计算机科学
COMPUTER SCIENCE

**不完备形式背景中基于*OE-cp*-近似概念的规则提取**

牛丽慧, 米据生, 白宇璋

引用本文

牛丽慧, 米据生, 白宇璋. 不完备形式背景中基于*OE-cp*-近似概念的规则提取[J]. 计算机科学, 2023, 50(10): 7-17.

NIU Lihui, MI Jusheng, BAI Yuzhang. Rule Extraction Based on*OE-cp*-Approximation Concepts in Incomplete Formal Contexts [J]. Computer Science, 2023, 50(10): 7-17.

---

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.230600037

# 不完备形式背景中基于 *OE-cp*-近似概念的规则提取

牛丽慧[1]　米据生[1,2]　白宇璋[1]
1 河北师范大学数学科学学院　石家庄 050024
2 河北省计算数学与应用重点实验室　石家庄 050024
(1092550016@qq.com)

**摘　要**　在许多实际的应用场景中，数据测量的误差、对数据的理解和传输失真等都会导致数据的丢失，这种数据不完整的形式背景即为不完备形式背景。为了丰富不完备形式背景中的知识获取模型，文中结合三支思想在不完备形式背景中利用正算子与粗糙集理论中的必然-可能性算子构造了共同-可能($cp$)近似概念，讨论了对象诱导的共同-可能($cp$)近似概念与经典概念、面向属性概念、对象诱导的三支近似概念的关系，提出了由经典概念和面向属性概念构造对象诱导的 $cp$-近似概念的算法。进而，基于 $OE$-$cp$-近似概念讨论了不完备决策形式背景中近似决策规则的获取，提出了 $OE$-$cp$-协调的不完备决策形式背景下的正规则和可能性规则，并给出了与基于经典概念的决策规则之间的关系。

**关键词**：不完备形式背景；近似概念；规则获取；三支决策
**中图法分类号**　TP181

## Rule Extraction Based on *OE-cp*-Approximation Concepts in Incomplete Formal Contexts

NIU Lihui[1], MI Jusheng[1,2] and BAI Yuzhang[1]
1 College of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China
2 Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang 050024, China

**Abstract**　In many practical application, data loss can be caused by data measurement errors, data understanding biases and transmission distortions. This "data incomplete" formal context is called incomplete formal context. In order to enrich the knowledge discovery model in the incomplete formal context, this paper combines the idea of three-way to construct the common-possible ($cp$) approximation concept in incomplete formal context using positive operator and necessity-possibility operators in rough set theory. The relationship between the object-induced common-possible ($cp$) approximation concept and the classical, attribute-oriented, and object-induced three-way approximation concepts is discussed, and an algorithm for constructing object-induced $cp$-approximation concepts from the classical and attribute-oriented concepts is formulated. Further, the acquisition of approximate decision rules in incomplete decision formal context is discussed based on the $OE$-$cp$-approximation concept. We propose positive decision rules and possibility decision rules in $OE$-$cp$-consistent incomplete decision formal context and compare them with the decision rules obtained from strongly consistent incomplete decision formal context.

**Keywords**　Incomplete formal context, Approximate concept, Rule acquisition, Three-way decision

形式概念分析[1](Formal Concept Analysis, FCA)是德国学者 Wille 于 1982 年提出的一种从形式背景建立概念格，来进行数据分析和规则提取的有效工具。形式背景、形式概念及其有序结构层次的概念格共同构成 FCA 的基础。其中，形式背景是其数据表现形式，由对象集、属性集及两者之间的二元关系组成；形式概念可以通过一对 Galois 连接生成；概念格通过 Hasse 图简单明了地刻画形式概念之间的层次结构关系[2-5]。FCA 作为一种实用的知识发现工具，已被成功应用于多个领域，如知识发现[6-10]、信息检索[11]、机器学习[12]和软件工程[13-14]等。此外，一些学者还提出了推导算子的一些自然泛化，这些泛化引出了一些新的概念，如面向对象概念、面向属性概念、模糊概念和三支概念等[15-20]。

在形式概念分析中，人们通常研究的形式背景是完备的，即对象和属性之间的关系是已知的。然而，在现实世界中，由于测量数据的误差、对数据的理解或获取的限制等众多的原因，人们需要处理的形式背景存在数据缺失问题，对于这种有"缺失值"的形式背景，我们称其为不完备的形式背景[21-22]。

由于不完备形式背景在实际中大量存在，因此基于不完备形式背景的形式概念分析成为了数据分析的实用工具[23]。Burmeister 等[21]讨论了如何处理概念数据表示、数据分析和

到稿日期：2023-06-04　返修日期：2023-07-28
基金项目：国家自然科学基金(62076088)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62076088).
通信作者：米据生(mijsh@263.net)

知识发现中不完备背景的缺失值，总结出使用三值 Kleene-logic 来表征前提和结论不相交的属性蕴涵的有效性和可能性。Obiedkov 等[24]指出，与 Kleene-logic 相比，三值模态逻辑更有利于评价不完备背景下属性蕴涵的有效性，因为三值模态逻辑适用于所有的属性蕴涵，而不是只适用于前提和结论不相交的属性蕴涵。Dubois 等[25]声称，可以将可能性理论作为一个工具，将经典的 FCA 扩展到不确定或者不完备形式背景下。近年来，人们在不完备形式背景中的研究成果越来越多。Li 等[26]用两种模型在不完备背景中构建了近似概念，揭示了两者的等价性，为了简化近似概念格的表示，进一步提出了属性约简方法。Li 等[27]提出了 $K$-medoids 聚类方法，用于压缩近似概念格，并在不完备背景中对近似概念进行聚类。Yao 等[28]给出了一个区间集概念和表示部分已知概念的不完备形式背景的通用概念框架。在提出的框架中，确定了 4 种表示部分已知概念的可能形式，包括 SE-SI 形式概念、SE-ISI 形式概念(即近似概念)、ISE-SI 形式概念和 ISE-ISI 形式概念(即未知的形式概念)。此外，Ren 等[29]系统地研究了 SE-ISI，ISE-SI 和 ISE-ISI 这 3 种不同形式的部分已知形式概念的结构及其关系。Wang 等[30]在不完备背景中提出了基于不同标准的 SE-ISI 概念格的 4 种属性约简方法。Yang 等[31]针对语言值信息的缺失，给出了不完备模糊语言形式背景，讨论了模糊语言近似概念，构造了相应的模糊语言近似概念格。

不完备决策形式背景是不完备形式背景的一个有用拓展，用于使用概念格来实现决策分析。规则获取是决策形式背景中进行决策分析的主要目的之一，近年来在这一问题上有许多成果。例如，Li 等[22]在不完备的决策背景中构建了近似概念，提出了近似决策规则的概念和从不完备决策形式背景中提取非冗余近似决策规则的方法。为了提高规则的紧凑性，Li 等[23]定义了最小闭标签概念来表示限制性决策蕴涵。为了丰富规则的类型，Ren 等[32]基于面向对象(属性)概念格给出了两种新的规则类型，分别为 ∨－型和 ∨－∧混合型。在此基础上，Hu 等[33]提出了一种 OW-决策规则的规则获取算法。Wei 等[34]讨论了基于三支概念格的决策形式背景的规则获取，研究了对象诱导的三支协调决策形式背景下的积极规则和消极规则。Shao 等[35]构造了一种无知识损耗的方法，用于降低决策形式背景的复杂性，并在简化的决策形式背景上提取了极大规则。

在不完备的决策形式背景中构造新的近似概念，进而进行规则提取，获得更加完整的知识，是很有价值的研究课题。类似于粗糙集理论中确定和可能性决策规则的获取，在不完备形式背景中利用粗糙集理论中的确定和可能性算子构造近似概念，进而在不完备的决策形式背景中提取确定性规则和可能性的规则。尽管已有大量关于不完备决策形式背景中的规则获取和知识约简问题的研究，但为了拓展概念格模型，获得具有更丰富语义的规则类型，本文在不完备决策形式背景中构建了共同-可能近似概念，基于近似概念进行规则获取研究。首先，从对象和属性两个方面分别给出 $cp$-近似概念的定义，并严格证明其格结构和相关性质。其次，讨论了 $OE$-$cp$ 近似概念和形式概念、面向属性概念和对象诱导的三支近似概念之间的关系。最后，在不完备决策形式背景中分别基于形式概念和 $OE$-$cp$-近似概念定义了强协调性和 $OE$-$cp$-协调性，将强协调下和 $OE$-$cp$-协调下获得的规则进行了比较。

## 1 预备知识

本节首先简要回顾形式概念格、面向属性(对象)概念格、三支概念格的一些基本定义和相关性质。

### 1.1 形式概念

**定义 1**[2] 形式背景是一个三元对 $(G,M,I)$，其中，$G$ 是一个非空有限对象集，$M$ 是非空有限属性集，$I$ 是 $G$ 和 $M$ 之间的二元关系，$(x,a)\in I$ 表示对象 $x$ 具有属性 $a$，$(x,a)\notin I$ 表示对象 $x$ 不具有属性 $a$。

用 $2^G$ 表示对象 $G$ 的幂集，$2^M$ 表示属性集 $M$ 的幂集。在 $2^G$ 和 $2^M$ 上定义一对对偶算子，如定义 2 所示。

**定义 2**[2,36] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，对任意 $X\in 2^G$ 和 $A\in 2^M$，有：

$X^*=\{a\in M \mid \forall x\in X, xIa\}$

$A^*=\{x\in G \mid \forall a\in A, xIa\}$

如果一个二元组 $(X,A)\in 2^G\times 2^M$ 满足 $X^*=A$ 且 $A^*=X$，则称 $(X,A)$ 是一个形式概念，简称概念，其中 $X$ 称为概念的外延，$A$ 称为概念的内涵。

任取形式背景 $(G,M,I)$ 的两个概念 $(X_1,A_1)$ 和 $(X_2,A_2)$，定义它们之间的偏序关系及上下确界为：

$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2$

$(X_1,A_1)\vee(X_2,A_2)=((X_1\cup X_2)^{**}),A_1\cap A_2)$

$(X_1,A_1)\wedge(X_2,A_2)=(X_1\cap X_2,(A_1\cup A_2)^{**})$

形式背景 $(G,M,I)$ 的所有概念连同它们之间的这种序关系组成一个完备格，称为形式背景 $(G,M,I)$ 的概念格，用 $L(G,M,I)$ 表示。

**性质 1**[17] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，对任意 $X,X_1,X_2\subseteq G$ 和 $A,A_1,A_2\subseteq M$，以下结论成立：

