

## 基于正则模糊划分的模糊系统及其逼近性质

彭小玉, 潘小东, 申涵寒, 何红梅

### 引用本文

彭小玉, 潘小东, 申涵寒, 何红梅. 基于正则模糊划分的模糊系统及其逼近性质[J]. 计算机科学, 2024, 51(2): 79-86.

PENG Xiaoyu, PAN Xiaodong, SHEN Hanhan, HE Hongmei. Fuzzy Systems Based on Regular Vague Partitions and Their Approximation Properties [J]. Computer Science, 2024, 51(2): 79-86.

---

### 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

#### Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

#### [基于公理化模糊集合的模糊随机事件及其概率](#)

Fuzzy Random Events and Its Probabilities Based on Axiomatic Fuzzy Sets

计算机科学, 2022, 49(11A): 211100242-7. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.211100242>

#### [基于公理化模糊集合的模糊推理方法](#)

Fuzzy Reasoning Method Based on Axiomatic Fuzzy Sets

计算机科学, 2021, 48(11A): 57-62. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.201200140>

#### [模糊自适应排序变异多目标差分进化算法](#)

Multi-objective Differential Evolution Algorithm with Fuzzy Adaptive Ranking-based Mutation

计算机科学, 2019, 46(7): 224-232. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2019.07.034>

#### [基于正态云相似度的语言型多属性群决策方法](#)

Linguistic Multi-attribute Group Decision Making Method Based on Normal Cloud Similarity

计算机科学, 2019, 46(6): 218-223. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2019.06.033>

#### [一种简化的区间二型模糊系统辨识方法](#)

Interval Type 2 Fuzzy System Identification Using NT Type Reduction Algorithm

计算机科学, 2017, 44(Z11): 141-143. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2017.11A.029>

# 基于正则模糊划分的模糊系统及其逼近性质

彭小玉 潘小东 申涵寒 何红梅

西南交通大学数学学院 成都 611756

(pengxiaoyud1@163.com)

**摘要** 文中讨论了带有不同模糊基函数的模糊系统的逼近问题。首先,基于一维正则模糊划分和重叠函数建立多维正则模糊划分,以划分中的元素为模糊基函数设计模糊系统,应用 Weierstrass 逼近定理证明了该模糊系统是通用逼近器,给出了模糊系统的逼近误差界。其次,提出了多项式型、指数型和对数型模糊系统,并给出了带有隶属函数参数的逼近误差界。最后,通过数值实验对不同模糊系统的逼近能力进行了比较,实验结果进一步验证了理论分析的正确性。

**关键词** 模糊系统;正则模糊划分;模糊基函数;重叠函数;逼近误差界

**中图分类号** TP273.4

## Fuzzy Systems Based on Regular Vague Partitions and Their Approximation Properties

PENG Xiaoyu, PAN Xiaodong, SHEN Hanhan and HE Hongmei

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 611756, China

**Abstract** This paper is devoted to investigating the approximation problem of fuzzy systems based on different fuzzy basis functions. Firstly, the multi-dimensional regular vague partitions are established based on one-dimensional regular vague partitions and overlap functions, and the fuzzy systems are designed by taking the elements in the partition as the fuzzy basis functions. With the help of the Weierstrass approximation theorem, the conclusion that the fuzzy systems are universal approximators is obtained, and the corresponding approximation error bounds are presented. Secondly, this paper proposes the polynomial, exponential and logarithmic fuzzy systems, and gives their approximation error bounds with the parameters of membership functions. Finally, experiments are designed to compare the approximation capability of different fuzzy systems. Experimental results further verify the correctness of the theoretical analysis.

**Keywords** Fuzzy systems, Regular vague partitions, Fuzzy basis functions, Overlap functions, Approximation error bounds

### 1 引言

模糊系统<sup>[1]</sup>是确定性系统的一种推广,是一种将输入、输出和状态变量定义在模糊集上的系统,它能够较好地解决非线性问题。由于模糊系统能够模拟人处理传统数学方法难以处理的模糊信息问题,故其被广泛应用于模式识别、医疗诊断系统等多个领域。尽管如此,模糊系统的理论基础还远不完善。目前,关于模糊系统的理论研究主要集中在模糊系统的构造、模糊系统的通用逼近性、逼近误差界以及逼近精度等方面。早在1992年,Wang<sup>[1]</sup>就利用 Stone-Weierstrass 定理证明了特定的模糊系统是通用逼近器,自此,许多学者相继展开对模糊系统逼近问题的研究。文献[2]通过  $K$ -拟减运算建立了一种新的  $K_p$ -积分模,并以分片线性函数为桥梁讨论了模糊系统对一类  $K_p$  可积函数的逼近性。Tao 等<sup>[3-4]</sup>引入了分片线性函数以及剖分的定义,利用  $m$ -网格剖分提出了逼近

因子的概念,并证明了逼近因子与剖分数无关,而逼近精度与剖分数有关。随后,Sadjadi 等<sup>[5-6]</sup>提出了基于 SFC 的光滑模糊系统(SFS),并对其结构性、精度以及稳定性进行了研究。文献[7-8]对多项式模糊系统的稳定性问题进行了讨论,并针对一类模糊系统提出了非线性隶属函数的逼近和变换方法。

在设计模糊系统时,模糊集隶属函数的选取会影响模糊系统的逼近效果,因此许多学者对基于不同隶属函数的模糊系统及其逼近性质进行了研究。对于单输入单输出模糊系统,Zeng 等<sup>[9]</sup>研究了具有三角形、梯形隶属函数的模糊系统的逼近性质,包括一致逼近性和通用逼近性等。文献[10]讨论了布尔模糊系统的逼近精度,并得出了基于  $R$ -蕴涵或 Reichenbach-蕴涵  $I(a, b) = 1 - a + ab$  且带有三角形隶属函数的模糊系统是二阶逼近器,而多输入多输出模糊系统不构成二阶逼近器。随后,Chen<sup>[11]</sup>提出了基于余弦函数和二次多项式函数的模糊系统,并研究了相关的逼近误差界。对于多

到稿日期:2022-11-28 返修日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金(61673320,61976130);四川省应用基础研究计划(2020YJ0270)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61673320,61976130) and Sichuan Applied Basic Research Program(2020YJ0270).

