



# 计算机科学

COMPUTER SCIENCE

## 基于在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法

高梦琦, 冯翔, 虞慧群, 王梦灵

引用本文

高梦琦, 冯翔, 虞慧群, 王梦灵. 基于在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法[J]. 计算机科学, 2024, 51(3): 56-62.

GAO Mengqi, FENG Xiang, YU Huiqun, WANG Mengling. Large-scale Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Online Learning of Sparse Features [J]. Computer Science, 2024, 51(3): 56-62.

---

## 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

### [基于观测数据的地表太阳形状B-样条函数模型](#)

B-spline Functional Model of Terrestrial Sunshape Based on Measured Data

计算机科学, 2024, 51(1): 215-224. <https://doi.org/10.11896/jsjx.230700209>

### [基于两层知识迁移的多代理多任务优化方法](#)

Multi-surrogate Multi-task Optimization Approach Based on Two-layer Knowledge Transfer

计算机科学, 2023, 50(10): 203-213. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220900242>

### [基于Kriging模型的改进型NSGA-III解决昂贵优化问题](#)

Improved NSGA-III Based on Kriging Model for Expensive Many-objective Optimization Problems

计算机科学, 2023, 50(7): 194-206. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220600186>

### [基于锚图分类的在线半监督跨模态哈希](#)

Online Semi-supervised Cross-modal Hashing Based on Anchor Graph Classification

计算机科学, 2023, 50(6): 183-193. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220400038>

### [基于拍卖的边缘云期限感知任务卸载策略](#)

Auction-based Edge Cloud Deadline-aware Task Offloading Strategy

计算机科学, 2023, 50(4): 241-248. <https://doi.org/10.11896/jsjx.211200194>

# 基于在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法

高梦琦<sup>1,2</sup> 冯翔<sup>1,2</sup> 虞慧群<sup>1,2</sup> 王梦灵<sup>3</sup>

1 华东理工大学计算机科学与工程系 上海 200237

2 上海智慧能源工程技术研究中心 上海 200237

3 华东理工大学自动化系 上海 200237

(y10190116@mail.ecust.edu.cn)

**摘要** 大规模稀疏多目标优化问题(Sparse Multiobjective Optimization Problems, SMOPs)广泛存在于现实世界。为大规模 SMOPs 提出通用的解决方法,对于进化计算、控制论和机器学习等领域中的问题解决都具有推动作用。由于 SMOPs 具有高维决策空间和 Pareto 最优解稀疏的特性,现有的进化算法在解决 SMOPs 时,很容易陷入维数灾难的困境。针对这个问题,以稀疏分布的学习为切入点,提出了一种基于在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法(Large-scale Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Online Learning of Sparse Features, MOEA/OLSF)。具体地,首先设计了一种在线学习稀疏特征的方法来挖掘非零变量;然后提出了一种稀疏遗传算子,用于非零变量的进一步搜索和子代解的生成,在非零变量搜索过程中,其二进制交叉和变异算子也用于控制解的稀疏性和多样性。与最新的优秀算法在不同规模的测试问题上的对比结果表明,所提算法在收敛速度和性能方面均更优。

**关键词:** 进化算法;大规模多目标优化;稀疏 Pareto 最优解;在线学习

**中图分类号** TP181

## Large-scale Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Online Learning of Sparse Features

GAO Mengqi<sup>1,2</sup>, FENG Xiang<sup>1,2</sup>, YU Huiqun<sup>1,2</sup> and WANG Mengling<sup>3</sup>

1 Department of Computer Science and Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China

2 Shanghai Engineering Research Center of Smart Energy, Shanghai 200237, China

3 Department of Automation, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China

**Abstract** Large-scale sparse multiobjective optimization problems(SMOPs) are widespread in the real world. Proposing generic solutions for large-scale SMOPs can improve problem-solving in the fields of evolutionary computation, cybernetics, and machine learning. Due to the high-dimensional decision space and the sparse Pareto-optimal solutions of SMOPs, existing evolutionary algorithms are vulnerable to the curse of dimensionality when solving SMOPs. To address these problems, a large-scale multi-objective evolutionary algorithm based on online learning of sparse features(MOEA/OLSF) is proposed, with the learning of sparse distribution as an entry point. Specifically, an online learning sparse features method is designed to mine nonzero variables. Then a sparse genetic operator is proposed for further searching nonzero variables and generating offspring solutions. Its binary crossover and mutation operators are used to control the sparsity and diversity of solutions in the nonzero variable mining process. The comparison results with the state-of-the-art algorithms on test problems with different scales show that the proposed algorithm outperforms the existing algorithm in terms of convergence speed and performance.