(1) $X\subseteq X^{**}$ 且 $A\subseteq A^{**}$；

(2) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^*\subseteq X_1^*$ 且 $A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^*\subseteq A_1^*$；

(3) $X^*=X^{***}$ 且 $A^*=A^{***}$；

(4) $X\subseteq A^*\Leftrightarrow A\subseteq X^*$；

(5) $(X_1\cup X_2)^*=X_1^*\cap X_2^*$，$(A_1\cup A_2)^*=A_1^*\cap A_2^*$；

(6) $(X_1\cap X_2)^*\supseteq X_1^*\cup X_2^*$，$(A_1\cap A_2)^*\supseteq A_1^*\cup A_2^*$。

以上 * 运算称为正算子，对偶地，可以定义一对负算子。

**定义 3**[19] 设 $(G,M,I)$ 为一个形式背景，$\bar{I}$ 是 $I$ 的补关系，即：$\bar{I}=(G\times M)-I$。对任意 $X\in 2^G$ 和 $A\in 2^M$，在 $2^G$ 和 $2^M$ 上定义一对负算子，表达式如下：

$X^{\bar{*}}=\{a\in M \mid \forall x\in X, xI^ca\}$

$A^{\bar{*}}=\{x\in G \mid \forall a\in A, xI^ca\}$

显然，形式背景 $(G,M,I)$ 的负算子正是其补形式背景 $(G,M,\bar{I})$ 的正算子，因此负算子有类似于正算子的性质。由负算子定义的概念 $(X,A)$ 称为负 $(N)$ 概念，由于正负算子互补，因此由形式概念中的序关系及上下确界可得到负 $(N)$ 概念的序关系及其上下确界。用 $NCL(G,M,I)$ 表示所有负概念及其序关系形成的完备格。

### 1.2 面向对象(属性)概念

**定义 4**[20] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，对任意 $X\in 2^G$ 和

$A\in 2^M$，定义：

$X^{\square}=\{a\in M|a^*\subseteq X\}$

$A^{\Diamond}=\{x\in G|x^*\cap A\neq\emptyset\}$

若 $X=A^{\Diamond}$ 且 $A=X^{\square}$，则称 $(X,A)$ 是一个面向对象概念，并称 $X$ 和 $A$ 分别是面向对象概念 $(X,A)$ 的外延和内涵。

**定义 5**[20,37] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，对任意 $X\in 2^G$ 和 $A\in 2^M$，定义：

$A^{\square}=\{x\in G|x^*\subseteq A\}$

$X^{\Diamond}=\{a\in M|a^*\cap X\neq\emptyset\}$

若 $X=A^{\square}$ 且 $A=X^{\Diamond}$，则称 $(X,A)$ 是一个面向属性概念，并称 $X$ 和 $A$ 分别是面向属性概念 $(X,A)$ 的外延和内涵。

如果形式背景 $(G,M,I)$ 的所有面向对象概念按如下的 $\leqslant_O$ 进行偏序化，那么所有面向属性概念按如下的 $\leqslant_P$ 进行偏序化：

$(X_1,A_1)\leqslant_O(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2$

$(X_1,A_1)\leqslant_P(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2$

则面向对象概念连同偏序关系 $\leqslant_O$ 构成完备格，称为面向对象概念格，记为 $L_O(G,M,I)$；同理，面向属性概念连同偏序关系 $\leqslant_P$ 也构成概念格，称为面向属性概念格，记为 $L_P(G,M,I)$。

此外，面向对象概念格 $L_O(G,M,I)$ 的上确界和下确界分别定义为：

$(X_1,A_1)\underset{O}{\vee}(X_2,A_2)=(X_1\cup X_2,(A_1\cup A_2)^{\Diamond\square})$

$(X_1,A_1)\underset{O}{\wedge}(X_2,A_2)=((X_1\cap X_2)^{\square\Diamond},A_1\cap A_2)$

类似地，面向属性概念格 $L_P(G,M,I)$ 的上确界和下确界分别定义为：

$(X_1,A_1)\underset{P}{\vee}(X_2,A_2)=((X_1\cup X_2)^{\Diamond\square},A_1\cup A_2)$

$(X_1,A_1)\underset{P}{\wedge}(X_2,A_2)=(X_1\cap X_2,(B_1\cap B_2)^{\square\Diamond})$

**性质 2**[20] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，$\forall X,X_1,X_2\subseteq G$ 和 $A,A_1,A_2\subseteq M$，以下结论成立：

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_1^{\Diamond}\subseteq X_2^{\Diamond},X_1^{\square}\subseteq X_2^{\square}$；

(2) $A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_1^{\square}\subseteq A_2^{\square},A_1^{\Diamond}\subseteq A_2^{\Diamond}$；

(3) $X^{\square\Diamond}\subseteq X\subseteq X^{\Diamond\square}$；

(4) $A^{\square\Diamond}\subseteq A\subseteq A^{\Diamond\square}$；

(5) $X^{\Diamond}=X^{\Diamond\square\Diamond},A^{\square}=A^{\square\Diamond\square}$；

(6) $A^{\Diamond}=A^{\Diamond\square\Diamond},X^{\square}=X^{\square\Diamond\square}$；

(7) $(X_1\cup X_2)^{\Diamond}=X_1^{\Diamond}\cup X_2^{\Diamond},(A_1\cap A_2)^{\square}=A_1^{\Diamond}\cap A_2^{\square}$；

(8) $(A_1\cup A_2)^{\Diamond}=A_1^{\Diamond}\cup A_2^{\Diamond},(X_1\cap X_2)^{\square}=X_1^{\square}\cap X_2^{\square}$；

(9) $(X_1\cap X_2)^{\Diamond}\subseteq X_1^{\Diamond}\cap X_2^{\Diamond},(A_1\cup A_2)^{\square}\supseteq A_1^{\square}\cup A_2^{\square}$；

(10) $(A_1\cap A_2)^{\Diamond}\subseteq A_1^{\Diamond}\cap A_2^{\Diamond},(X_1\cup X_2)^{\square}\supseteq X_1^{\square}\cup X_2^{\square}$。

算子 $(\square,\Diamond)$ 是 $(2^G,\subseteq)$ 和 $(2^M,\subseteq)$ 之间的保序伽罗瓦连接；对偶地，算子 $(\Diamond,\square)$ 是 $(2^G,\subseteq)$ 和 $(2^M,\subseteq)$ 之间的保序伽罗瓦连接。

### 1.3 三支概念

Qi 等[19]将正算子和负算子相结合，首先定义了三支算子，提出了对象诱导的三支概念和属性诱导的三支概念。本节对两种三支概念进行了简要回顾。

**定义 6**[19] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，在 $2^G$ 和 $2^M\times 2^M$ 上定义一对 $OE$ 算子：对任意 $X\in 2^G$ 和 $A,B\in 2^M$，有

$X^{\gtrdot}=(X^*,X^{\bar{*}})$

$(A,B)^{\lessdot}=\{x\in G\mid x\in A^*$ 且 $x\in B^{\bar{*}}\}=A^*\cap B^{\bar{*}}$

若 $X^{\gtrdot}=(A,B)$ 且 $(A,B)^{\lessdot}=X$，则称 $(X,(A,B))$ 为 $OE$ 概念，其中 $X$ 称为 $OE$ 概念 $(X,(A,B))$ 的外延，$(A,B)$ 称为 $OE$ 概念 $(X,(A,B))$ 的内涵。

对任意 $OE$ 概念 $(X_1,(A_1,B_1))$ 和 $(X_2,(A_2,B_2))$，定义偏序关系及上下确界为：

$(X_1,(A_1,B_1)\leq(X_2,(A_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow(A_1,B_1)\supseteq(A_2,B_2)$

$(X_1,(A_1,B_1)\vee(X_2,(A_2,B_2)=((X_1\cup X_2)^{\gtrdot\lessdot},(A_1,B_1)\cap(A_2,B_2))$

$(X_1,(A_1,B_1))\wedge(X_2,(A_2,B_2)=(X_1\cap X_2,((A_1,B_1)\cup(A_2,B_2))^{\lessdot\gtrdot})$。

形式背景 $(G,M,I)$ 的所有 $OE$ 概念连同这种序组成的集合，称为 $(G,M,I)$ 的 $OE$ 概念格，用 $OEL(G,M,I)$ 表示。

**定义 7**[19] 设 $(G,M,I)$ 为形式背景，在 $2^M$ 和 $2^G\times 2^G$ 上定义一对 $AE$ 算子：对任意 $A\in 2^M$ 和 $X,Y\in 2^G$，$A^{\gtrdot}=(A^*,A^{\bar{*}})$，$(X,Y)^{\lessdot}=\{a\in M\mid a\in X^*$ 且 $a\in Y^{\bar{*}}\}=X^*\cap Y^{\bar{*}}$。

若 $(X,Y)^{\lessdot}=A$ 且 $A^{\gtrdot}=(X,Y)$，则称 $((X,Y),A)$ 为 $AE$ 概念，其中 $(X,Y)$ 称为 $AE$ 概念 $((X,Y),A)$ 的外延，$A$ 称为 $AE$ 概念 $((X,Y),A)$ 的内涵。

对任意 $AE$ 概念 $((X_1,Y_1),A_1)$ 和 $((X_2,Y_2),A_2)$ 定义偏序关系及上下确界为：

$((X_1,Y_1),A_1)\leq((X_2,Y_2),A_2)\Leftrightarrow(X_1,Y_1)\subseteq(X_2,Y_2)\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2$

$((X_1,Y_1),A_1)\vee((X_2,Y_2),A_2)=(((X_1,Y_1)\cup(X_2,Y_2))^{\lessdot\gtrdot},A_1\cap A_2)$

$((X_1,Y_1),A_1)\wedge((X_2,Y_2),A_2)=((X_1,Y_1)\cap(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\gtrdot\lessdot})$。

形式背景 $(G,M,I)$ 的所有 $AE$ 概念连同这种序组成的集合，称为 $(G,M,I)$ 的 $AE$ 概念格，用 $AEL(G,M,I)$ 表示。

## 2 不完备形式背景中三支近似概念构建

本节在不完备的形式背景中，利用正负算子和必要可能算子定义三支算子和三支概念格的扩展模型，称其为不完备形式背景下的 $OE$-$cp$($AE$-$cp$) 近似算子和 $OE$-$cp$($AE$-$cp$) 近似概念格。进而讨论 $OE$-$cp$-近似概念与经典概念、面向属性概念、对象诱导的三支近似概念($OE$-近似概念)之间的关系。