通信作者:潘小东(xdpan1@163.com)

输入单输出模糊系统, Wang<sup>[1]</sup>证明了具有高斯隶属函数的模糊系统是通用逼近器。Zeng等<sup>[12]</sup>详细研究了具有三角形、梯形隶属函数的模糊系统及其逼近性质。因三角形和梯形隶属函数计算简洁,所以被广泛应用于模糊系统中。Huang等<sup>[13]</sup>提出了以三角形和梯形作为特例的广义线性隶属函数来设计模糊系统,并给出了该模糊系统亦是通用逼近器的结论。通过调整参数,可以获得相对较小的逼近误差,但他们并未对其逼近误差界进行讨论。随后, Jiang等<sup>[14-15]</sup>直接在输入论域上建立锥形隶属函数,以此设计双输入单输出模糊系统,并证明了其通用逼近性,给出了3类模糊系统的逼近误差界。这些结果主要是针对具有特殊类型隶属函数的模糊系统给出其逼近性质,而基于其他类型隶属函数的模糊系统是否构成通用逼近器,以及相关的逼近性质如何,目前还未见相关研究讨论。此外, Wang<sup>[1]</sup>也指出隶属函数的选取具有很强的主观性,因此系统地研究带有不同隶属函数的模糊系统及其逼近性质具有重要意义。

2018年, Pan等<sup>[16-17]</sup>深入分析模糊现象,基于模糊现象的本质及其特征,从全局和整体的观点给出了关于模糊概念的新观点,从公理化的角度定义了模糊划分。故本文在一维模糊划分的基础上,利用重叠函数建立多维模糊划分,并以划分中的元素为基函数设计模糊系统,讨论该模糊系统的通用逼近性及逼近误差界问题。

## 2 预备知识

下面主要介绍后文用到的基本概念和结论。对任意的  $N \in \mathbb{N}^+$ , 用符号  $\bar{N}$  表示集合  $\{1, \dots, N\}$ 。

**定义 1<sup>[16]</sup>** 设  $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $U$  上的一个模糊划分指具有如下形式的对象:

$$\tilde{U} = \{A_1, \dots, A_N\}, N \in \mathbb{N}^+$$

其中,  $A_i = \{(x, \mu_{A_i}(x)) \mid x \in U\}$  ( $i \in \bar{N}$ ), 函数  $\mu_{A_i}: U \rightarrow [0, 1]$  定义了元素  $x \in U$  关于类  $A_i$  (代表某种性质, 即定性描述的类) 的隶属度, 并且满足下面的条件:

(1) 对任意的  $x \in U$ , 至少存在一个  $i \in \bar{N}$ , 使得  $\mu_{A_i}(x) > 0$ ;

(2) 对任意的  $i \in \bar{N}$ ,  $\mu_{A_i}(x)$  是连续的;

(3) 对任意的  $i \in \bar{N}$ , 至少存在一个点  $x_0 \in U$ , 使得  $\mu_{A_i}(x_0) = 1$ ;

(4) 对任意的  $i \in \bar{N}$ , 如果在点  $x_0 \in U$  处满足  $\mu_{A_i}(x_0) = 1$ , 那么,  $\mu_{A_i}(x)$  在  $[a, x_0]$  上不减, 在  $[x_0, b]$  上不减;

(5) 对任意的  $x \in U$ , 满足  $0 < \mu_{A_1}(x) + \dots + \mu_{A_N}(x) \leq 1$ 。

若把上述定义中的条件(5)替换为: 对任意的  $x \in U$ , 满足  $\mu_{A_1}(x) + \dots + \mu_{A_N}(x) = 1$ , 则称  $\tilde{U}$  是  $U$  上的正则模糊划分。

**定义 2<sup>[17]</sup>** 设  $W = [a, b] \times [c, d] = U \times V \subset \mathbb{R}^2$ ,  $W$  上的一个模糊划分指具有如下形式的对象:

$$\tilde{W} = \{R_1, \dots, R_N\}, N \in \mathbb{N}^+$$

其中,  $R_i = \{(x, y)^T, (\mu_{R_i}(x, y)) \mid (x, y)^T \in U \times V\}$  ( $i \in \bar{N}$ ), 函数  $\mu_{R_i}: W \rightarrow [0, 1]$  定义了元素  $x \in U$  与元素  $y \in V$  具有关系  $R_i$

的程度, 并且满足下面的条件:

(1) 对任意的  $(x, y)^T \in W$ , 至少存在一个  $i \in \bar{N}$ , 使得  $\mu_{R_i}(x, y) > 0$ ;

(2) 对任意的  $i \in \bar{N}$ ,  $\mu_{R_i}(x, y)$  在  $W$  上是连续的;

(3) 对任意的  $i \in \bar{N}$ , 至少存在一点  $(x_0, y_0)^T \in W$ , 使得  $\mu_{R_i}(x_0, y_0) = 1$ ;

(4) 对任意的  $i \in \bar{N}$ , 如果在点  $(x_0, y_0)^T \in W$  处满足  $\mu_{R_i}(x_0, y_0) = 1$ , 那么, 对任意的单位向量  $(\alpha_1, \alpha_2)^T$ , 单变量函数  $r(t) = \mu_{R_i}(x_0 + \alpha_1 t, y_0 + \alpha_2 t)$  在  $(-\infty, 0]$  上不减, 在  $[0, +\infty)$  上不减;

(5) 对任意的  $(x, y)^T \in W$ , 满足  $0 < \mu_{R_1}(x, y) + \dots + \mu_{R_N}(x, y) \leq 1$ 。

若把上述定义中的条件(5)替换为: 对任意的  $(x, y)^T \in W$ , 满足  $\mu_{R_1}(x, y) + \dots + \mu_{R_N}(x, y) = 1$ , 则称  $\tilde{W}$  是  $W$  上的正则模糊划分。

显然, 上述定义可以进一步推广到多维模糊划分。

**定义 3<sup>[18]</sup>** 设  $A \in \tilde{U}$ , 记

$$\text{supp } A = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$$

$$\text{ker } A = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}$$

分别称  $\text{supp } A$  和  $\text{ker } A$  为  $A$  的支集与核集。

**定义 4<sup>[19]</sup>** 设  $A \in \tilde{U}$ , 则称

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{supp } A, & \alpha = 0 \end{cases}$$

为模糊集  $A$  的  $\alpha$ -水平集。

由模糊划分的定义知, 模糊集  $A_i \in \tilde{U}$  是凸模糊集且  $[A_i]^\alpha$  是闭区间, 记  $[A_i]^\alpha = [a_{i\alpha}^-, a_{i\alpha}^+] \subset U$ 。显然,  $a_{i\alpha}^-$  关于  $\alpha$  单调不减,  $a_{i\alpha}^+$  关于  $\alpha$  单调不减。

**定义 5<sup>[20]</sup>** 对任意的  $A_i, A_j \in \tilde{U}$ ,  $i, j \in \bar{N}$ , 若  $\max \text{ker } A_i < \min \text{ker } A_j$ , 则称  $A_i < A_j$ 。

**定义 6<sup>[21]</sup>** 称  $n$  元函数  $O: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  是一个  $n$  元重叠函数, 如果对任意的  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  满足下列条件:

(1)  $O$  具有交换性;

(2)  $O(x_1, \dots, x_n) = 0$ , 当且仅当  $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ ;

(3)  $O(x_1, \dots, x_n) = 1$ , 当且仅当  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ ;

(4)  $O$  是递增的;

(5)  $O$  是连续的。

构造重叠函数的定理如下。

**定理 1<sup>[21]</sup>** 映射  $O: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  是一个  $n$  元重叠函数, 当且仅当

$$O(x_1, \dots, x_n) = \frac{u(x_1, \dots, x_n)}{u(x_1, \dots, x_n) + v(x_1, \dots, x_n)}$$

其中,  $u, v: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  对任意的  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  满足:

(1)  $u$  和  $v$  具有交换性;

(2)  $u$  是单调不减的, 且  $v$  是单调不减的;