**Keywords** Evolutionary algorithm, Large-scale multiobjective optimization, Sparse Pareto-optimal solutions, Online learning

到稿日期:2022-12-30 返修日期:2023-06-25

基金项目:国家重点研发计划(2020YFB1711700);国家自然科学基金面上项目(62276097);国家自然科学基金重点项目(62136003);上海市经信委“信息化发展专项资金”(XX-XXFZ-02-20-2463);上海市科技创新行动计划(21002411000)

This work was supported by the National Key Research and Development Program of China(2020YFB1711700), National Natural Science Foundation of China(62276097), Key Program of National Natural Science Foundation of China(62136003), Special Fund for Information Development of Shanghai Economic and Information Commission(XX-XXFZ-02-20-2463) and Scientific Research Program of Shanghai Science and Technology Commission(21002411000).

通信作者:冯翔(xfeng@ecust.edu.cn)

## 1 引言

大规模稀疏多目标优化问题广泛存在于进化计算、机器学习和控制论等领域,其具有重要的理论研究和实际应用价值<sup>[1-3]</sup>。SMOPs的特点是其多个目标在一定程度上是互相冲突的,因此不存在单一的最优解,只能找到一组平衡多个目标的 Pareto 最优解<sup>[4]</sup>。例如,分类中的特征选择问题指从众多特征中选择最少的特征,以达到最佳的分类型能<sup>[5]</sup>。最小化选择的特征和最大化正确率的目标可能会发生冲突。SMOPs 的另一个典型应用是深度学习网络中的神经网络权重训练问题,其目标是在最小化模型复杂性的同时最大化分类精度,其中一个目标的改善可能导致其他目标的恶化<sup>[6]</sup>。SMOPs 的另一个特点是其 Pareto 最优解是稀疏的,大部分的决策变量取值为零。在特征选择问题中,所选的特征相对于数据集中的所有特征来说通常很小<sup>[7-8]</sup>。在电网故障诊断问题中,与大型电力系统相比,需要识别的故障部件非常少<sup>[9]</sup>。为 SMOPs 提出一种通用的解决方案可以促进机器学习、进化计算和控制论等领域的发展。

大部分现实应用中的 SMOPs 都是基于大数据的,SMOPs 也被称作大规模多目标优化问题(Large-scale Multiobjective Optimization Problems, LMOPs)。已经有许多针对 LMOPs 的多目标进化算法(Multiobjective Evolutionary Algorithms, MOEAs),这些算法大致可以分为基于决策空间缩减的方法、基于决策变量分组的方法和基于新奇的搜索策略的方法<sup>[10]</sup>。基于决策空间缩减的方法通过问题转换或者维度缩减的技术将大规模问题转换成小规模问题来解决<sup>[11-12]</sup>。He 等通过问题重新表述来直接跟踪 Pareto 最优集,从而提高计算效率<sup>[11]</sup>。基于决策变量分组的方法的主要思想是采用各种分组技术将决策变量分为若干组,并对其进行协同优化<sup>[13-14]</sup>。Zhang 等提出了一种基于决策变量聚类的方法,将决策变量分为多样性和收敛性变量,并对收敛性变量进行分组<sup>[13]</sup>。基于新奇的搜索策略的方法通常会设计新的操作符或者采用概率模型来解决 LMOPs<sup>[15-16]</sup>。其中一些算法在 LMOPs 上表现优异,明显增强了收敛性能<sup>[13]</sup>。但这些方法面对 SMOPs 时,表现得差强人意。

SparseEA 是首个针对 SMOPs 提出的进化算法,它设计了一种二进制向量和实数向量的混合表示方法,用于表示解<sup>[4]</sup>。MDR-SAEA 是一种针对昂贵的稀疏问题提出的多阶段降维方法,其采用决策变量的先验知识来执行降维<sup>[17]</sup>。上述两种方法都是在进化之前获得静态的先验知识,虽然进化过程中会动态更新,但可能无法提升算法性能<sup>[18]</sup>。还有一类方法通过挖掘 Pareto 最优解的稀疏分布来缩小搜索空间。MOEAPSL 利用两个无监督神经网络来学习 Pareto 最优子空间<sup>[19]</sup>。PMMOEA 设计了一种进化模式挖掘的方法来挖掘决策变量中的非零变量,从而减小了决策空间<sup>[2]</sup>。但上述算法的计算成本相对较高<sup>[18]</sup>。总而言之,对大规模 SMOPs 的研究还处于起步阶段,解决大规模 SMOPs 还存在许多挑战<sup>[20]</sup>。