### 2.1 属性诱导的 $cp$-近似概念

本节将在不完备形式背景中构建属性诱导的 $cp$-近似概念。首先引入不完备形式背景的一些相关定义。

**定义 8**[28] 称 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，其中 $G$ 为对象集，$M$ 为属性集，$\{+,?,-\}$ 为对象和属性间的取值，$I\subseteq G\times M\times\{+,?,-\}$ 为 $G$，$M$ 和 $\{+,?,-\}$ 之间的三元关系，使得 $(x,a,+)$ 表示对象 $x$ 具有属性 $a$，$(x,a,-)$ 表示对象 $x$ 不具有属性 $a$，$(x,a,?)$ 表示不确定对象 $x$ 是否具有属性 $a$。

设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，为了便于描述，记 $(G,M,I_*)$ 为不完备形式背景 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 的最小完备化形式背景，其中 $I_*=\{(x,m)\mid(x,m,+)\in I\}$。

$(G,M,I^*)$为不完备形式背景$(G,M,\{+,?,-\},I)$的最大完备化形式背景，其中$I^*=\{(x,m)\mid(x,m,+)\in I\}\cup\{(x,m)\mid(x,m,?)\in I\}$。

**定义 9**　设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景，$\forall x\in G,a\in M$。定义：

$x^{*+}=\{a\in M|I(x,a)=+\}$

$x^{*-}=\{a\in M|I(x,a)=-\}$

$a^{*+}=\{x\in M|I(x,a)=+\}$

$a^{*-}=\{x\in M|I(x,a)=-\}$

$x^{*+?}=\{a\in M|I(x,a)=+$或$I(x,a)=?\}$

$a^{*+?}=\{x\in M|I(x,a)=+$或$I(x,a)=?\}$

**定义 10**　设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景，对象集$X\subseteq G$，属性集$A\subseteq M$，正算子定义为：

$X^{*+}=\{a\in M|\ \forall x\in X,I(x,a)=+\}$

$A^{*+}=\{x\in U|\ \forall a\in A,I(x,a)=+\}$

由于正负算子的对偶性，类似地，负算子定义为：

$X^{*-}=\{a\in M|\ \forall x\in X,I(x,a)=-\}$

$A^{*-}=\{x\in U|\ \forall a\in A,I(x,a)=-\}$

可能性算子定义为：

$X^{\Diamond+?}=\{a\in M|\ a^{*+?}\cap X\neq\emptyset\}=\{a\in M|\ \exists x\in X,I(x,a)=+$或$I(x,a)=?\}$

$A^{\Diamond+?}=\{x\in G|\ x^{*+?}\cap A\neq\emptyset\}=\{x\in G|\ \exists a\in A,I(x,a)=+$或$I(x,a)=?\}$

$X^{\Diamond+?}$表示与对象$X$交叉的最大属性集，$A^{\Diamond+?}$表示至少确定拥有或可能拥有$A$中一个属性的所有对象组成的集合。

必然性算子定义为：

$A^{\Box+?}=\{x\in G|\ x^{*+?}\subseteq A\}=\{x\in G|\ \forall a\in M,I(x,a)=+,I(x,a)=?\ \Rightarrow a\in A\}$

$X^{\Box+?}=\{a\in M|a^{*+?}\subseteq X\}=\{a\in M|\ \forall x\in G,I(x,a)=+,I(x,a)=?\ \Rightarrow x\in X\}$

$A^{\Box+?}$可解释为最大拥有的属性不超过$A$的所有对象组成的集合或者最大可能拥有$A$中属性的对象组成的集合，$X^{\Box+?}$可解释为对象集$X$所覆盖的最大属性集。

注：下文中的$()^*$即为定义10中的$()^{*+}$。

设$G$为非空有限对象集，对$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in 2^G\times 2^G$，定义：

$(X_1,Y_1)\leqslant_{cp}(X_2,Y_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2,Y_1\supseteq Y_2$

$(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)=(X_1\cap X_2,Y_1\cup Y_2)$

$(X_1,Y_1)\cup_{cp}(X_2,Y_2)=(X_1\cup X_2,Y_1\cap Y_2)$

**定义 11**　设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景，定义属性诱导的$cp$-近似算子，其中，$\triangleright:2^M\rightarrow 2^G\times 2^G$，$\triangleleft:2^G\times 2^G\rightarrow 2^M$，$\forall A\in 2^M,(X,Y)\in 2^G\times 2^G$，$A^{\triangleright}=(A^*,A^{\Diamond+?})$，$(X,Y)^{\triangleleft}=X^*\cap Y^{\Box+?}$。如果$A^{\triangleright}=(X,Y)$且$(X,Y)^{\triangleleft}=A$，则称$((X,Y),A)$为由属性诱导的共同-可能近似概念，简记为*AE-cp*-近似概念。

**性质 3**　设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备的形式背景，下列性质成立：$\forall(X,Y),(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\subseteq 2^G\times 2^G$和$A,A_1,A_2\subseteq 2^M$。

(1)$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_1^{\triangleright}\geqslant_{cp}A_2^{\triangleright}$，$(X_1,Y_1)\leqslant_{cp}(X_2,Y_2)\Rightarrow(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\supseteq(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$；

(2)$A\subseteq A^{\triangleright\triangleleft}$，$(X,Y)\leqslant_{cp}(X,Y)^{\triangleleft\triangleright}$；

(3)$\triangleright$和$\triangleleft$形成$(2^G\times 2^G,\leqslant_{cp})$和$(2^M,\subseteq)$之间的一对*Galois*连接。

(4)$A^{\triangleright}=A^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$，$(X,Y)^{\triangleleft}=(X,Y)^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$；

(5)$((x^{**}),x^{*\Diamond+?}),x^*)$和$((x^{\Box+?},x^{\Box+?\Diamond+?}),x^{\Box+?})$是两个*AE-cp*-近似概念。

(6)$(A_1\cup A_2)^{\triangleright}=A_1^{\triangleright}\cap_{cp}A_2^{\triangleright}$，$((X_1,Y_1)\cup_{cp}(X_2,Y_2)^{\triangleleft}=(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cap(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$；

(7)$(A_1\cap A_2)^{\triangleright}\geqslant_{cp}A_1^{\triangleright}\cup_{cp}A_2^{\triangleright}$，$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)^{\triangleleft}\supseteq(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cup(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$。

证明：

(1)如果$A_1\subseteq A_2$，则$A_1^*\supseteq A_2^*$，$A_1^{\Diamond+?}\subseteq A_2^{\Diamond+?}$，进而$A_1^{\triangleright}\geqslant_{cp}A_2^{\triangleright}$。若$(X_1,Y_1)\leqslant_{cp}(X_2,Y_2)$，即$X_1\subseteq X_2,Y_1\supseteq Y_2$。由性质1和性质2，可得$X_1^*\supseteq X_2^*$，$Y_1^{\Box+?}\supseteq Y_2^{\Box+?}$，从而$X_1^*\cap Y_1^{\Box+?}\supseteq X_2^*\cap Y_2^{\Box+?}$，即$(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\supseteq(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$。

(2)因为$A\subseteq A^{**}$和$A\subseteq A^{\Diamond+?\Box+?}$，可得$A\subseteq A^{**}\cap A^{\Diamond+?\Box+?}$，从而$A\subseteq A^{\triangleright\triangleleft}$。由$X^*\supseteq X^*\cap Y^{\Box+?}$，可得$X^{**}\subseteq(X^*\cap Y^{\Box+?})^*$。由性质2，易得$X\subseteq X^{**}\subseteq(X^*\cap Y^{\Box+?})^*$。另外，由$Y^{\Box+?}\supseteq X^*\cap Y^{\Box+?}$，可得$Y^{\Box+?\Diamond+?}\supseteq(X^*\cap Y^{\Box+?})^{\Diamond+?}$。由性质2，有$Y\supseteq Y^{\Box+?\Diamond+?}\supseteq(X^*\cap Y^{\Box+?})^{\Diamond+?}$。综上可得$(X,Y)\leqslant_{cp}(X,Y)^{\triangleleft\triangleright}$成立。

(3)由结论(1)和(2)可知，$\triangleright$和$\triangleleft$形成$(2^G\times 2^G,\leqslant_{cp})$和$(2^M,\subseteq)$之间的一对*Galois*连接。

(4)一方面，基于结论(2)的第二部分$(X,Y)\leqslant_{cp}(X,Y)^{\triangleleft\triangleright}$的证明过程，可得$A^{\triangleright}\leqslant_{cp}A^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$。另一方面，由结论(2)的$A\subseteq A^{\triangleright\triangleleft}$和结论(1)的第一部分，可得$A^{\triangleright}\geqslant_{cp}A^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$。因此$A^{\triangleright}=A^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$成立。一方面，基于结论(2)的第一部分$A\subseteq A^{\triangleright\triangleleft}$的证明过程，可得$(X,Y)^{\triangleleft}\subseteq(X,Y)^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$。另一方面，由结论(2)的$(X,Y)\leqslant_{cp}(X,Y)^{\triangleleft\triangleright}$和结论(1)的第二部分，易得$(X,Y)^{\triangleleft}\supseteq(X,Y)^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$。因此$(X,Y)^{\triangleleft}=(X,Y)^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$得证。

(5)设$(X,Y)=(x^{**},x^{*\Diamond+?})$和$A=x^*$。显然$A^{\triangleright}=(x^*)^{\triangleright}=(x^{**},x^{*\Diamond+?})=(X,Y)$，$(X,Y)^{\triangleleft}=(x^{**},x^{*\Diamond+?})^{\triangleleft}=x^{***}\cap x^{*\Diamond+?\Box+?}$。由性质1和性质2知，$x^{***}=x^*$，$x^*\subseteq x^{*\Diamond+?\Box+?}$，从而$(X,Y)^{\triangleleft}=(x^{**},x^{*\Diamond+?})^{\triangleleft}=x^{***}\cap x^{*\Diamond+?\Box+?}=x^*=A$。因此$((x^{**},x^{*\Diamond+?}),x^*)$是一个*AE-cp*-近似概念。