(3)  $u(x_1, \dots, x_n) = 0$  当且仅当  $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ ;

(4)  $v(x_1, \dots, x_n) = 0$  当且仅当  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ ;

(5)  $u$  和  $v$  是连续的。

**定理 2**<sup>[22]</sup> (Weierstrass 逼近定理) 设  $g(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 那么, 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在多项式函数  $p(x)$ , 使得  $|g(x) - p(x)| < \epsilon$  对任意的  $x \in [a, b]$  成立。

### 3 模糊划分及模糊系统

对任意的  $j \in \bar{n} (n \in \mathbb{N}^+)$ , 设  $U_j$  和  $V$  是  $\mathbb{R}$  中的有界闭区间,  $\tilde{U}_j$  和  $\tilde{V}$  分别是  $U_j$  和  $V$  上的正则模糊划分,  $D = U_1 \times \dots \times U_n$ , 重叠函数  $O$  在  $[0, 1]^n$  上满足:  $\forall x_j, r_i \in [0, 1], j \in \overline{n-1}, i \in \bar{m}, m \in \mathbb{N}^+$ , 且  $\sum_{i=1}^m r_i \in [0, 1]$ , 有  $O(x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{i=1}^m r_i) = \sum_{i=1}^m O(x_1, \dots, x_{n-1}, r_i)$ , 记  $O$  为所有满足以上条件的重叠函数的集合。显然, 若  $O(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$ , 则  $O \in O$ 。

模糊系统  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}$  主要由模糊器、模糊规则库、模糊推理机和解模糊器构成。模糊规则库由模糊 IF-THEN 规则组成, 具有形式  $R^{i_1 \dots i_n}$ : 如果  $x_1$  为  $A_1^{i_1}$  且  $\dots$  且  $x_n$  为  $A_n^{i_n}$ , 则  $y$  为  $B^{i_1 \dots i_n}$ 。其中,  $A_j^{i_j}$  是  $\tilde{U}_j$  中的模糊集,  $B^{i_1 \dots i_n}$  是  $\tilde{V}$  中的模糊集,  $i_j \in \bar{N}_j, j \in \bar{n}, N_j \in \mathbb{N}^+$  是  $\tilde{U}_j$  中模糊集合的个数,  $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$  和  $y \in V$  分别是模糊系统的输入和输出变量。

设  $A^{i_1 \dots i_n} = A_1^{i_1} \times \dots \times A_n^{i_n}$  是  $D$  中的一个模糊关系,  $O \in O, A^{i_1 \dots i_n}$  定义为:

$$\mu_{A^{i_1 \dots i_n}}(X) = O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n))$$

则有如下定理。

**定理 3** 对任意的  $j \in \bar{n}$ , 设  $\tilde{U}_j = \{A_j^{i_j} | i_j \in \bar{N}_j\}$  是  $U_j$  上的一个模糊划分, 则  $\tilde{D} = \{A^{i_1 \dots i_n} | i_j \in \bar{N}_j, j \in \bar{n}\}$  是  $D$  上的一个模糊划分。

证明: 只需证明  $n=2$  成立即可。设  $\tilde{U}_1 = \{A_1^{i_1} | i_1 \in \bar{N}_1\}$ ,  $\tilde{U}_2 = \{A_2^{i_2} | i_2 \in \bar{N}_2\}$  分别是  $U_1, U_2$  上的模糊划分, 则:

(1) 对任意的  $(x_1, x_2)^T \in D$ , 至少存在一个  $i_1 \in \bar{N}_1, i_2 \in \bar{N}_2$ , 使得  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) > 0, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) > 0$ , 所以  $\mu_{A^{i_1 i_2}}(x_1, x_2) = O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)) > 0$ ;

(2) 对任意的  $A^{i_1 i_2} \in \tilde{D}$ , 显然  $\mu_{A^{i_1 i_2}}(x_1, x_2)$  在  $D$  上是连续的;

(3) 对任意的  $A^{i_1 i_2} \in \tilde{D}$ , 因存在  $(x_{10}, x_{20})^T \in D$ , 使得  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10}) = \mu_{A_2^{i_2}}(x_{20}) = 1$ , 所以  $\mu_{A^{i_1 i_2}}(x_{10}, x_{20}) = O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10}), \mu_{A_2^{i_2}}(x_{20})) = 1$ ;

(4) 对任意的  $A^{i_1 i_2} \in \tilde{D}$ , 若在点  $(x_{10}, x_{20})^T \in D$  处满足  $\mu_{A^{i_1 i_2}}(x_{10}, x_{20}) = O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10}), \mu_{A_2^{i_2}}(x_{20})) = 1$ , 则  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10}) = \mu_{A_2^{i_2}}(x_{20}) = 1$ 。对任意的单位向量  $(\alpha_1, \alpha_2)^T$ , 当  $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$  时, 若  $t \in (-\infty, 0]$ , 则  $x_{10} + \alpha_1 t \in [x_{10}, +\infty)$ , 因  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)$  在  $x_1 \in [x_{10}, +\infty)$  上不增, 故  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10} + \alpha_1 t)$  在  $t \in (-\infty, 0]$  上不减。同理知  $\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10} + \alpha_1 t)$  在  $t \in [0, +\infty)$  上不增, 且  $\mu_{A_2^{i_2}}(x_{20} + \alpha_2 t)$  在  $(-\infty, 0]$  上不减, 在  $[0, +\infty)$  上不增,

其余情况类似。再由定义 6 知单变量函数  $r(t) = O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_{10} + \alpha_1 t), \mu_{A_2^{i_2}}(x_{20} + \alpha_2 t))$  在  $(-\infty, 0]$  上不减, 在  $[0, +\infty)$  上不增。

(5) 对任意的  $(x_1, x_2)^T \in D$ , 因

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \mu_{A^{i_1 i_2}}(x_1, x_2) &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)) \\ &= O(\sum_{i_1=1}^{N_1} \mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \sum_{i_2=1}^{N_2} \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)) \end{aligned}$$

故  $0 < \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \mu_{A^{i_1 i_2}}(x_1, x_2) \leq 1$ 。

综上知,  $\tilde{D} = \{A^{i_1 i_2} | i_j \in \bar{N}_j, j = 1, 2\}$  是  $D = U_1 \times U_2$  上的一个模糊划分, 故结论成立。

由定理 3 易得以下推论。

**推论 1** 对任意的  $j \in \bar{n}$ , 设  $\tilde{U}_j = \{A_j^{i_j} | i_j \in \bar{N}_j\}$  是  $U_j$  上的一个正则模糊划分, 则  $\tilde{D} = \{A^{i_1 \dots i_n} | i_j \in \bar{N}_j, j \in \bar{n}\}$  是  $D$  上的一个正则模糊划分。

证明: 对任意的  $(x_1, x_2)^T \in D$ , 因  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  分别是  $U_1, U_2$  上的正则模糊划分, 故  $\sum_{i_1=1}^{N_1} \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) = \sum_{i_2=1}^{N_2} \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) = 1$ 。由定理 3 的证明知,  $\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \mu_{A^{i_1 i_2}}(x_1, x_2) = O(1, 1) = 1$ , 证毕。

