 I_B 中令$\langle u,m_j\rangle:=0$
4. 输出 I_B,返回

算法 2 计算$\mathbb{K}=(U,M,I)$包含 $\mathfrak{D}^0$ 的概念约简

输入:$\mathbb{K}=(U,M,I)$,$\mathfrak{D}^0\subseteq\mathfrak{B}(\mathbb{K})$

输出:$\mathbb{K}$包含 $\mathfrak{D}^0$ 的全部概念约简 $\mathfrak{R}$

1. $\mathfrak{R}:\varnothing$,$D^1:=\varnothing$
2. 由 I 计算出 I_B(算法 1)
3. 在 I_B 中,对所有 $\gamma u=\mu m$,删除 u 行及 m 列,并且 $\mathfrak{D}^1:=\mathfrak{D}^1\cup\{\mu m\}$(或 $\mathfrak{D}^1:=\mathfrak{D}^1\cup\{\gamma u\}$,任取其一)
4. 在 I_B 中删除所有全 0 行及全 0 列,删除的最后的结果记为 J
5. 求 $\mathfrak{D}^0$ 在 J 中的覆盖 J^0
6. 若 $\mathfrak{D}^0$ 对 J^0 不是无冗余覆盖,则 $\mathfrak{R}:=\varnothing$,转(10),否则转(7)

7. 求 $J-J^0$ 的补背景 $(J-J^0)^C$

8. 求 $(J-J^0)^C$ 的全部概念 $\mathfrak{B}(\mathbb{K}^C_{(J-J_1)})$

9. 对每一个 $(X,Y)\in\mathfrak{B}(\mathbb{K}^C_{(J-J_1)})$，如果 $\forall(A,B)\in\mathfrak{D}^0((A\times B)\cap J)_0\not\subseteq\sim X$ 或 $((A\times B)\cap J)_A\not\subseteq Y$，则 $\mathfrak{D}:=\{\gamma u|u\in\sim X\}\cup\{\mu m|m\in\sim Y\}\cup\mathfrak{D}^0\cup\mathfrak{D}^1$，$\mathfrak{R}:=\mathfrak{R}\cup\{\mathfrak{D}\}$

10. 输出 $\mathfrak{R}$，返回

算法 1 的时间复杂度(以下简称复杂度)为 $O(m^2\times n)+O(n^2\times m)$。算法 2 第 2 步的复杂度即为算法 1 的复杂度，第 3 步的复杂度为 $O(m^2\times n^2)$，第 4 步的复杂度为 $O(m\times n)$，第 5 步的复杂度为 $O(m\times n)$，第 6 步的复杂度为 $O(r^0)$，其中 r^0 是 $\mathscr{D}^0$ 中的概念数，第 7 步的复杂度为 $O(m\times n)$，第 8 步是形式概念分析中最基本的算法，且已有非常多的研究，详见文献[34-43]。采用经典的 Godin 算法的复杂度为：

$$O((n+m)\times n\times r)^{[29]}$$

其中，r 是 $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{(J-J^0)^C})$ 的全部概念数。

算法 2 第 9 步的复杂度为 $O(r)$。由于 $n<r,m<r,r^0<r$，所以本文算法的复杂度为 $O((n+m)\times n\times r)$。

注 4　Godin 算法也做了很多改进，例如文献[41]的复杂度为 $O(\ln^2 n\times r\times n)$。考虑这些改进算法，本文算法的复杂度将更低。

结束语　概念约简作为一个新颖的课题，有重要的研究意义。本文提出了一种全新的概念约简的方法，该方法有以下特点。1)目前已有的判定不必要概念、核心概念、相对必要概念的方法都比较复杂，而且判定不必要概念的方法、判定核心概念的方法、判定相对必要概念的方法互不相同。本文可用统一的方法(用同效关系中 1 元素的个数)进行极其简单的判定，具有方便、直观、快捷的优点。2)目前已有的计算概念约简的方法都是用合取范式和析取范式转换的方法，本文给出了由同效关系子集补集的概念格来求概念约简的新方法，进行了不使用合取范式和析取范式转换来解决“约简课题”的小尝试。3)一个背景的概念约简往往非常多，全部求出意义并不大，人们希望求包含某些概念的特定的概念约简，但目前的方法都是求所有概念约简，而本文方法可以方便地求包含某些概念的特定的概念约简，在这方面尤其具有优越性。4)由于一个背景的概念约简非常多，因此需对它们进行分类，然后对每类特性具有的概念进行研究。本文算法就可以把所有概念约简划分为一些等价类，对每个等价类具有的特性进行研究，例如证明了每个等价类都具有子集逆序等特性。

显然，概念约简作为一个新颖的课题还有很多需要深入研究的方向。例如，由大量实践来看，每个等价类中的概念约简的个数一定是偶数，这个猜想有待证明；另外，概念约简在其他领域的应用也有待进一步开发，一些新思想、新思路、新方法的出现往往提供了更多的研究方向。本文作为引玉之砖，希望概念约简的研究出现更多重要成果。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[C]// Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. 1982:445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations[M]. Berlin: Springer, 1999.

[3] HU K Y, LU Y C, SHI C Y. Progress of concept lattice and its application[J]. Journal of Tsinghua University (Science Edition), 2000, 40(9): 77-81.

[4] CARPINETO C, ROMANO G. A lattice conceptual clustering system and its application to browsing retrieval[J]. Machine Learning, 1996: 10, 95-122.

[5] TONELLA P. Using a concept lattice of decomposition slices for program understanding and impact analysis[J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2003, 29(6) 495-509.

[6] NGUYEN P H P, CORBETT D. A Basic Mathematical Framework for Conceptual Graphs[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2006, 18(2): 261-271.