设$(X,Y)=(x^{\Box+?*},x^{\Box+?\Diamond+?})$和$A=x^{\Box+?}$。显然$A^{\triangleright}=(x^{\Box+?})^{\triangleright}=(x^{\Box+?*},x^{\Box+?\Diamond+?})=(X,Y)$，$(X,Y)^{\triangleleft}=(x^{\Box+?*},x^{\Box+?\Diamond+?})^{\triangleleft}=x^{\Box+?**}\cap x^{\Box+?\Diamond+?\Box+?}$。由性质1及性质2，可得$x^{\Box+?}\subseteq x^{\Box+?**}$和$x^{\Box+?}\subseteq x^{\Box+?\Diamond+?\Box+?}$，从而$(X,Y)^{\triangleleft}=(x^{\Box+?*},x^{\Box+?\Diamond+?})^{\triangleleft}=x^{\Box+?**}\cap x^{\Box+?\Diamond+?\Box+?}=x^{\Box+?}=A$。因此，$((x^{\Box+?*},x^{\Box+?\Diamond+?}),x^{\Box+?})$是一个*AE-cp*-近似概念。

(6)$(A_1\cup A_2)^{\triangleright}=((A_1\cup A_2)^*,(A_1\cup A_2)^{\Diamond+?})=(A_1^*\cap A_2^*,A_1^{\Diamond+?}\cup A_2^{\Diamond+?})=(A_1^*,A_1^{\Diamond+?})\cap_{cp}(A_2^*,A_2^{\Diamond+?})=A_1^{\triangleright}\cap_{cp}A_2^{\triangleright}$。

$((X_1,Y_1)\cup_{cp}(X_2,Y_2))^{\triangleleft}=(X_1\cup X_2,Y_1\cap Y_2)^{\triangleleft}=(X_1\cup X_2)^*\cap(Y_1\cap Y_2)^{\Box+?}=(X_1^*\cap X_2^*)\cap(Y_1^{\Box+?}\cap Y_2^{\Box+?})=(X_1^*\cap Y_1^{\Box+?})\cap(X_2^*\cap Y_2^{\Box+?})=(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cap(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$。

(7)因为$(A_1\cup A_2)^*\supseteq A_1^*\cap A_2^*$和$(A_1\cup A_2)^{\Diamond+?}\subseteq D$

$A_1^{\Diamond+?}\cap F\,A_2^{\Diamond+?}$,可得$(A_1\cup A_2)^{\triangleright}=((A_1\cup A_2)^{*},(A_1\cup A_2)^{\Diamond+?})\geqslant_{cp}(A_1^{*}\cap A_2^{*},A_1^{\Diamond+?}\cap A_2^{\Diamond+?})=A_1^{\triangleright}\cup_{cp}A_2^{\triangleright}$。因此,第一部分得证。

假设$((X_1,Y_1),A_1)$和$((X_2,Y_2),A_2)$是两个 *AE-cp*-近似概念,则$(A_1\cup A_2)^{\triangleright}=A_1^{\triangleright}\cap_{cp}A_2^{\triangleright}=(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)$。另外,由于$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$是一个 *AE-cp*-近似概念,这使得$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2))^{\triangleleft}=(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft}=((X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cup(X_2,Y_2)^{\triangleleft})^{\triangleright\triangleleft}$成立。又由结论(2)可知,$(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cup(X_2,Y_2)^{\triangleleft}\subseteq((X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cup(X_2,Y_2)^{\triangleleft})^{\triangleright\triangleleft}$,因此$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2))^{\triangleleft}\supseteq(X_1,Y_1)^{\triangleleft}\cup(X_2,Y_2)^{\triangleleft}$。

对于不完备形式背景$\Bbbk=(G,M,\{+,?,-\},I)$,所有 *AE-cp*-近似概念间的偏序关系定义为:

$((X_1,Y_1),A_1)\leqslant((X_2,Y_2),A_2)\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2\Leftrightarrow(X_1,Y_1)\leqslant_{cp}(X_2,Y_2)$

此时,称$((X_1,Y_1),A_1)$是$((X_2,Y_2),A_2)$的一个子概念,$((X_2,Y_2),A_2)$是$((X_1,Y_1),A_1)$的一个超概念。

在偏序关系$\leqslant$下,所有的 *AE-cp*-近似概念构成一个偏序集,用 *AE-cp-AL*($\Bbbk$)表示,其结构用定理 1 描述。

**定理 1** 偏序集 *AE-cp-AL*($\Bbbk$)是一个完备格,对任意的$((X_1,Y_1),A_1),((X_2,Y_2),A_2)\in$ *AE-cp-AL*($\Bbbk$),$((X_1,Y_1),A_1)\wedge((X_2,Y_2),A_2)=((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$,$((X_1,Y_1),A_1)\vee((X_2,Y_2),A_2)=(((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2))^{\triangleleft\triangleright},A_1\cap A_2)$。

证明:因为形式背景$\Bbbk$的有限性,所以偏序集 *AE-cp-AL*($\Bbbk$)是有限的。*AE-cp-AL*($\Bbbk$)是完备格的前提是 *AE-cp-AL*($\Bbbk$)是一个格。

一方面,对任意的 *AE-cp*-近似概念$((X,Y),A)$,都有$(X,Y)=A^{\triangleright}$,因此$(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)=A_1^{\triangleright}\cap_{cp}A_2^{\triangleright}$。此外,$(A_1\cup A_2)^{\triangleright}=A_1^{\triangleright}\cap_{cp}A_2^{\triangleright}=(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)$。故可得$((X_2,Y_2)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$是一个 *AE-cp*-近似概念。

另一方面,因为$(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)$是$(X_1,Y_1)$和$(X_2,Y_2)$的一个子集,所以$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$是$((X_1,Y_1),A_1)$和$((X_2,Y_2),A_2)$的一个子概念。从而$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$也是$((X_1,Y_1),A_1)$和$((X_2,Y_2),A_2)$的一个下界。另外,对$((X_1,Y_1),A_1)$和$((X_2,Y_2),A_2)$的任意一个下界$((X,Y),A)$,$(X,Y)$都是$(X_1,Y_1)$和$(X_2,Y_2)$的子集,即$(X,Y)\subseteq(X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2)$。由此可推出$((X,Y),A)\leqslant((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$。因此,$((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$是$((X_1,Y_1),A_1)$和$((X_2,Y_2),A_2)$最大的下界。

综上,可得$((X_1,Y_1),A_1)\wedge((X_2,Y_2),A_2)=((X_1,Y_1)\cap_{cp}(X_2,Y_2),(A_1\cup A_2)^{\triangleright\triangleleft})$。

最小上界的情况类似可证。

完备格 *AE-cp-AL*($\Bbbk$)称为 *AE-cp*-近似概念格。可以看出,*AE-cp*-近似概念通过两种不同类型的对象集来表征属性,即$A$是$X$中对象共同具有和$Y$中对象可能具有的属性全体。因此,本研究又被称为共同-可能概念分析。

## 2.2 对象诱导的 *cp*-近似概念

根据 *AE-cp*-近似算子的定义,类似可定义 *OE-cp*-近似子。

设$M$为非空有限属性集,对任意$(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in 2^M\times 2^M$,定义:

$(A_1,B_1)\leqslant_{cp}(A_2,B_2)\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2,B_1\supseteq B_2$

$(A,B_1)\cap_{cp}(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2,B_1\cup B_2)$

$(A_1,B_1)\cup_{cp}(A_2,B_2)=(A_1\cup A_2,B_1\cap B_2)$

**定义 12** 设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景,定义对象诱导的 *cp*-近似算子,其中,$\triangleright$:$2^G\to 2^M\times 2^M$,$\triangleleft$:$2^M\times 2^M\to 2^G$。$\forall X\in 2^G$,$(A,B)\in 2^M\times 2^M$,$X^{\triangleright}=(X^{*+},X^{\Diamond+?})$,$(A,B)^{\triangleleft}=A^{*+}\cap B^{\Box+?}$。如果$X^{\triangleright}=(A,B)$且$(A,B)^{\triangleleft}=X$,则称$(X,(A,B))$为对象诱导的共同-可能近似概念,简记为 *OE-cp*-近似概念。

在上述定义中,$A$是$X$中的对象共同确定拥有的最大属性集,$B$是$X$中的对象可能拥有的最大属性集。类似于性质 3,由 *OE-cp*-近似算子可得性质 4。

**性质 4** 设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景,以下结论成立:$\forall X,X_1,X_2\subseteq 2^G$和$(A,B),(A_1,B_1),(A_2,B_2)\subseteq 2^M\times 2^M$。

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_1^{\triangleright}\geqslant_{cp}X_2^{\triangleright}$,$(A_1,B_1)\leqslant_{cp}(A_2,B_2)\Rightarrow(A_1,B_1)^{\triangleleft}\supseteq(A_2,B_2)^{\triangleleft}$;

(2) $X\subseteq X^{\triangleright\triangleleft}$,$(A,B)\leqslant_{cp}(A,B)^{\triangleleft\triangleright}$;

(3) $X^{\triangleright}=X^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$,$(A,B)^{\triangleleft}=(A,B)^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$;

(4) $\triangleright$和$\triangleleft$形成$(2^G,\subseteq)$和$(2^M\times 2^M,\leqslant_{cp})$之间的一对 *Galois* 连接;

(5) $(X_1\cup X_2)^{\triangleright}=X_1^{\triangleright}\cap_{cp}X_2^{\triangleright}$,$((A_1,B_1)\cup_{cp}(A_2,B_2))^{\triangleleft}=(A_1,B_1)^{\triangleleft}\cap(A_2,B_2)^{\triangleleft}$;

(6) $(X_1\cap X_2)^{\triangleright}\geqslant_{cp}X_1^{\triangleright}\cup_{cp}X_2^{\triangleright}$,$((A_1,B_1)\cap_{cp}(A_2,B_2))^{\triangleleft}\supseteq(A_1,B_1)^{\triangleleft}\cup_{cp}(A_2,B_2)^{\triangleleft}$。

对于不完备的形式背景$(G,M,\{+,?,-\},I)$,*OE-cp*-近似概念间的偏序关系定义为:

$(X_1,(A_1,B_1))\leqslant(X_2,(A_2,B_2))\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow(A_1,B_1)\geqslant_{cp}(A_2,B_2)$