下面基于 4 类基本初等函数, 给出论域  $U = [a, b] = \bigcup_{i=1}^{N-1} [e^i, e^{i+1}]$  上的一维正则模糊划分。

(1) 余弦型正则模糊划分

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(x) &= \begin{cases} \cos(a_1(x - e^1)), & x \in [e^1, e^2] \\ 0, & x \in (e^2, e^N] \end{cases} \\ \mu_{A_N}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [e^1, e^{N-1}] \\ 1 - \cos(a_{N-1}(x - e^{N-1})), & x \in [e^{N-1}, e^N] \end{cases} \\ \mu_{A_i}(x) &= \begin{cases} 1 - \cos(a_{i-1}(x - e^{i-1})), & x \in [e^{i-1}, e^i] \\ \cos(a_i(x - e^i)), & x \in [e^i, e^{i+1}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $a_i$  是大于 0 的常数, 且满足  $a_i(e^{i+1} - e^i) = \frac{\pi}{2}, i = 2, \dots, N-1$ 。

(2) 多项式型正则模糊划分

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(x) &= \begin{cases} 1 - b_1(x - e^1)^{k_1}, & x \in [e^1, e^2] \\ 0, & x \in (e^2, e^N] \end{cases} \\ \mu_{A_N}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [e^1, e^{N-1}] \\ b_{N-1}(x - e^{N-1})^{k_1}, & x \in [e^{N-1}, e^N] \end{cases} \\ \mu_{A_i}(x) &= \begin{cases} b_{i-1}(x - e^{i-1})^{k_1}, & x \in [e^{i-1}, e^i] \\ 1 - b_i(x - e^i)^{k_1}, & x \in [e^i, e^{i+1}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $k_1 \in \mathbb{N}^+$ , 且  $b_i$  是大于 0 的常数, 满足  $b_i(e^{i+1} - e^i)^{k_1} = 1, i = 2, \dots, N-1$ 。

(3) 指数型正则模糊划分

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(x) &= \begin{cases} 2k_2^{-c_1(x - e^1)} - 1, & x \in [e^1, e^2] \\ 0, & x \in (e^2, e^N] \end{cases} \\ \mu_{A_N}(x) &= \begin{cases} 0, & x \in [e^1, e^{N-1}] \\ 2 - 2k_2^{-c_{N-1}(x - e^{N-1})}, & x \in [e^{N-1}, e^N] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mu_{A_i}(x) = \begin{cases} 2 - 2k_2^{-c_i(x-e^{i-1})}, & x \in [e^{i-1}, e^i] \\ 2k_2^{-c_i(x-e^i)} - 1, & x \in [e^i, e^{i+1}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $k_2 > 0$  且  $k_2 \neq 1$ ,  $c_i$  满足  $c_i(e^{i+1} - e^i) = \log_{k_2} 2$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ .

(4) 对数型正则模糊划分

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 - \log_{k_3}(d_1(x-e^1) + 1), & x \in [e^1, e^2] \\ 0, & x \in (e^2, e^N] \end{cases}$$

$$\mu_{A_N}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [e^1, e^{N-1}] \\ \log_{k_3}(d_{N-1}(x-e^{N-1}) + 1), & x \in [e^{N-1}, e^N] \end{cases}$$

$$\mu_{A_i}(x) = \begin{cases} \log_{k_3}(d_{i-1}(x-e^{i-1}) + 1), & x \in [e^{i-1}, e^i] \\ 1 - \log_{k_3}(d_i(x-e^i) + 1), & x \in [e^i, e^{i+1}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $k_3 > 0$  且  $k_3 \neq 1$ ,  $d_i$  满足  $\log_{k_3}(d_i(e^{i+1} - e^i) + 1) = 1$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ .

通过重叠函数将模糊 IF-THEN 规则  $R^{i_1 \dots i_n}$  简化为: 如果  $X$  是  $A^{i_1 \dots i_n}$ , 则  $y$  是  $B^{i_1 \dots i_n}$ , 其中  $A^{i_1 \dots i_n} \in \tilde{D}$ ,  $B^{i_1 \dots i_n} \in \tilde{V}$ . 令  $B^{i_1 \dots i_n}$  的中心为  $\bar{y}^{i_1 \dots i_n}$ , 则带有单值模糊器、乘积推理机和中心平均解模糊器的模糊系统为:

$$f(X) = \frac{\sum_{i_1, \dots, i_n} \bar{y}^{i_1 \dots i_n} O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n))}{\sum_{i_1, \dots, i_n} O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n))}$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \varphi_{i_1 \dots i_n}(X) \bar{y}^{i_1 \dots i_n}$$

其中,

$$\varphi_{i_1 \dots i_n}(X) = \frac{O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n))}{\sum_{i_1, \dots, i_n} O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n))}$$

为模糊系统的模糊基函数, 简称基函数。

设模糊划分  $\tilde{D}$  中元素  $A^{i_1 \dots i_n}$  的隶属函数为  $O(\mu_{A_1^{i_1}}(x_1), \dots, \mu_{A_n^{i_n}}(x_n)) = \prod_{j=1}^n \mu_{A_j^{i_j}}(x_j)$ , 下面以式(3)为基函数构建模糊系统, 并探讨其逼近性质。

$$\varphi_{i_1 \dots i_n}(X) = \mu_{A^{i_1 \dots i_n}}(X) \quad (3)$$

若模糊系统以指数型正则模糊划分为基函数, 则称其为指数型模糊系统, 其他类型类似。

## 4 模糊系统的逼近性质

设  $g(X)$  是  $D$  上的一个待逼近函数, 论域  $D$  上的有界函数  $g(X)$  的无穷范数定义为  $\|g(X)\|_\infty = \sup_{X \in D} |g(X)|$ .

### 4.1 单输入单输出模糊系统

设  $U = \bigcup_{i=1}^{N-1} [e^i, e^{i+1}] \subset \mathbb{R}$  为输入论域,  $U$  上的正则模糊划分  $\tilde{U} = \{A_1, \dots, A_N\}$ , 其中  $A_1 < \dots < A_N$  且  $\ker A_i = \{e^i\}$ ,  $\mu_{A_i}(x)$  分别在  $[a_{i0}^-, a_{i1}^-]$  和  $[a_{i1}^+, a_{i0}^+]$  上二次连续可微,  $i \in \bar{N}$ . 由式(3)知, 单输入单输出模糊系统:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) \bar{y}^i \quad (4)$$

其中,  $A_i \in \tilde{U}$ . 若  $A_i$  的核为  $e^i$ , 则  $\bar{y}^i = g(e^i)$ , 我们给出以下定理。

**定理 4** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的一个正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的连续可微函数, 则式(4)的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty \leq 2 \|g'(x)\|_\infty h \quad (5)$$

其中,  $h = \max_{i \in \bar{N}-1} \{h_i\}$ ,  $h_i = e^{i+1} - e^i$ .

证明: 对任意的  $x \in U$ , 存在  $i \in \bar{N}-1$ , 使得  $x \in [e^i, e^{i+1}]$ .