大规模 SMOPs 的搜索空间随着决策变量的增长呈指数

级增大,很容易陷入维数灾难的困境。另外,大规模 SMOPs 中的绝大多数决策变量为零,探测非零变量并进行优化是非常困难的。为了解决上述两个问题,我们提出了一种基于在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法。沿了解的混合表示方法,采用二进制向量和实数向量的组合来表示解。将非零变量的挖掘形式转化为一个二分类问题,即决策变量的二进制变量取值为零或一的问题。因此,考虑一种快速又准确的分二分类方法非常重要。在线学习算法旨在学习和更新未来数据在每一步的最佳预测因子<sup>[21]</sup>,该算法解决了现实世界的分类问题,表现出了更加高的效率和扩展性<sup>[22]</sup>。正则化对偶平均算法(Regularized Dual Averaging, RDA)是一种具有常数截断阈值的在线学习方法,可以保持精度和稀疏性的平衡<sup>[23]</sup>。因此,我们采用 RDA 方法预测二进制变量的取值,学习稀疏分布,从而降低搜索空间的维度。本文的主要贡献如下:

- 1)提出了一种在线学习稀疏特征的方法,采用正则对偶平均算法挖掘非零决策变量,从而提高算法效率。
- 2)设计了一种简单易操作的方法,用于确定决策变量中的待挖掘项,在待挖掘项中进行进一步地搜索,大大减小了搜索空间。
- 3)设计了一种二进制遗传算子,它包含了二进制向量交叉和变异算子,可以控制解决方案的稀疏性和多样性。

## 2 大规模稀疏多目标优化问题

一个多目标优化问题(Multiobjective Optimization Problem, MOP)可以在数学上被定义为:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &= (f_1(x), \dots, f_M(x)) \\ \text{s. t. } x &\in \Omega \end{aligned}$$

其中, $x$ 是一个包含 $D$ 个决策变量的解, $\Omega$ 表示决策空间。目标函数 $f$ 由 $M$ 个目标组成。

LMOPs 中的多个目标互相冲突,只能找到平衡不同目标的一组 Pareto 最优解。Pareto 最优解中绝大多数决策变量为零的问题,称为稀疏多目标优化问题。SMOPs 一方面容易陷入维数灾难的困境,另一方面比较难以优化非零变量。因此解决 SMOPs 的一个关键思路是挖掘稀疏的非零变量,减小搜索空间,采用在线学习算法学习 SMOPs 的稀疏特征,以挖掘非零变量。

## 3 基于在线学习稀疏特征的进化算法

本文采用了二进制向量掩码 *mask* 和实数向量 *dec* 的混合表示来维持种群<sup>[4]</sup>。实数向量 *dec* 给出了决策变量的实际取值。二进制向量 *mask* 为 0 或者 1,决定了该变量的最终取值是 0 还是 *dec*。决策变量  $x$  的取值可以从下式中得到:

$$(x_1, x_2, \dots) = (\text{dec}_1 \times \text{mask}_1, \text{dec}_2 \times \text{mask}_2, \dots)$$

其中,决策变量 $x_i$ 等于 $\text{dec}_i \times \text{mask}_i$ ,即每个决策变量的取值都是其实数向量 *dec* 和二进制向量 *mask* 的乘积。当一个解的实数向量  $\text{dec} = (0.2, 0.5, 0.8, 0.7)$ ,二进制向量  $\text{mask} = (0, 1, 0, 0)$ 时,这个解的决策变量取值实际上是 $(0, 0.5, 0.0)$ 。

所提算法 MOEA/OLSF 的流程如图 1 所示,包括种群

初始化、学习稀疏特征和生成子代种群 3 个部分。首先初始化种群,并执行非支配排序;其次根据非支配解训练在线学习模型,得到确定的非零变量  $NZ$ ;然后采用锦标赛选择法选择父代,通过稀疏遗传算子 SGO 生成子代种群;最后执行环境选择操作剔除劣质解。重复执行后面两个部分直到满足最大的评估次数。