容易知道,所有的 *OE-cp*-近似概念关于偏序$\leqslant$构成一个偏序集,用 *OE-cp-AL*$(G,M,\{+,?,-\},I)$表示。对任意的$(X_1,(A_1,B_1)),(X_2,(A_2,B_2))\in$ *OE-cp-AL*$(G,M,\{+,?,-\},I)$,它们的上下确界定义为:

$(X_1,(A_1,B_1)\wedge(X_2,(A_2,B_2)=(X_1\cap X_2,((A_1,B_1)\cup_{cp}(A_2,B_2))^{\triangleleft\triangleright})$

$(X_1,(A_1,B_1)\vee(X_2,(A_2,B_2)=((X_1\cup X_2)^{\triangleright\triangleleft},(A_1,B_1)\cap_{cp}(A_2,B_2))$

不完备形式背景$(G,M,\{+,?,-\},I)$的所有 *OE-cp*-近似概念连同它们之间的偏序$\leqslant$关系构成一个完备格,称为不完备形式背景$(G,M,\{+,?,-\},I)$的 *OE-cp*-近似概念格,用 *OE-cp-AL*$(G,M,\{+,?,-\},I)$表示。

**命题 1** 设$(G,M,\{+,?,-\},I)$为不完备形式背景,$p\in M$,则$(p^{*},(p^{**}),p^{*+?}))$为由属性生成的 *OE-cp*-近似概念,$(\bar{p}^{*+?},(\bar{p}^{*+?},\bar{p}^{*+?*+?}))$为由$\bar{p}$生成的 *OE-cp*-近似概念,其中,$\bar{p}=M-\{p\}$。

一般地,记$\{+,?,-\}$为$V$,则$(G,M,\{+,?,-\},I)$可写为$(G,M,V,I)$。

例 1 表 1 列出了不完备形式背景$(G,M,V,I)$,其中对

象集 $G=\{1,2,3,4\}$ 为 4 位患有甲流的病人的集合，属性集 $M=\{a,b,c,d,e,f\}$ 为 6 种症状的集合（流涕、咳嗽、头疼、发热、咽痛以及鼻塞）。图 1 及图 2 分别给出了表 1 中不完备形式背景 $(G,M,V,I)$ 的 $OE$-$cp$-近似概念格和 $AE$-$cp$-近似概念格。

表 1 不完备形式背景 $(G,M,V,I)$

Table 1 Incomplete formal context $(G,M,V,I)$

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | − | + | + | − | + |
| 2 | ? | + | − | − | ? | ? |
| 3 | − | − | + | − | − | ? |
| 4 | + | + | − | − | + | − |

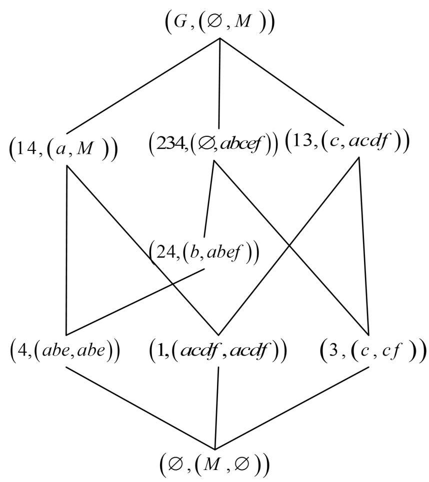


图 1 对象诱导的 $cp$-近似概念格

Fig. 1 $OE$-$cp$-$AL(G,M,V,I)$

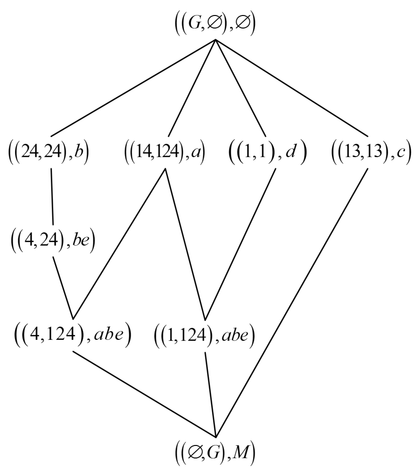


图 2 属性诱导的 $cp$-近似概念格

Fig. 2 $AE$-$cp$-$AL(G,M,V,I)$

## 3 *OE-cp*-近似概念与形式概念、面向属性概念的联系

不完备形式背景中的 $cp$-近似概念格在本质上也是经典形式背景中概念格模型的一个推广，它与经典概念、面向属性概念格有紧密的联系。本节将讨论 $OE$-$cp$-近似概念与经典概念、面向属性概念之间的关系。

类似于经典形式概念分析中的属性概念，下面的命题显然成立。

**命题 2** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，$p\in M$，则 $(p^*,p^{**})$ 为形式概念，$(\bar{p}^{\Box+?},\bar{p}^{\Box+?\Diamond+?})$ 为面向属性概念。

**定理 2** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，如果 $(X,A)$ 为最小完备化形式背景 $(G,M,I_*)$ 下的形式概念，$(Y,B)$ 为最大完备化形式背景 $(G,M,I^*)$ 下的面向属性概念，则 $(X,(A,X^{\Diamond+?}))$ 和 $(Y,(Y^*,B))$ 为 $OE$-$cp$-近似概念。

证明：因为 $(X,A)$ 为形式概念，所以有 $X^*=A$ 和 $A^*=X$。根据算子 $\Diamond$ 和 $\Box$ 的性质，有 $X\subseteq X^{\Diamond+?\Box+?}$，则 $X^{**}\cap X^{\Diamond+?\Box+?}=X$。因此，由定义 12，可得 $(X,(A,X^{\Diamond+?}))$ 为 $OE$-$cp$-近似概念。

因为 $(Y,B)$ 为面向属性概念，所以有 $Y^{\Diamond+?}=B$ 和 $B^{\Box+?}=Y$。根据性质 1 有 $Y\subseteq Y^{**}$，进而 $Y^{**}\cap B^{\Box+?}=Y$。因此，由定义 12，证得 $(Y,(Y^*,B))$ 为 $OE$-$cp$-近似概念。

**定理 3** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，如果 $(X,(A,B))$ 是一个 $OE$-$cp$-近似概念，则 $(A^*,A)$ 为形式概念，$(B^{\Box+?},B)$ 为面向属性概念。

证明：因为 $(X,(A,B))$ 是一个 $OE$-$cp$-近似概念，从而有 $X^*=A$ 和 $X^{\Diamond+?}=B$。因此 $(A^*,A)$ 为形式概念，$(B^{\Box+?},B)=(X^{\Diamond+?\Box+?},X^{\Diamond+?})$ 为面向属性概念。

**命题 3** 给定一个不完备形式背景 $\mathbb{k}=(G,M,\{+,?,-\},I)$，形式概念格、面向属性概念格和 $OE$-$cp$-近似概念格分别记为 $CL(\mathbb{k})$，$PCL(\mathbb{k})$ 和 $OE$-$cp$-$AL(\mathbb{k})$，其外延集合分别记为 $CL_E(\mathbb{k})$，$PCL_E(\mathbb{k})$ 和 $OE$-$cp$-$AL_E(\mathbb{k})$，则下列式子成立：

(1) $CL_E(\mathbb{k})\subseteq OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$；

(2) $PCL_E(\mathbb{k})\subseteq OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$；

(3) $CL_E(\mathbb{k})\cup PCL_E(\mathbb{k})\subseteq OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$。

证明：此处仅证结论(1)和(2)，结论(3)可由(1)和(2)直接得到。

(1)假设 $X\in CL_E(\mathbb{k})$，则有 $(X,X^*)\in CL(\mathbb{k})$。由定理 2，进一步得 $(X,(X^*,X^{\Diamond+?}))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(\mathbb{k})$，故 $X\in OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$。因此，$CL_E(\mathbb{k})\subseteq OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$。

(2)假设 $Y\in PCL_E(\mathbb{k})$，则有 $(Y,Y^{\Diamond+?})\in PCL(\mathbb{k})$。根据定理 2，得 $(Y,(Y^*,Y^{\Diamond+?}))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(\mathbb{k})$，故 $Y\in OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$。因此，$PCL_E(\mathbb{k})\subseteq OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$。

定理 2 说明了在形式概念和面向属性概念的基础上可以得到 $OE$-$cp$-近似概念，这样可以得到对象诱导的 $cp$-近似概念的另一种构造方法。相应的算法如算法 1 所示。

**算法 1** 由经典概念和面向属性概念生成对象诱导的 $cp$-近似概念

输入：不完备形式背景 $\mathbb{k}=(G,M,\{+,?,-\},I)$

输出：OE-cp-近似概念

1. 完备化 $\mathbb{k}$ 得到 $(G,M,I_*)$ 和 $(G,M,I^*)$；
2. 在 $(G,M,I_*)$ 和 $(G,M,I^*)$ 下分别构建 $CL(G,M,I_*)$ 和 $PCL(G,M,I^*)$；
3. 分别从 $CL(G,M,I_*)$ 和 $PCL(G,M,I^*)$ 中找出所有外延集合 $CL_E(G,M,I_*)$ 和 $PCL_E(G,M,I^*)$；
4. 在 $CL_E(G,M,I_*)$ 和 $PCL_E(G,M,I^*)$ 中各取集合作交运算形成 $OE\text{-}cp\text{-}AL_E(\mathbb{k})$；
5. 根据定理 2 及定义 12 生成对象诱导的 cp-近似概念。

例 2 利用表 1 所列的不完备形式背景对算法 1 作进一步的阐述。

1. 易得 $(G,M,I_*)$ 和 $(G,M,I^*)$。

2. 构建 $CL(G,M,I_*)$ 和 $PCL(G,M,I^*)$。

$CL(G,M,I_*)=\{(1,acdf),(24,b),(13,c),(4,abe),(14,a),(G,\emptyset),(\emptyset,M)\}$

$PCL(G,M,I^*)=\{(13,acdf),(24,abef),(3,cf),(4,abe),(234,abcef),(G,M),(\emptyset,\emptyset)\}$