因  $\tilde{U}$  是  $U$  上的正则模糊划分, 故

$$f(x) = \mu_{A_i}(x)g(e^i) + \mu_{A_{i+1}}(x)g(e^{i+1})$$

利用微分中值定理, 有

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= |g(x) - g(e^i) + g(e^i) - f(x)| \\ &\leq |g(x) - g(e^i)| + |\mu_{A_{i+1}}(x)| |g(e^{i+1}) - g(e^i)| \\ &\leq |g'(\beta_1)| |x - e^i| + |g'(\beta_2)| |e^{i+1} - e^i| \\ &\leq \|g'(x)\|_\infty h + \|g'(x)\|_\infty h \end{aligned}$$

其中  $\beta_1 \in (e^i, x)$ ,  $\beta_2 \in (e^i, e^{i+1})$ . 故  $\|g(x) - f(x)\|_\infty \leq 2 \|g'(x)\|_\infty h$ .

由定理 4 知, 论域  $U$  上的多项式函数  $p(x)$  满足式(5), 故可得定理 5。

**定理 5** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的一个正则模糊划分, 则对任意定义在  $U$  上的实连续函数  $g(x)$  和任意的  $\epsilon > 0$ , 一定存在式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon \quad (6)$$

即基于正则模糊划分的模糊系统是通用逼近器。

证明: 由定理 2 知, 存在  $U$  上的一个实系数多项式  $p(x)$ , 使得对任意的  $\epsilon > 0$  和任意的  $x \in U$ , 有  $|g(x) - p(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ . 又

由定理 4 知, 存在式(4)所示的模糊系统  $f(x)$ , 使得  $|p(x) - f(x)| \leq 2 \|g'(x)\|_\infty h$ . 因存在  $M > 0$ , 使得  $\|g'(x)\|_\infty < M$ , 令  $h$  充分小且  $h < \frac{\epsilon}{4M}$ , 故

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &\leq |g(x) - p(x)| + |p(x) - f(x)| < \epsilon \\ \text{则 } \|g(x) - f(x)\|_\infty &< \epsilon. \end{aligned}$$

**定理 6** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的一个正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足:

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_\infty h^2 + \\ &P \|g'(x)\|_\infty h^3) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $P = \max_{i \in \bar{N}-1} \{ \sup_{x \in [e^i, e^{i+1}]} |\mu_{A_i}''(x)| \}$ ,  $h = \max_{i \in \bar{N}-1} \{h_i\}$ ,  $h_i = e^{i+1} - e^i$ .

证明: 对任意的  $x \in U$ , 存在  $i \in \bar{N}-1$ ,  $x \in [e^i, e^{i+1}]$ , 使得

$$f(x) = \mu_{A_i}(x)g(e^i) + \mu_{A_{i+1}}(x)g(e^{i+1})$$

令  $R_1(x) = g(x) - f(x)$ , 因  $f(e^k) = g(e^k)$ ,  $k = i, i+1$ , 故  $R_1(x) = T(x)(x-e^i)(x-e^{i+1})$ , 其中  $T(x)$  是二次连续可微函数. 对任意一个固定的点  $x$ , 定义辅助函数

$$\phi(t) = g(t) - f(t) - T(x)(t-e^i)(t-e^{i+1}), t \in [e^i, e^{i+1}]$$

易知,  $t = e^k$ ,  $k = i, i+1$  与  $t = x$  是  $\phi(t) = 0$  的 3 个根. 故由中值定理知, 存在与  $x$  有关的  $\gamma \in (e^i, e^{i+1})$ , 使得  $\phi''(\gamma) = 0$ , 从而有

$$T(x) = \frac{1}{2} g''(\gamma) + \frac{1}{2} \mu_{A_i}''(\gamma)(g(e^{i+1}) - g(e^i))$$

$$\begin{aligned}
 |R_1(x)| &\leq \frac{1}{2} |g''(\gamma)(x-e^i)(x-e^{i+1})| + \frac{1}{2} |\mu''_{A_i}(\gamma) \\
 &\quad (g(e^{i+1})-g(e^i))(x-e^i)(x-e^{i+1})| \\
 &\leq \frac{1}{8} \|g''(x)\|_{\infty} h_i^2 + \frac{1}{8} \|\mu''_{A_i}(x)\|_{\infty} \\
 &\quad \|g'(x)\|_{\infty} h_i^3 \\
 &\leq \frac{1}{8} \|g''(x)\|_{\infty} h_i^2 + \frac{P}{8} \|g'(x)\|_{\infty} h_i^3 \\
 &\leq \frac{1}{8} \|g''(x)\|_{\infty} h^2 + \frac{P}{8} \|g'(x)\|_{\infty} h^3
 \end{aligned}$$

故  $\|g(x)-f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + P \|g'(x)\|_{\infty} h^3)$ 。

注1:式(7)中  $P$  与模糊划分相关,或是常数,或与  $h_i$  有关。

#### 4.2 多输入单输出模糊系统

设  $U_j = \bigcup_{i_j=1}^{N_j-1} [e_j^i, e_j^{i+1}]$ ,  $\tilde{U}_j = \{A_j^i, \dots, A_j^{N_j}\}$  是  $U_j$  上形如

4.1 节中的正则模糊划分,且  $\ker A_j^i = \{e_j^i\}$ ,  $\tilde{D} = \{A^{i_1 \dots i_n} \mid i_j \in \bar{N}_j, j \in \bar{n}\}$  是  $D$  上的正则模糊划分。首先,基于正则模糊划分的双输入单输出模糊系统。

$$f(X) = \sum_{i_1, i_2} \mu_{A^{i_1 i_2}}(X) \bar{y}^{i_1 i_2} \quad (8)$$

其中,  $A^{i_1 i_2} \in \tilde{D}$ ,  $X = (x_1, x_2)^T \in D$ 。若  $A^{i_1 i_2}$  的核为  $(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})^T$ , 则  $\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$ , 给出以下定理。

**定理 7** 设  $\tilde{D}$  是  $D$  上的一个正则模糊划分,  $g(X)$  是  $D$  上的连续可微函数, 则如式(8)所示的模糊系统  $f(X)$  满足

$$\|g(X) - f(X)\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{\infty} H_j \quad (9)$$

其中,  $H_j = \max_{i_j \in \bar{N}_j-1} \{h_j^i\}$ ,  $h_j^i = e_j^{i+1} - e_j^i$ ,  $j=1, 2$ 。

证明:利用微分中值定理易证,故略。

**定理 8** 设  $\tilde{D}$  是  $D$  上的一个正则模糊划分,  $g(X)$  是  $D$  上的二次连续可微函数, 则如式(8)所示的模糊系统  $f(X)$  满足

$$\|g(X) - f(X)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 \left[ \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \right\|_{\infty} H_j^2 + P_j \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{\infty} H_j^3 \right] \quad (10)$$

其中,  $H_j = \max_{i_j \in \bar{N}_j-1} \{h_j^i\}$ ,  $h_j^i = e_j^{i+1} - e_j^i$ ,  $P_j = \max_{i_j \in \bar{N}_j-1} \left\{ \sup_{x_j \in [e_j^i, e_j^{i+1}]} |\mu''_{A_j^i}(x_j)| \right\}$ ,  $j=1, 2$ 。