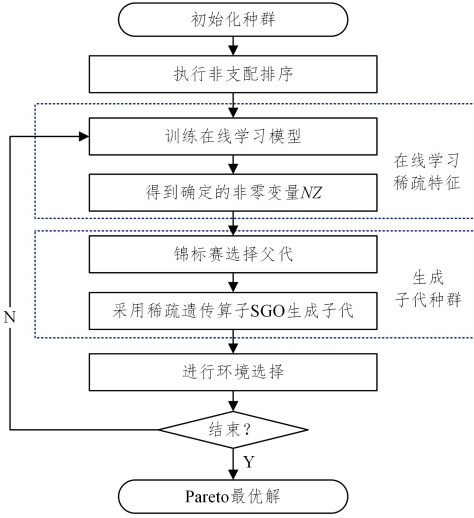


图 1 MOEA/OLSF 算法的流程图

Fig. 1 Flowchart of MOEA/OLSF algorithm

如算法 1 所示,本文的主要贡献包括在线学习稀疏特征(OLSF)和稀疏遗传算子(SGO)。在线学习稀疏特征部分采用正则对偶平均算法进行决策变量的  $mask$  的挖掘。稀疏遗传算子包括实数向量  $dec$  的生成和二进制遗传算子,其中二进制遗传算子由二进制交叉算子和二进制变异算子组成,用于二进制向量  $mask$  的交叉变异。

### 算法 1 基于在线学习稀疏特征的进化算法

输入:种群个体个数  $N$ ,决策变量数  $D$ ,最大迭代代数  $maxstep$ ,当前代数  $G$

输出:种群  $P$

1.  $P(dec \times mask) \leftarrow$  初始化种群  $P(N, D)$ ;
2.  $Front\ No \leftarrow$  Nondominant sorting( $P$ );
3. while  $G < maxstep$
4.  $NZ \leftarrow$  OLSF( $FrontNo, P, D$ ) /\* 采用算法 OLSF 学习稀疏特征,得到确定的非零变量  $NZ$  \*/;
5.  $[p1, p2] \leftarrow$  锦标赛选择法( $FrontNo$ );
6.  $Offspring \leftarrow$  SGO( $p1, p2, P, N, NZ$ ) /\* 采用稀疏遗传算子 SGO 进行交叉变异 \*/;
7.  $P \leftarrow$  EnvironmentSelection( $Offspring, P$ );
8. end while

### 3.1 在线学习稀疏特征

优化二进制向量  $mask$  的过程就是逐步确定非零变量  $NZ$  的过程。采用基于在线学习稀疏特征的进化算法准确并快速地搜索非零变量,可以缩小搜索空间,提高算法的效率和精度。在线学习稀疏特征算法采用正则对偶平均方法 RDA 进行非零变量的挖掘,主要目的是确定非零变量  $NZ$ ,伪代码如算法 2 所示。具体地,首先得到非支配解的  $mask$  取值,用于训练二类学习的线性分类模型  $model$ (见算法 2 中第 1—

2 行)。然后,根据  $traindata$  训练二类学习的线性分类模型  $model$ (见算法 2 中第 3 行)。接着按照训练的模型预测决策变量的  $mask$  取值,将取值为 1 的决策变量标记为  $NZ$ (见算法 2 中第 4—5 行)。

### 算法 2 在线学习稀疏特征算法 OLSF

输入:非支配前沿号  $FrontNo$ ,种群  $P(dec, mask)$ ,决策变量个数  $D$   
输出:非零变量  $NZ$

1. 非支配解  $P_n \leftarrow FrontNo(1)$ ;
2.  $traindata \leftarrow$  非支配解  $P_n$  的  $mask$ ;
3. 使用  $traindata$  训练二类学习的线性分类模型  $model$ ;
4.  $mask \leftarrow$  根据训练模型  $model$  和决策变量  $[1, 2, \dots, D]$  预测决策变量  $mask$  的取值;
5.  $NZ \leftarrow mask(1) /* NZ$  是  $mask$  为 1 的决策变量 \*/.