3. 得到外延集合 $CL_E(G,M,I_*)$ 和 $PCL_E(G,M,I^*)$。

$CL_E(G,M,I_*)=\{1,24,13,4,14,G,\emptyset\}$

$PCL_E(G,M,I^*)=\{13,24,3,4,234,G,\emptyset\}$

4. 形成集合 $OE$-$cp$-$AL_E(\Bbbk)$。

$OE$-$cp$-$AL_E(\Bbbk)=\{13,24,3,4,234,1,14,G,\emptyset\}$

5. 生成 $OE$-$cp$-近似概念。

$OE$-$cp$-$AL(\Bbbk)=\{(13,(c,acdf)),(24,(b,abef),(1,(acdf,acdf),(4,(abe,abe),(234,(\emptyset,abcef),(3,(c,cf),(14,(a,M),(G,(\emptyset,M)),(\emptyset,(M,\emptyset))\}$

## 4 *OE-cp*-近似概念与对象诱导三支近似概念的联系

$cp$-近似概念格的构建体现了三支的思想，与三支概念有紧密的联系，本节将讨论 $OE$-$cp$-近似概念与不完备形式背景完备化处理之后得到的对象诱导的三支近似概念之间的联系。

**命题 4** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，则 $(p^*,(p^{**},p^{\overline{**+?}}))$ 和 $(\bar{p}^{\square+?},(\bar{p}^{\square+?*},\bar{p}^{\square+?\overline{*+?}}))$ 为两个对象诱导的三支近似概念。

证明：设 $X=p^*$，$(A,B)=(p^{**},p^{\overline{**+?}})$。一方面，$X^{\gtrdot}=(p^{**},p^{\overline{**+?}})=(A,B)$。另一方面，$(A,B)^{\lessdot}=p^{***}\cap p^{\overline{**+?*+?}}$。因为有 $p^{***}=p^*$ 和 $p^*\subseteq p^{\overline{**+?*+?}}$，可得到 $(A,B)^{\lessdot}=p^{***}\cap p^{\overline{**+?*+?}}=p^*=X$。因此，$(p^*,(p^{**},p^{\overline{**+?}}))$ 为一个对象诱导的三支近似概念。同理，可证得 $(\bar{p}^{\square+?},(\bar{p}^{\square+?*},\bar{p}^{\square+?\overline{*+?}}))$ 也为一个对象诱导的三支近似概念。

由命题 4，给定一个不完备的形式背景，基于 $(p^*,(p^{**},p^{\overline{**+?}}))\mid p\in M\}$ 和 $\{(\bar{p}^{\square+?},(\bar{p}^{\square+??*},\bar{p}^{\square+?\overline{*+?}}))\mid p\in M\}$ 可以推导出所有的三支近似概念。另外，由于 $\overline{(\cdot)^{\Diamond+?}}=(\cdot)^{\overline{*+?}}$，可以直接得到下面的推论和命题。

**推论 1** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，则 $(p^*,(p^{**},p^{*\Diamond+?}))$ 和 $(\bar{p}^{\square+?},(\bar{p}^{\square+?*},\bar{p}^{\square+?\overline{\Diamond+?}}))$ 为两个对象诱导的 $cp$-近似概念。

**命题 5** 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为不完备形式背景，$p\in M$，$(X,(A,B))$ 是一个 $OE$-$cp$-近似概念当且仅当 $(X,(A,\bar{B}))$ 是一个对象诱导的三支近似概念。

证明：$(X,(A,B))$ 是 $OE$-$cp$-近似概念，

$\Leftrightarrow X^*=A,X^{\Diamond+?}=B$ 且 $A^*\cap B^{\square+?}=X$

$\Leftrightarrow X^*=A,X^{\overline{\Diamond+?}}=\bar{B}\subseteq x^{\overline{\Diamond+?}}$

且 $A^*\cap\{x\in G\mid x^{*+?}\subseteq B\}=X$

$\Leftrightarrow X^*=A,\{a\in M\mid\forall x\in X,I(x,a)=-\}=\bar{B}$

且 $A^*\cap\{x\in G\mid\bar{B}\subseteq x^{\overline{*+?}}\}=X$

$\Leftrightarrow X^*=A,X^{\overline{\Diamond+?}}=\bar{B}$ 且 $\bar{B}^{\bar{*}}=X$

$\Leftrightarrow(X,(A,\bar{B}))$ 是对象诱导的三支近似概念。

例 3 利用表 1 所列的不完备形式背景和图 1 所示的 $OE$-$cp$-近似概念格进一步阐述命题 5。表 2 列出了表 1 所列的不完备形式背景最大完备化下的补形式背景 $(G,M,\bar{I^*})$。

表 2 补形式背景 $(G,M,\bar{I^*})$

Table 2 Complementary formal context $(G,M,\bar{I^*})$

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | − | + | − | − | + | − |
| 2 | − | − | + | + | − | − |
| 3 | + | + | − | + | + | − |
| 4 | − | − | + | + | − | + |

通过表 3 的直观对比可进一步说明 $OE$-$cp$-近似概念和 $OE$-近似概念之间的内在联系。

表 3 对比表

Table 3 Comparison table

| $OE$-$cp$-近似概念 $(X,(A,B))$ | $OE$-近似概念 $(X,(A,\bar{B}))$ |
|---|---|
| $(1,(acdf,acdf))$ | $(1,(acdf,be))$ |
| $(24,(b,abef))$ | $(24,(b,cd))$ |
| $(13,(c,acdf))$ | $(13,(c,be))$ |
| $(14,(a,M))$ | $(14,(a,\emptyset))$ |
| $(234,(\emptyset,abcef))$ | $(234,(\emptyset,d))$ |
| $(3,(c,cf))$ | $(3,(c,abde))$ |
| $(4,(abe,abe))$ | $(4,(abe,cdf))$ |

根据以上讨论可知，可以直接在不完备的形式背景中进行 $cp$-近似形式概念分析。之前在不完备形式背景中多数利用正算子在最小和最大完备化背景下定义三支近似概念或者利用正算子及其补算子定义三支近似概念，这都是对不完整信息的一个近似处理，因此本文直接利用粗糙集理论中的必然-可能性算子来近似处理不完备形式背景中存在的不完整数据，具有一定的实用性。接下来将在不完备的形式背景中直接进行规则获取研究。

## 5 不完备决策形式背景中基于协调性的规则获取

基于决策形式背景的决策规则获取是形式概念分析中的一个重要研究课题，在三支概念分析中具有重要的理论意义和应用价值。已有许多研究先对不完备形式背景进行信息补全，然后进行知识获取。而本文的创新之处在于提出了一种新的利用粗糙集理论中的必然-可能性算子来直接近似处理不完备形式背景中存在的不完整数据的模型，可以直接在不完备的形式背景中进行近似形式概念分析，具有一定的实用性。

本节将在不完备决策形式背景下定义两种协调性(强协调性和 $OE$-$cp$-协调性)，基于 $OE$-$cp$-近似概念研究正规则和可能性规则的获取，并讨论 $OE$-$cp$-协调性下获得的规则与强协调性下的规则之间的关系。

### 5.1 基于强协调性的规则获取

本节在完备化形式背景中进行讨论，利用在最小完备化条件形式背景和决策形式背景下定义的形式概念，给出强协调的不完备决策形式背景的定义。

为了叙述需要，下文用 $CL(G,M,I_*)$ 和 $CL(G,N,J_*)$

分别表示不完备形式背景$(G,M,V,I)$和$(G,N,V,J)$最小完备化之后得到的概念格。

受文献[34]启发，在不完备形式背景中引入如下概念。

**定义 13** 设$(G,M,V,I)$和$(G,N,V,J)$为不完备形式背景，如果对任意的$(Y,B)\in CL(G,N,J_*)$，存在$(X,A)\in CL(G,M,I_*)$，满足$X=Y$，则称$CL(G,M,I_*)$细于$CL(G,N,J_*)$，记作$CL(G,M,I_*)\leqslant CL(G,N,J_*)$。

下文在不完备决策形式背景中定义强协调性。

**定义 14** 设$(G,M,N,V,I,J)$是不完备的决策形式背景，$(G,M,V,I)$和$(G,N,V,J)$为两个不完备形式背景，$M$为条件属性集，$N$为决策属性集，$V$为属性值的全体。进而，如果$CL(G,M,I_*)\leqslant CL(G,N,J_*)$，则称$(G,M,N,V,I,J)$是一个强协调的不完备决策形式背景。

**定义 15** $(G,M,N,V,I,J)$是一个强协调的不完备决策形式背景。如果两个概念$(X,A)\in CL(G,M,I_*)$和$(Y,B)\in CL(G,N,J_*)$满足$X\subseteq Y$，则称$A\Rightarrow B$是一个决策规则，读作如果$A$，则$B$。

当在强协调的不完备决策形式背景下分析规则时，会发现某些规则后件相同，但会有更小的前件，或者前件相同，有更大的后件。这就意味着具有较小前件、较大后件的规则会比较紧凑。由此，下文定义规则的冗余性。

**定义 16** 假设$(G,M,N,V,I,J)$为强协调的不完备决策形式背景。如果两条决策规则$A\Rightarrow B$和$A'\Rightarrow B'$满足$A\subseteq A'$和$B\supseteq B'$，则称$A\Rightarrow B$蕴含$A'\Rightarrow B'$，即$A'\Rightarrow B'$是冗余的。

### 5.2 基于 *OE-cp*-协调的决策形式背景的规则获取

一般来说，当获取决策规则时，需要一个协调的决策形式背景，此时所获取的规则不会引起矛盾。因此，本节在协调的不完备形式背景中定义近似决策规则。

**定义 17** 设$(G,M,N,V,I,J)$为不完备决策形式背景，$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$和$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$为$OE\text{-}cp$-近似概念格。对任意的$(Y,(C,D))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$，如果存在$(X,(A,B))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$，满足$X=Y$，则称$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$细于$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$，记作$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)\leqslant OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$，此时称不完备决策形式背景$(G,M,N,V,I,J)$是对象诱导的共同-可能协调的(简称$OE\text{-}cp$-协调)。

例 4 表 4 列出了一个不完备决策形式背景，它的条件部分由表 1 列出。图 3 给出了不完备决策形式背景$(G,N,V,J)$的$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$，从图 1 和图 3 可得$OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)\leqslant OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$。因此，不完备决策形式背景$\mathbb{k}$是$OE\text{-}cp$-协调的。

表 4 不完备决策形式背景$\mathbb{k}=(G,M,N,V,I,J)$

Table 4 Incomplete decision formal context $\mathbb{k}=(G,M,N,V,I,J)$

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $h$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | − | + | + | − | + | + | − | + | + |
| 2 | ? | + | − | − | ? | ? | − | + | ? | ? |
| 3 | − | − | + | − | − | ? | + | − | − | + |
| 4 | + | + | − | − | + | − | + | + | ? | − |