证明:对任意的  $(x_1, x_2)^T \in D$ , 存在  $i_1 \in \bar{N}_1-1$ ,  $i_2 \in \bar{N}_2-1$ ,  $(x_1, x_2)^T \in [e_1^{i_1}, e_1^{i_1+1}] \times [e_2^{i_2}, e_2^{i_2+1}]$ , 使得

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} g(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}) \mu_{A_1^{j_1}}(x_1) \mu_{A_2^{j_2}}(x_2)$$

令  $R_2(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)$ , 因  $f(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$ ,  $j_1 = i_1, i_1+1$ ,  $j_2 = i_2, i_2+1$ , 故可设

$$R_2(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2)(x_1 - e_1^{i_1})(x_1 - e_1^{i_1+1}) + T_2(x_1, x_2)(x_2 - e_2^{i_2})(x_2 - e_2^{i_2+1})$$

其中  $T_1, T_2$  是二次连续可微函数。对任意一个固定的点  $(x_1, x_2)^T$ , 定义辅助函数

$$\psi(s, t) = g(s, t) - f(s, t) - T_1(x_1, x_2)(s - e_1^{i_1})(s -$$

$$e_1^{i_1+1}) - T_2(x_1, x_2)(t - e_2^{i_2})(t - e_2^{i_2+1})$$

显然,  $(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})^T, (x_1, e_2^{i_2})^T, (e_1^{i_1+1}, e_2^{i_2})^T$  是  $\psi(s, t) = 0$  的 3 个根, 且  $(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})^T, (e_1^{i_1}, x_2)^T, (e_1^{i_1}, e_2^{i_2+1})^T$  也是  $\psi(s, t) = 0$  的 3 个根。故由罗尔中值定理知, 存在与  $x_1$  有关的  $\eta_1 \in (e_1^{i_1}, e_1^{i_1+1})$ , 与  $x_2$  有关的  $\eta_2 \in (e_2^{i_2}, e_2^{i_2+1})$ , 使得  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \Big|_{s=\eta_1, t=e_2^{i_2}} =$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{s=e_1^{i_1}, t=\eta_2} = 0$ , 故

$$T_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} \Big|_{s=\eta_1, t=e_2^{i_2}} + \frac{1}{2} \mu''_{A_1^{i_1}}(\eta_1)(g(e_1^{i_1+1}, e_2^{i_2}) - g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}))$$

$$T_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \Big|_{s=e_1^{i_1}, t=\eta_2} + \frac{1}{2} \mu''_{A_2^{i_2}}(\eta_2)(g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2+1}) - g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}))$$

$$|g(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)| \leq |T_1(x_1, x_2)| |(x_1 - e_1^{i_1})(x_1 - e_1^{i_1+1})| + |T_2(x_1, x_2)| |(x_2 - e_2^{i_2})(x_2 - e_2^{i_2+1})|$$

$$\leq \frac{1}{8} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_{\infty} H_1^2 + \frac{P_1}{8} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} H_1^3 + \frac{1}{8} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_{\infty} H_2^2 +$$

$$\frac{P_2}{8} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} H_2^3$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{j=1}^2 \left[ \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \right\|_{\infty} H_j^2 + P_j \left\| \frac{\partial g}{\partial x_j} \right\|_{\infty} H_j^3 \right]$$

故式(10)成立。

注2:式(10)中  $P_j$  同样与模糊划分相关,或是常数,或与  $h_j^i$  有关。

与定理 5 的证明类似, 同样可得基于正则模糊划分的多输入单输出模糊系统是通用逼近器。以上定理可推广到多输入单输出模糊系统 ( $n > 2$ )。

由上述结论知, 当  $g(X)$  二次连续可微时, 模糊系统满足式(10), 且逼近误差界由 3 个因素决定: 模糊规则所决定的  $H_j$ ,  $g(X)$  的一阶和二阶偏导数以及隶属函数相关的  $P_j$ 。

#### 4.3 三类模糊系统及其逼近性质

设  $U = \bigcup_{i=1}^{N-1} [e^i, e^{i+1}]$ ,  $h = \max_{i \in \bar{N}-1} \{h_i\}$ ,  $h_i = e^{i+1} - e^i$ 。由文献[11]可得以下结论。

**定理 9<sup>[11]</sup>** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的一次多项式型正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} \|g''(x)\|_{\infty} h^2$$

**定理 10<sup>[11]</sup>** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的二次多项式型正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + 2 \|g'(x)\|_{\infty} h)$$

**定理 11<sup>[11]</sup>** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的余弦型正则模糊划分,  $g(x)$

是  $U$  上的二次连续可微函数, 则如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + \frac{\pi^2}{4} \|g'(x)\|_{\infty} h)$$

由定理 6 可证, 以下 3 类模糊系统的逼近误差界具有如下形式:

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + Q \|g'(x)\|_{\infty} h)$$

其中,  $Q$  是与正则模糊划分相关的常数。

**定理 12(多项式型)** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的多项式型正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} [\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + k_1(k_1 - 1) \|g'(x)\|_{\infty} h] \quad (11)$$

其中,  $k_1 \in \mathbb{N}^+$ 。

**证明:** 由定理 9 和定理 10 知, 当  $k_1 \leq 2$  时, 结论成立。当  $k_1 \geq 3$  时, 由定理 6 有, 对任意的  $x \in U$ , 存在  $i \in \overline{N-1}$ , 使得  $x \in [e^i, e^{i+1}]$ , 有  $|g(x) - f(x)| \leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h_i^2 + \|\mu''_{A_i}(x)\|_{\infty} \|g'(x)\|_{\infty} h_i^3)$ 。因  $\mu_{A_i}(x) = 1 - b_i(x - e^i)^{k_1}$ , 故  $\mu_{A_i}(e^{i+1}) = 1 - b_i h_i^{k_1} = 0$ , 即  $b_i h_i^{k_1} = 1$ , 且  $\mu''_{A_i}(x) = -k_1(k_1 - 1)b_i(x - e^i)^{k_1-2}$ , 故有

$$\begin{aligned} |\mu''_{A_i}(x)| &\leq |\mu''_{A_i}(e^{i+1})| = k_1(k_1 - 1)b_i h_i^{k_1-2} \\ |g(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h_i^2 + k_1(k_1 - 1)b_i h_i^{k_1+1} \|g'(x)\|_{\infty}) \\ &= \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h_i^2 + k_1(k_1 - 1)h_i \|g'(x)\|_{\infty}) \\ &\leq \frac{1}{8} (\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + k_1(k_1 - 1) \|g'(x)\|_{\infty} h) \end{aligned}$$

$$\|g'(x)\|_{\infty} h)$$

从而, 式(11)成立。

由式(11)知, 若多项式的次数  $k_1$  越大,  $Q = k_1(k_1 - 1)$  就越大, 则需要更多的规则才能达到期望精度, 见实验 1。同理可得以下定理。