[7] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute Reduction Theory and Approach to Concept Lattice[J]. Science in China (Series E), 2005, 35(6): 628-639.

[8] WEI L. Reduction Theory and Approach to Rough Set and Concept Lattice[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2005.

[9] WANG X, MA J M. A Novel Approach to Attribute Reduction in Concept Lattices[C]// Proceedings of the International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2006: 522-529.

[10] MI J S, LEUNG Y, WU W Z. Approaches to Attribute Reduction in Concept Lattices Induced by Axialities[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(6): 504-511.

[11] LI T J, LI M Z, GAO Y. Attribute Reduction of Concept Lattice Based on Irreducible Elements[J]. International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(6): 2792-2813.

[12] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute Reduction and Rules Extraction in Decision Formal Context Based on Concept Lattice[J]. Science in China (Information Sciences), 2008, 38(2): 195-208.

[13] LI J H, MEI C L, LU Y J. Knowledge Reduction in Formal Decision Contexts Based on an Order-Preserving Mapping[J]. International Journal of General Systems, 2012, 41(2): 143-161.

[14] LI J H, MEI C L, LU Y J. Knowledge Reduction in Real Decision Formal Contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189: 191-207.

[15] SHAO M W, LI K W. Attribute Reduction in Generalized One-Sided Formal Contexts[J]. Information Sciences, 2017, 378: 317-327.

[16] WANG Z, WEI L. Attribute Reduction of Partially-Known Formal Concept Lattices for Incomplete Contexts[J]. Computer Science, 2018, 45(1): 73-78.

[17] WANG Z. Attribute Reduction and Rule Acquisition of Incomplete Formal Contexts Based on Partially-Known Concept Lattices[D]. Xi'an: Northwest University, 2018.

[18] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction Method for Concept Lattices Based on Rough Set Theory and Its Application[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.

[19] QIN K Y, LI B, PEI Z. Attribute Reduction and Rule Acquisition of Formal Decision Context Based on Object(Property)

Oriented Concept Lattices[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2019, 10(10): 2837-2850.

[20] ZOU L, PANG K, SONG X Y, et al. A Knowledge Reduction Approach for Linguistic Concept Formal Context[J]. Information Sciences, 2020, 524: 165-183.

[21] CORNEJO M E, MEDINA J, RAMIREZ- POUSSA E. Attribute and Size Reduction Mechanisms in Multi-Adjoint Concept Lattices[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 318: 388-402.

[22] REN R S, WEI L. The Attribute Reductions of Three-Way Concept Lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.

[23] QI J J, QIAN T, WEI L. The Connections between Three-Way and Classical Lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151.

[24] KEPRT A, SNASEL V. Binary factor analysis with help of formal concepts[C]// Proceedings of International Workshop on Concept Lattices and Their Applications. Ostrava, 2004: 90-101.

[25] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. On Boolean factor analysis with formal concept as factors[C]// SCIS & ISIS. 2006: 1054-1059.

[26] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition[J]. Journal of Computer & System Sciences, 2010, 76(1): 3-20.

[27] BELOHLAVEK R, TRNECKA M. From-below approximations in Boolean matrix factorization: geometry and new algorithm [J]. Journal of Computer & System Sciences, 2015, 81: 1678-1697.

[28] TRNECKA M, TRNECKOVA M. Data reduction for Boolean matrix factorization algorithms based on formal concept analysis [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 158: 75-80.

[29] CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.

[30] WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Science in China (Information Sciences), 2020, 50: 1817-1833.

[31] XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on Boolean matrix[J]. Journal of Shandong University(Natural Science). 2020, 55(5): 32-45.

[32] WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of Concept Reduction Based on Concept Discernibility Matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.

[33] ZHOU J Q, YANG S C, WANG X F, et al. Concept and attribute reduction based on rectangle theory of formal concept[J]. arXiv: 2111.00005, 2021.

[34] GANTER B. Two basic algorithms in concept analysis[C]// Proceedings of the International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2010: 312-390.

[35] BORDAT J P. Calcul pratique du treillisde Galoisd' une correspondance[J]. Mathematiques et Sci-ences Humaines, 1986, 96: 31-47.

[36] GODIN R, MISSAOUI R, ALAOUI H. Incremental concept formation algorithms based on Galois(concept) Lattices[J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 246-267.

[37] CARPINETO C, ROMANO G. A lattice conceptual clustering system and its application to browsing retrieval [J]. Machine Learning, 1996, 24(2): 95-122.

[38] NOURINE L, RAYNAUD O. A fast algorithm for building lattices[J]. Information Processing Letters, 1999: 71(5/6): 199-204.

[39] STUMME G, TAOUIL R, BASTIDE Y, et al. Fast computation of concept lattices using data mining techniques[C]// Proceedings of the 7th International Workshop on Knowledge Representation Meets Databases. Berlin: Technical University of Aachen. 2000: 129-139.

[40] XIE Z P, LIU Z T. A fast incremental algorithm for building concept lattice[J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(5): 490-496.

[41] YU Y, QIAN X, ZHONG F, et al. Increment construction algorithm for concept lattice based on maximal concept[J]. Computer Engineering, 2009, 35(21): 62-64.

[42] SHEN J B, LU Y J. A novel building algorithm of concept lattice [J]. Journal of HeFei University of Technology, 2010. 33(2): 301-303, 307.

[43] GUO L Z, SONG Z M. A novel concept lattice acquisition approach based on the greatest full matrix of formal context[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2015, 10(6): 838-842.

MA Wensheng, born in 1971, Ph.D candidate. His main research interest is big data application.

HOU Xilin, born in 1960, Ph.D, professor. His main research interests include big data application and enterprise innovation system.

(责任编辑:何杨)