**定义 18** 设$(G,M,N,V,I,J)$是$OE\text{-}cp$-协调的不完备决策形式背景。对于$OE\text{-}cp$-近似概念$(X,(A,B))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$和$(Y,(C,D))\in OE\text{-}cp\text{-}AL(G,N,V,J)$，如果它们满足$X\subseteq Y$，则有两条决策规则。一条是$A\Rightarrow C(C\neq\emptyset)$，称为对象诱导的正$cp$-近似决策规则(简称为$OE\text{-}P\text{-}cpA$决策规则)，读作如果$A$，则$C$，所有$OE\text{-}P\text{-}cpA$决策规则的集合记为$OE\text{-}P\text{-}cpAR$。另外一条为$may\ B\Rightarrow may\ D(D\neq\emptyset)$，叫对象诱导的可能$cp$-近似决策规则(简称$OE\text{-}M\text{-}cpA$决策规则)，读作如果$may\ B$，则$may\ D$，所有$OE\text{-}M\text{-}cpA$决策规则的集合记为$OE\text{-}M\text{-}cpAR$。$OE\text{-}P\text{-}cpA$和$OE\text{-}M\text{-}cpA$决策规则统称为对象诱导的$cp$-近似决策规则(简称为$OE\text{-}cpA$决策规则)，所有$OE\text{-}cpA$决策规则的集合记为$OE\text{-}cpAR$。

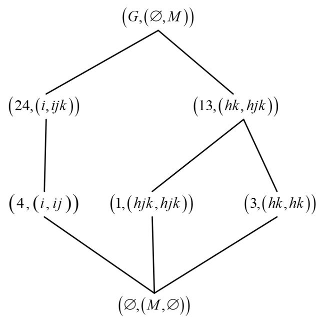


图 3 对象诱导的$cp$-近似概念格

Fig. 3 $OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$

$OE\text{-}cpA$决策规则中也存在冗余规则。冗余$OE\text{-}P\text{-}cpA$决策规则类似于定义 16 中给出的强协调下的冗余规则，冗余$OE\text{-}M\text{-}cpA$决策规则的解释为定义 19。

**定义 19** 设$(G,M,N,V,I,J)$是$OE\text{-}cp$-协调的不完备决策形式背景。如果$OE\text{-}M\text{-}cpA$决策规则$may\ B\Rightarrow may\ D(D\neq\emptyset)$和$may\ B'\Rightarrow may\ D'$满足$B\subseteq B'$和$D\supseteq D'$，则称$may\ B\Rightarrow may\ D$蕴含$may\ B'\Rightarrow may\ D'$，此时规则$may\ B'\Rightarrow may\ D'$是冗余的。

例 5 (接例 4)例 4 表明，表 4 所列的不完备决策形式背景是$OE\text{-}cp$-协调的。利用图 1、图 3 和定义 18，可以得到表 5 所列的所有$OE\text{-}cp$-近似决策规则$OE\text{-}cpAR$。再由定义 19 得到$OE\text{-}cpAR$的所有非冗余近似决策规则，如表 6 所列。表 6 中，为了简便，用属性集中的字母字符串来表示属性集。

表 5 $OE\text{-}cp$-近似决策规则

Table 5 $OE\text{-}cp$-approximation decision rules

| 正$cp$-近似决策规则 $OE\text{-}P\text{-}cpA$ | 可能性$cp$-近似决策规则 $OE\text{-}M\text{-}cpA$ |
|---|---|
| $c\Rightarrow hk$ | $may\ acdf\Rightarrow may\ hjk$ |
| $b\Rightarrow i$ | $may\ abef\Rightarrow may\ ijk$ |
| $abe\Rightarrow i$ | $may\ abe\Rightarrow may\ ij$ |
| $acdf\Rightarrow hjk$ | $may\ cf\Rightarrow may\ hk$ |

表 6 非冗余$OE\text{-}cp$-近似决策规则

Table 6 Non-redundant $OE\text{-}cp$-approximation decision rules

| 正$cp$-近似决策规则 $OE\text{-}P\text{-}cpA$ | 可能性$cp$-近似决策规则 $OE\text{-}M\text{-}cpA$ |
|---|---|
| $c\Rightarrow hk$ | $may\ acdf\Rightarrow may\ hjk$ |
| $b\Rightarrow i$ | $may\ abef\Rightarrow may\ ijk$ |
| $acdf\Rightarrow hjk$ | $may\ abe\Rightarrow may\ ij$, $may\ cf\Rightarrow may\ hk$ |

### 5.3 强协调与 OE-cp-协调的不完备决策形式背景下的规则比较

本节主要比较在强协调与 OE-cp-协调情况下获得的规则。先推广文献[34]中的一个引理，它从序和代数结构的角度揭示了 OE-cp-近似概念格与完备化形式背景中概念格之间的关系。

**引理 1** 设$(G,M,V,I)$为不完备形式背景，存在从 $CL(G,M,I_*)$到 $OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$的一个保∧序嵌入。

证明：定义$\varphi_1:CL(G,M,I_*)\Rightarrow OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$，即$\varphi_1((X,A))=(X,(A,X^{\Diamond+?}))$。

首先，$\forall(X,A),(X_1,A_1)\in CL(G,M,I_*)$，一方面，$\varphi_1((X,A)\wedge(X_1,A_1))=\varphi_1(X\cap X_1,(A\cup A_1)^{*+*+})=(X\cap X_1,((A\cup A_1)^{*+*+},(X\cap X_1)^{\Diamond+?}))$。另一方面$\varphi_1((X,A)\wedge\varphi_1((X_1,A_1)=(X,(A,X^{\Diamond+?})\wedge(X_1,(A_1,X_1^{\Diamond+?})=(X\cap X_1,((A,X^{\Diamond+?})\cup(A_1,X_1^{\Diamond+?}))^{\triangleleft\triangleright})=(X\cap X_1,(A\cup A_1,X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\triangleleft\triangleright})=(X\cap X_1,((A\cup A_1)^{*+}\cap(X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\Box+?})^{\triangleright})=(X\cap X_1,(((A\cup A_1)^{*+}\cap(X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\Box+?})^{*+},((A\cup A_1)^{*+}\cap(X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\Box+?})^{\Diamond+?}))$。由性质 1 和性质 2，有$(A\cup A_1)^{*+}=A^{*+}\cap A_1^{*+}=X\cap X_1$，$(X^{\Diamond+?}\cap Y^{\Diamond+?})^{\Box+?}=X^{\Diamond+?\Box+?}\cap Y^{\Diamond+?\Box+?}$。由性质 2 知 $X\cap X_1\subseteq X^{\Diamond+?\Box+?}\cap X_1^{\Diamond+?\Box+?}$。因此$((A\cup A_1)^{*+}\cap(X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\Box+?})^{*+}=(A\cup A_1)^{*+*+}$，以及$((A\cup A_1)^{*+}\cap(X^{\Diamond+?}\cap X_1^{\Diamond+?})^{\Box+?})^{\Diamond+?}=(X\cap X_1)^{\Diamond+?}$，从而$\varphi_1((X,A)\wedge(X_1,A_1))=\varphi_1((X,A))\wedge\varphi_1((X_1,A_1))$，$\varphi_1$是保∧映射。

其次，$(X,A)\leqslant(X_1,A_1)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_1\Leftrightarrow(X,(A,X^{\Diamond+?}))\leqslant(X_1,(A_1,X_1^{\Diamond+?}))\Leftrightarrow\varphi_1((X,A))\leqslant\varphi_1((X_1,A_1))$。这说明$\varphi_1$是 $CL(G,M,I_*)$到 $OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$的一个序嵌入。

综上，引理得证。

**引理 2** 设$(G,M,V,I)$为不完备的形式背景，存在从 $PCL(G,M,V,I)$到 $OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$的一个保∧序嵌入。

证明：定义$\varphi_2:PCL(G,M,I^*)\Rightarrow OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$，即 $\varphi_2((Y,C))=(Y,(Y^{*+},C))$。

首先，$\forall(Y,C),(Y_1,C_1)\in PCL(G,M,I^*)$，一方面，$\varphi_2((Y,C)\wedge(Y_1,C_1))=\varphi_2(Y\cap Y_1,(C\cap C_1)^{\Box+?\Diamond?+?})=(Y\cap Y_1,((Y\cap Y_1)^{*+},(C\cap C_1)^{\Box+?\Diamond+?}))$。另一方面，$\varphi_2((Y,C))\wedge\varphi_2((Y_1,C_1))=(Y,(Y^{*+},C))\wedge(Y_1,(Y_1^{*+},C_1))=(Y\cap Y_1,((Y^{*+},C)\cup(Y_1^{*+},C_1))^{\triangleleft\triangleright})=(Y\cap Y_1,(Y^{*+}\cup Y_1^{*+},C\cap C_1)^{\triangleleft\triangleright})=(Y\cap Y_1,((Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}\cap(C\cap C_1)^{\Box+?})^{\triangleright})=(Y\cap Y_1,(((Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}\cap(C\cap C_1)^{\Box+?})^{*+},((Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}\cap(C\cap C_1)^{\Box+?})^{\Diamond+?}))$。由性质 1 和性质 2 有$(C\cap C_1)^{\Box+?}=C^{\Box+?}\cap C_1^{\Box+?}=Y\cap Y_1$，$(Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}=Y^{*+*+}\cap Y_1^{*+*+}$。又$Y\subseteq Y^{*+*+}$，$Y_1\subseteq Y_1^{*+*+}$，得 $Y\cap Y_1\subseteq(Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}$。因此$(((Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}\cap(C\cap C_1)^{\Box+?}))^{*}=(Y\cap Y_1)^{*+}$，以及$((Y^{*+}\cup Y_1^{*+})^{*+}\cap(C\cap C_1)^{\Box+?})^{\Diamond+?}=(C\cap C_1)^{\Box+?\Diamond+?}$，从而$\varphi_2((Y,C)\wedge(Y_1,C_1)=\varphi_2((Y,C)\wedge\varphi_2((Y_1,C_1))$，$\varphi_2$是保 ∧映射。