### 3.2 稀疏遗传算子

#### 算法 3 稀疏遗传算子算法 SGO

输入:父代  $p1$  和  $p2$ ,当前种群  $P$ ,种群个体个数  $N$ ,非零变量  $NZ$   
输出:子代种群  $Offspring$

1.  $Offmask = \emptyset$ ;
2.  $NZ_{candi} \leftarrow$  根据式(1)计算  $mask$  取值可能为 1 的变量;
2.  $NZ_{mine} \leftarrow$  根据  $NZ_{candi}$  和非零变量  $NZ$  的差值确定待挖掘的非零变量  $NZ_{mine}$ ;
3.  $Offmask(NZ) \leftarrow p1.mask(NZ)$ ;
4. 根据  $p1.mask(NZ_{mine})$  和  $p2.mask(NZ_{mine})$ ,采用二进制遗传算子(见算法 4)生成子代  $Offmask(NZ_{mine})$ ;
5. 根据父代  $p1.dec$  和  $p2.dec$ ,采用 GA 操作符生成子代  $Offdec$ ;
6. 删除  $Offmask$  和  $Offdec$  中的重复解;
7.  $Offspring \leftarrow Offmask \times Offdec$ .

算法 3 包含待挖掘变量的确定、子代  $mask$  和子代  $dec$  的生成、删除重复解 4 个部分。对于没有有效信息的事件,将其延迟决策可以减小不确定性带来的负面影响<sup>[24]</sup>。因此,本文在进行掩码处理时,将决策变量分为候选非零项  $NZ_{candi}$ 、确定非零项  $NZ$  和待挖掘项  $NZ_{mine}$ 。在不断地挖掘过程中,得到关于变量  $mask$  取值的更多信息,从而成功挖掘所有非零变量。候选非零项  $NZ_{candi}$  的选择如下:

$$NZ_{candi} = \{p \in P_N \mid p.mask_i \leq Nonzero_{candi}, i = 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

其中,  $P_N$  表示当前解中的非支配解。换句话说,  $P_N$  中的所有解都属于  $NZ_{candi}$  的子集。候选非零项的选择目标是选出所有可能为 1 的决策变量,用于进一步的挖掘。

待挖掘项  $NZ_{mine}$  是候选非零项  $NZ_{candi}$  和确定非零项  $NZ$  的差值,即在  $NZ_{candi}$  中取值为 1,而在  $NZ$  中取值为 0 的项。这是相对不确定的变量,需要进一步的挖掘信息来决定。我们在算法 4 中进行  $NZ_{mine}$  位的决策变量的挖掘。如算法 4 所示,不确定性变量  $NZ_{mine}$  的子代  $mask$  的生成包括二进制交叉和变异两部分。对于父代  $p1.mask$  和  $p2.mask$  中的任意两个个体,对比他们之间取值不同的变量  $dis$ ,然后计算在  $dis$  中的  $Offmask$  每个变量的翻转概率  $pr_{dis}$ ,并将子代  $Offmask$  按照概率  $pr_{dis}$  进行翻转<sup>[2]</sup>。翻转概率的计算式如下:

$$p_{f1} = p_f * \frac{D}{2n} \quad (2)$$

$$p_{f0} = p_f * \frac{D}{2(D-n)} \quad (3)$$

其中,  $D$  表示一个解中需要挖掘的不确定性变量个数。假设有  $n$  个非零变量和  $D-n$  个零变量,  $p_f$  是表示翻转的概率,  $p_{f1}$  和  $p_{f0}$  分别表示翻转非零变量和零变量的概率, 则  $p_{f1}$  和  $p_{f0}$  应该满足  $p_{f1} * n + p_{f0} (D-n) = p_f * D$ 。这是为了保证翻转的非零变量数的期望等于翻转的零变量数的期望, 从而可以确保解的稀疏性。

对于待挖掘变量的掩码生成, 另一个重要的工作就是二进制变异在掩码的变异过程中, 要使种群朝着待优化问题的稀疏度方向进化。具体地, 假设每个子代掩码  $Offmask(m)$  中的第  $n$  个掩码为  $Offmask(m) \cdot n$ , 则  $Offmask(m)$  应该满足:

$$SPa = \sum_{n=1}^D Offmask(m) \cdot n \quad (4)$$

假设要挖掘的变量个数为  $D$ ,  $SPa$  为当前最优解的非零变量个数。采用这种方法控制种群  $mask$  变异的方向, 从而保证种群中的非零变量和零变量符合问题的稀疏性。这对于种群朝最优 Pareto 进化有重大意义。

经过上述交叉变异得到生成的子代掩码  $Offmask$ , 接下来我们将采用 GAhalf 操作符生成子代  $dec$ 。我们根据基因操作符生成种群数量一半的子代  $Offspring$ 。删除重复解以后, 将子代解  $Offspring$  与原种群  $P$  合并, 并进行环境选择。