**定理 13(指数型)** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的指数型正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} [\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + 2(\ln k_2)^2 (\log_{k_2} 2)^2 \|g'(x)\|_{\infty} h] \quad (12)$$

其中,  $k_2 > 0$  且  $k_2 \neq 1$ 。

**证明:** 与定理 12 证明类似, 故略。

**定理 14(对数型)** 设  $\tilde{U}$  是  $U$  上的对数型正则模糊划分,  $g(x)$  是  $U$  上的二次连续可微函数, 则当  $0 < k_3 < 1$  时, 如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} [\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + \frac{(k_3^{-1} - 1)^2}{\ln k_3^{-1}} \|g'(x)\|_{\infty} h] \quad (13)$$

当  $k_3 > 1$  时, 如式(4)所示的模糊系统  $f(x)$  满足

$$\|g(x) - f(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} [\|g''(x)\|_{\infty} h^2 + \frac{(k_3 - 1)^2}{\ln k_3} \|g'(x)\|_{\infty} h] \quad (14)$$

**证明:** 与定理 12 证明类似, 故略。

对于上述定理, 多输入单输出模糊系统具有类似结论。此外, 具有其他类型基函数的模糊系统, 其逼近误差界亦可由定理 6 和定理 8 得到。

基于以上结论, 表 1 给出了余弦型、多项式型、指数型和对数型模糊系统的逼近误差界。

表 1 逼近误差界

Table 1 Approximation error bounds

类型	参数	逼近误差界
余弦型	—	$\ g(x) - f(x)\ _{\infty} \leq \frac{1}{8} \ g''(x)\ _{\infty} h^2 + \frac{\pi^2}{32} \ g'(x)\ _{\infty} h$
多项式型	$k_1 \in \mathbb{N}^+$	$\ g(x) - f(x)\ _{\infty} \leq \frac{1}{8} \ g''(x)\ _{\infty} h^2 + \frac{1}{8} k_1(k_1 - 1) \ g'(x)\ _{\infty} h$
指数型	$k_2 > 0$ 且 $k_2 \neq 1$	$\ g(x) - f(x)\ _{\infty} \leq \frac{1}{8} \ g''(x)\ _{\infty} h^2 + \frac{1}{4} (\ln k_2)^2 (\log_{k_2} 2)^2 \ g'(x)\ _{\infty} h$
对数型	$0 < k_3 < 1$	$\ g(x) - f(x)\ _{\infty} \leq \frac{1}{8} \ g''(x)\ _{\infty} h^2 + \frac{1}{8} \frac{(k_3^{-1} - 1)^2}{\ln k_3^{-1}} \ g'(x)\ _{\infty} h$
	$k_3 > 1$	$\ g(x) - f(x)\ _{\infty} \leq \frac{1}{8} \ g''(x)\ _{\infty} h^2 + \frac{1}{8} \frac{(k_3 - 1)^2}{\ln k_3} \ g'(x)\ _{\infty} h$

特别地, 二次多项式型、以 2 为底的指数型、以 2 为底的对数型和余弦型模糊系统, 其逼近误差界中的  $Q$  分别为: 2,  $2(\ln 2)^2$ ,  $\frac{1}{\ln 2}$ ,  $\frac{\pi^2}{4}$ , 故以 2 为底的指数型和以 2 为底的对数型模糊系统的逼近能力优于二次多项式型和余弦型模糊系统, 见实验 2。故当  $Q$  值相差较大时, 可根据逼近误差界公式粗略地比较不同模糊系统之间的优劣。在设计模糊系统时,

定理 6 和定理 8 可作为选取基函数的依据之一。

## 5 数值实验

分别以不同类型的正则模糊划分设计模糊系统逼近下列函数, 比较模糊系统的逼近能力。给出如下待逼近函数:

$$(1) g_1(x) = \sin(x), x \in [-3, 3]$$

(2)  $g_2(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + 0.15x_2^2 + 0.1x_1x_2 + 0.4(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$

5.1 实验 1

分别设计一次多项式、二次多项式、三次多项式、四次多项式型模糊系统逼近上述函数,并分别取 61 对和 121 对输入输出数据对作为测试样本。在相同规则数下,比较 4 个模糊系统逼近函数的最大误差值,如图 1 和图 2 所示。

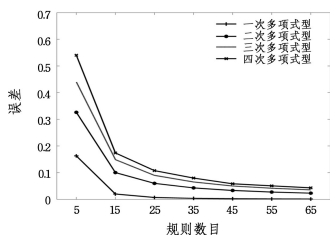


图 1 对  $g_1$  的逼近误差比较

Fig. 1 Comparison of approximation errors for  $g_1$

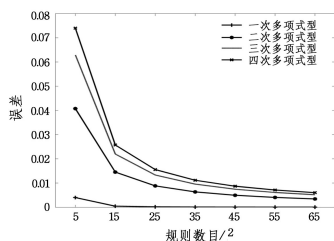


图 2 对  $g_2$  的逼近误差比较

Fig. 2 Comparison of approximation errors for  $g_2$

以带有 5 条和  $5 \times 5$  条规则的 4 个模糊系统分别逼近  $g_1$  和  $g_2$ ,对  $g_1$  的逼近结果如图 3 所示,图 4 给出了  $g_2$  的逼近误差曲面。

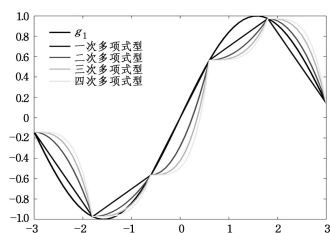


图 3  $g_1$  的逼近结果

Fig. 3 Approximation results of  $g_1$

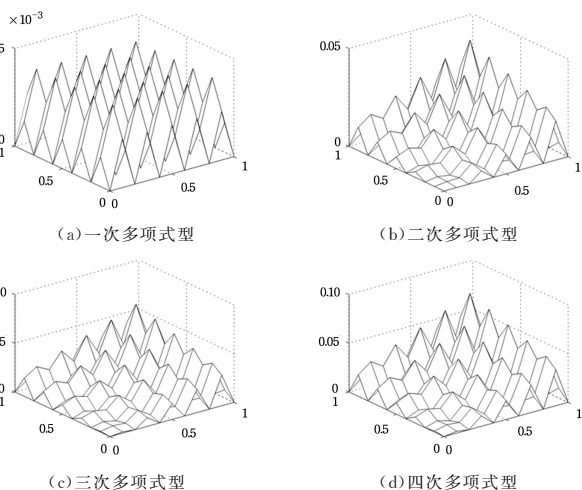


图 4  $g_2$  的逼近误差曲面

Fig. 4 Approximation error surfaces of  $g_2$

由图 1—图 4 可知,以上 4 个模糊系统在相同规则数下,随着多项式次数的增加,逼近效果越来越差,且规则越少,4 个模糊系统逼近能力的差异就越明显。

5.2 实验 2

为了用最少的规则实现以期望的精度达到对未知函数的逼近,Wang 等对传统的二分算法进行改进,加入标志位,若运算满足条件,置标志位为 True,否则为 False。这样就可通过标志位确定规则数的范围,逐步收缩到最优规则数,详细算法步骤见文献[23]。根据本文的理论分析,对该算法中的 Step3 进行改进,得到如下计算步骤:

Step1 规则数增加,确定规则数范围,即  $N_1 = \dots = N_n$  且  $N_1, \dots, N_n \in (2^{m-1}, 2^m], m \in \mathbb{N}^+$ 。

Step2 规则数收缩,得到一组满足期望精度的等值规则数  $N_j = N, N \in (2^{m-1}, 2^m], j \in \bar{n}$ 。

Step3' 规则数优化,得到一组满足期望精度的相对最优规则数  $\prod_{i=1}^n N_i$ 。

其中 Step3' 的详细步骤为:规则数  $N_1$  在区间  $(0, N]$  采用传统二分算法优化(在优化过程中,若规则数是小数,则向上取整),令其他规则数  $N_i (i \neq 1)$  保持不变,迭代计算得到优化后的规则数  $N_1$ 。若迭代过程中标志位全为 False,则  $N$  为最优规则数。再对规则数  $N_2$  在区间  $(0, N]$  采用二分算法优化,规则数  $N_i (i \neq 2)$  保持不变,得到优化后的规则数  $N_2$ 。以此类推,得到模糊系统的相对最优规则数  $\prod_{i=1}^n N_i$ 。

在 Step3' 中,规则数  $N_i$  只需在  $(0, N]$  内进行迭代优化,而非在  $(0, 2^m]$  内,故改进后的算法与原算法相比,减少了运算次数。

下面分别设计余弦型、二次多项式型、以 2 为底的指数型以及以 2 为底的对数型模糊系统逼近  $g_1, g_2$ ,并分别取 61 对和 441 对输入输出数据对作为测试样本。在达到期望的精度条件下,利用改进后的算法得到模糊系统所需的规则数,结果如表 2 和表 3 所列。

表 2 不同精度所需规则数

Table 2 Number of rules required for different accuracy

精度	余弦型	二次多项式型	指数型	对数型
0.5	5	5	4	5
0.05	27	32	14	17
0.005	249	301	103	146
0.0005	2488	3001	1031	1449

表 3 不同精度所需规则数

Table 3 Number of rules required for different accuracy

精度	余弦型	二次多项式型	指数型	对数型
0.1	$2 \times 3$	$2 \times 3$	$3 \times 3$	$3 \times 3$
0.01	$18 \times 19$	$19 \times 20$	$10 \times 11$	$10 \times 10$
0.001	$179 \times 175$	$217 \times 217$	$77 \times 78$	$78 \times 75$

由表 2 和表 3 知,指数型和对数型模糊系统优于二次多项式型和余弦型模糊系统,且随着输入维数的增加,期望的精度越低,该优势越明显。故当不同类型模糊系统的 Q 值相差较大时,可粗略地比较模糊系统的优劣。

结束语 本文利用重叠函数构造了多维模糊划分,并基于模糊划分设计了模糊系统,从理论上证明了该模糊系统是通用逼近器并给出了相关的逼近误差界,这比已有的结论更

一般化,从而反映出模糊系统与模糊划分之间更多的信息。最后通过两个实验进一步验证了理论分析的正确性。文中仅讨论了重叠函数为代数积的情况,而选择其他重叠函数获得多维模糊划分进而构建模糊系统,并研究其逼近性质将是后续的研究方向。

### 参 考 文 献

- [1] WANG L X. Fuzzy systems are universal approximators[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego, CA, USA; IEEE, 1992; 1163-1170.
- [2] WANG G J, WANG H Z, LONG Z Q. Norm approximation of Mamdani fuzzy system to a class of integrable functions[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2021, 23(3): 833-848.
- [3] TAO Y J, SUO C F, WANG G J. Approximation factor of the piecewise linear functions in Mamdani fuzzy system and its realization process[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(6): 6859-6873.
- [4] TAO Y J, YOU Q L, LI X P. Approximation factors and subdivision's number of piecewise linear functions in low dimensional space[J]. Journal of Northeast Normal University(Natural Science Edition), 2021, 53(2): 19-24.
- [5] SADJADI E N, EBRAHIMI M, GACHLOO Z. Discussion on accuracy of approximation with smooth fuzzy models[C]// Proceedings of 2020 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE). London, ON, Canada: IEEE, 2020; 1-6.
- [6] SADJADI E N. Smooth Compositions Made Stabilization of Fuzzy Systems: Easy and More Robust[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 52(7): 5819-5827.
- [7] XIE W B, SANG S, LAM H K, et al. A polynomial membership function approach for stability analysis of fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(8): 2077-2087.
- [8] XIE W B, ZHANG J, LI Y F, et al. A novel polynomial membership functions based control method for T-S fuzzy systems[J]. ISA Transactions, 2022, 129: 192-203.
- [9] ZENG X J, SINGH M G. Approximation theory of fuzzy systems-SISO case[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1995, 2(2): 162-176.
- [10] LI D C, LI Y M. Approximation Accuracy Analysis of Boolean Fuzzy Systems as Function Approximators[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(2): 66-71.
- [11] CHEN G. On approaching precisions of standard fuzzy systems with different basic functions[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(7): 823-827.
- [12] ZENG X J, SINGH M G. Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1995, 3(2): 219-235.

- [13] HUANG W H, FANG K L, ZHANG Z, et al. Universal approximation of typical fuzzy systems with generalized linear membership function[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(4): 1263-1265, 1269.
- [14] JIANG M Z, YUAN X H. A fuzzy inference modeling method for nonlinear systems by using triangular pyramid fuzzy system[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(2): 1187-1196.
- [15] JIANG M Z, YUAN X H. A new type of fuzzy systems using pyramid membership functions(PMFs) and approximation properties[J]. Soft Computing, 2018, 22(21): 7103-7118.
- [16] PAN X D, XU Y. Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. Soft Computing, 2018, 22(6): 1777-1789.
- [17] PAN X D, XU Y. Fuzzy relations based on two-dimensional vague partition from the perspective of axiomatization[C]// Proceedings of the 14th International FLINS Conference (FLINS 2020). Cologne, Germany, 2020; 301-308.
- [18] HU B Q. Basis of Fuzzy Theory [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2010.
- [19] WU C X, ZHAO Z T, REN X K. Fuzzy Analysis and Special Functional Spaces[M]. Harbin: Harbin Polytechnic University Press, 2013.
- [20] WANG L X. A Course in Fuzzy Systems and Control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [21] GÓMEZ D, RODRIGUEZ J T, MONTERO J, et al. n-Dimensional overlap functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 287: 57-75.
- [22] ZORICH V A. Mathematical analysis II[M]. Berlin: Springer, 2016: 453-454.
- [23] WANG W Q, YANG Z X. Design and Implementation of a Universal Fuzzy Approximator Based on Mamdani System[J]. Information & Control, 2015, 44(4): 51-55.



**PENG Xiaoyu**, born in 1998, postgraduate. Her main research interests include fuzzy system and so on.



**PAN Xiaodong**, born in 1979, associate professor. His main research interests include mathematical basic theory of fuzzy information processing and so on.

(责任编辑:何杨)