其次，$(Y,C)\leqslant(Y_1,C_1)\Leftrightarrow Y\subseteq Y_1\Leftrightarrow(Y,(Y^{*+},C_1))\leqslant(Y_1,(Y_1^{*+},C_1))\Leftrightarrow\varphi_2((Y,C))\leqslant\varphi_2((Y_1,C_1))$。这说明$\varphi_2$是 $PCL(G,M,I^*)$到 $OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$的一个序嵌入。

综上，引理得证。

**定理 4** 设$(G,M,N,V,I,J)$是不完备决策形式背景，它既是强协调又是 OE-cp-协调。$IAR$ 表示在强协调下得到的所有决策规则，$OE\text{-}P\text{-}cpAR$ 表示在 OE-cp-协调下得到的所有正的近似决策规则，则 $IAR\subseteq OE-P-cpAR$。

证明：因为$(G,M,N,V,I,J)$为强协调，对任意 $A\Rightarrow C\in IAR$，必存在概念$(X,A)\in CL(G,M,I_*)$和$(Y,C)\in CL(G,M,J_*)$，满足 $X\subseteq Y$。

由引理 2 知，存在两个保交序嵌入$\varphi_1{}':CL(G,M,I_*)\Rightarrow OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$，$\varphi_1{}'':CL(G,M,V,I)\Rightarrow OE\text{-}cp\text{-}AL(G,M,V,I)$，使得$\varphi_1{}'((X,A))=(X,(A,X^{\Diamond+?}))$以及$\varphi_1{}''((Y,C))=(Y,(C,Y^{\Diamond+?}))$。根据定义 18，有 $A\Rightarrow C\in OE\text{-}cpAR$，$may\ X^{\Diamond+?}\Rightarrow may\ Y^{\Diamond+?}\in OE\text{-}cpAR$。进而，$A\Rightarrow C\in OE\text{-}P\text{-}cpAR$。因此 $IAR\subseteq OE\text{-}P\text{-}cpAR$。

定理 4 表明，基于 OE-cp-协调性获得的 OE-P-cp 近似决策规则包含所有基于强协调性获得的决策规则。这意味着在不完备决策形式背景中提取 OE-P-cp 近似决策规则比将形式背景完备化之后提取的决策规则更完整。

例 6(接例 5) 考虑表 5 所列的 OE-cp-协调的不完备决策形式背景𝕜$=(G,M,N,V,I,J)$。概念格 $CL(G,M,I_*)$和 $CL(G,N,J_*)$如图 4 和图 5 所示。由于 $CL(G,M,I_*)\leqslant CL(G,N,J_*)$，所以不完备决策形式背景𝕜也是强协调的。根据定义 15 可以得到所有决策规则 $IAR$，如表 7 所列。在例 5 中已经给出了 $OE\text{-}cpAR$，容易看出 $IAR\subseteq OE\text{-}cpAR$，因为实际上 $IAR\subseteq OE\text{-}P\text{-}cpAR$。

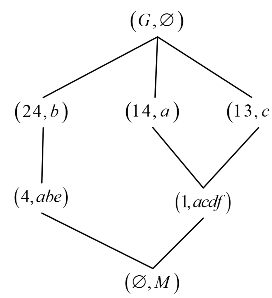


图 4 概念格 $CL(G,M,I_*)$

Fig. 4 $CL(G,M,I_*)$

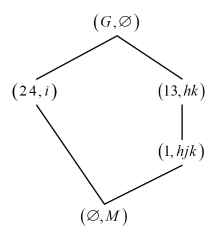


图 5 概念格 $CL(G,N,I_*)$

Fig. 5 $CL(G,N,I_*)$

表 7 IAR

Table 7 IAR

| 强协调不完备决策形式背景的决策规则 |
| --- |
| $b\Rightarrow i$ |
| $c\Rightarrow hk$ |
| $acdf\Rightarrow hjk$ |

**结束语**　数据的丢失是日常生活和工作中经常遇到的问题，本文对不完备形式背景进行了知识获取研究。为了丰富不完备形式背景的知识获取模型，首先，在不完备的形式背景中利用正算子和粗糙近似算子结合得到了 $OE$-$cp$-近似算子和 $AE$-$cp$-近似算子，构造了 $OE$-$cp$-近似概念格和 $AE$-$cp$-近似概念格；讨论了 $OE$-$cp$-近似概念与形式概念、面向属性概念、对象诱导的三支近似概念之间的联系；给出了由形式概念和面向属性概念构造 $OE$-$cp$-近似概念的算法。其次，在不完备的决策形式背景中定义了强协调性和 $OE$-$cp$-协调性，并在两种协调下进行了规则提取，所提取的可能性规则丰富了原有的正负规则，使得规则形式和语义更加完整；进而得到了 $OE$-$cp$-协调下的近似决策规则与强协调下的决策规则的关系。

本文仅考虑了基于 $OE$-$cp$-近似概念的规则研究，未来将对基于 $AE$-$cp$-近似概念的知识获取进行研究，另外，更多新的不完备背景的处理方法也值得探究。

## 参 考 文 献


[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[J]. Ordered Sets, 1982, 83: 445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis[M]. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[3] WILLE R. Concept lattices and conceptual knowledge systems [J]. Computers & Mathematics with Applications, 1992, 23(6/7/8/9): 493-515.

[4] WILLE R. Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5548(1): 314-339.

[5] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.

[6] QUAN T T, NGO L N, HUI S C. An effective clustering-based approach for conceptual association rules mining[C]// IEEE-RIVF International Conference on Computing and Communication Technologies. IEEE, 2009: 1-7.

[7] RICHARDS D, MALIK U. Multi-level knowledge discovery from rule bases[J]. Applied Artificial Intelligence, 2003, 17(3): 181-205.

[8] WILLE R. Why can concept lattices support knowledge discovery in databases? [J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2/3): 81-92.

[9] ZHAO Y X, LI J H, LIU W Q, et al. Cognitive concept learning from incomplete information[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 159-170.

[10] ZHI H L, LI J H. Granule description based knowledge discovery from incomplete formal contexts via necessary attribute analysis[J]. Information Sciences, 2019, 485: 347-361.

[11] CARPINETO C, ROMANO G. Exploiting the potential of concept lattices for information retrieval with CREDO[J]. Journal of Universal Computer Science, 2004, 10(8): 985-1013.

[12] KUZNETSOV S O. Machine learning on the basis of formal concept analysis[J]. Automation and Remote Control, 2001, 62(10): 1543-1564.

[13] SAMPATH S, SPRENKLE S, GIBSON E, et al. Applying concept analysis to user-session-based testing of web applications [J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2007, 33(10): 643-658.

[14] SNELTING G. Reengineering of configurations based on mathematical concept analysis[J]. ACM Transactions on Software Engineering and Methodology, 1996, 5(2): 146-189.

[15] JAN K. On efficient factorization of standard fuzzy concept lattices and attribute-oriented fuzzy concept lattices[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2018, 351: 108-121.

[16] MAO H, ZHENG Z. The construction of fuzzy concept lattice based on weighted complete graph[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2019, 36(6): 5797-5805.

[17] QI J J, QIAN T, WEI L. The connections between three-way and classical concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151.

[18] QI J J, WEI L, REN R S. 3-way concept analysis based on 3-valued formal contexts[J]. Cognitive Computation, 2021, 14(6): 1900-1912.

[19] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way formal concept analysis [C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer, 2014: 732-741.

[20] SHAO M W, LV M M, LI K W, et al. The construction of attribute (object)-oriented multi-granularity concept lattices[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 1017-1032.

[21] BURMEISTER P, HOLZER R. On the treatment of incomplete knowledge in formal concept analysis[C]// International Conference on Conceptual Structures. Springer, 2000: 385-398.

[22] LI J H, MEI C L, LV Y J. Incomplete decision contexts: approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165.

[23] LI J H, HUANG C C, MEI C L, et al. An intensive study on rule acquisition in formal decision contexts based on minimal closed label concept lattices[J]. Intelligent Automation & Soft Computing, 2017, 23(3): 519-533.

[24] OBIEDKOV S. Modal logic for evaluating formulas in incomplete contexts[C]// International Conference on Conceptual Structures. Springer, 2002: 314-325.

[25] DUBOIS D, SAINT-CYR F, PRADE H. A possibility-theoretic view of formal concept analysis[J]. Fundamenta Informaticae, 2007, 75(1/2/3/4): 195-213.

[26] LI M Z, WANG G Y. Approximate concept construction with three-way decisions and attribute reduction in incomplete contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 165-178.

[27] LI C P, LI J H, HE M. Concept lattice compression in incomplete contexts based on k-medoids clustering[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2016, 7(4): 539-552.

[28] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in in-

complete contexts[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2017,8(1):3-20.
[29] REN R S,WEI L,YAO Y Y. An analysis of three types of partially-known formal concepts[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2018,9(11):1767-1783.
[30] WANG Z,WEI L,QI J J,et al. Attribute reduction of SE-ISI concept lattices for incomplete contexts[J]. Soft Computing,2020,24(20):15143-15158.
[31] YANG D Q,YANG X R,JIA H,et al. Construction of fuzzy linguistic approximate concept lattice in an incomplete fuzzy linguistic formal context[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems,2022,15(1):1-9.
[32] REN Y,LI J H,KUMAR C A,et al. Rule acquisition in formal decision contexts based on formal,object-oriented and property-oriented concept lattices[J/OL]. The Scientific World Journal,2014,2014:1-10. http://dx. doi. org/10. 1155/2014/685362.
[33] HU Q,QIN K Y,YANG H,et al. A novel approach to attribute reduction and rule acquisition of formal decision context[J/OL]. https://doi. org/10. 1007/s10489-022-04139-2.
[34] WEI L,LIU L,QI J J,et al. Rules acquisition of formal decision contexts based on three-way concept lattices[J]. Information Sciences,2020,516:529-544.
[35] SHAO M W,LEUNG Y,WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):259-274.
[36] ZHANG W X,WEI L,QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China Series F:Information Sciences,2005,48(6):713-726.
[37] HE X L,LIU Z Y,QIAN T. Rule Acquisition of Property Oriented Concept Lattice Based on Three-Way Decision[J]. Computer Engineering and Applications,2022,(19):152-157.

**NIU Lihui**, born in 1996, master. Her main research interests include concept lattice, granular computing and so on.

**MI Jusheng**, born in 1966, Ph.D, second grade professor, Ph. D supervisor. His main research interests include rough set, concept lattice, granular computing, approximate reasoning and so on.

(责任编辑:喻藜)