#### 算法 4 二进制遗传算子

输入:  $p1.mask, p2.mask$

输出:  $Offmask$

1.  $Offmask \leftarrow p1.mask$ ;
2. for  $i=1:N/2$  do
3. /\* 二进制向量交叉 \*/
4. 对比父代  $mask$  的不同  $dis(p1.mask, p2.mask)$ ;
5. 根据式(2)、式(3)计算  $dis$  中的变量  $Offmask(i)$  的翻转概率, 并按照概率翻转  $dis$  中的变量;
6. /\* 二进制向量变异 \*/
7. 按照式(4)计算决策变量的变异概率, 并按变异概率对变量进行翻转, 得到  $Offmask$ ;
8. end for

### 3.3 环境选择

最后一步是采用环境选择方法从群体中选择个体。首先选择所有非支配解作为下一代种群  $P'$ , 当种群  $P'$  中的个体数为  $N$  时, 环境选择结束。当种群  $P'$  中的个体数  $|P'|$  不等于  $N$  时, 如果个体数  $|P'| < N$ , 则选择最佳的  $N - |P'|$  个支配解加入种群  $|P'|$  中。如果个体数  $|P'| > N$ , 采用截断法删除  $|P'|$  中多余的非支配解, 直到  $|P'| = N$ 。采用截断法删除的解是  $P'$  中与其他非支配解相似度最高的解, 这种方法可以防止边界解被删除。

## 4 实验与分析

为了验证所提算法的寻优能力、收敛性和种群分布性, 将提出的算法与 5 种代表性的大规模多目标优化算法在 8 个基准问题上进行对比。

### 4.1 实验设置

#### 4.1.1 测试问题

采用稀疏多目标测试问题集 SMOP 来测试算法的性能,

其包含具有不同适应度景观的 8 个基准问题 SMOP1-SMOP8<sup>[4]</sup>。在测试实验中, 这些问题的目标数被设置为 3, 决策变量的个数设置为 300, 500, 800 和 1000, Pareto 最优解的稀疏性设置为 0.1。

#### 4.1.2 对比算法

对比算法选择了 4 种最先进的针对 SMOPs 提出的算法和 1 种优秀的针对 LMOPs 提出的 MOEA, 即首次提出的稀疏多目标优化算法 SparseEA<sup>[4]</sup>、基于快速聚类的进化算法 SLMEA<sup>[15]</sup>、解决大规模稀疏多目标优化问题的 SparseEA2<sup>[25]</sup>、利用无监督神经网络的优化算法 MOEAPSL<sup>[19]</sup> 以及基于决策变量聚类的多目标优化算法 LMEA<sup>[12]</sup>。对比算法的代码来自于 PlatEMO<sup>[26]</sup>。本文实验环境为 2.30 GHz 和 8 GB 内存的个人计算机, 算法在 Matlab-R2020b 上实现。

所有的算法均使用模拟二元交叉和多项式变异来生成后代解的实数向量, 其中交叉概率设置为 1, 突变概率设置为  $1/D$ ,  $D$  为决策变量个数, 并且交叉和突变的分布指数都设置为 20<sup>[4]</sup>。各算法中独有的参数均采用原文献作者推荐的参数设置, 以达到最好的性能。其中 SparseEA2 在生成子代实数变量时采用差分分组的方法, 组数设置为 4。SLMEA 的存档规模和种群大小相同。MOEAPSL 在 Pareto 最优子空间中生成子代解的比率是 0.5。LMEA 选中的用于决策变量聚类的解为 5, 每个解扰动次数为 50, 用于决策变量交互作用分析的解的数量为 5。

#### 4.1.3 评价指标

在实验研究中, 每种算法对所有的测试示例分别执行 30 次, 取 30 次结果的平均值和标准偏差 (STD) 作为统计性能标准。为了公平地比较, 所有算法的种群规模都设置为 100, 最大评估次数都设置为 1000000。采用反世代距离评价指标 (Inverted Generational Distance, IGD)<sup>[27]</sup> 来比较算法在基准问题上的结果。另外, 采用显著性水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验进行统计分析。符号“+”“-”和“ $\approx$ ”分别表示其他算法的效果在统计上比本文算法明显更好、更差或相似<sup>[19]</sup>。

### 4.2 算法有效性分析

表 1 列出了 6 种算法在 SMOP1-SMOP8 上的平均 IGD 值、STD 值和统计结果。在 32 个测试实例中, 所提算法在 24 个实例上取得了最优值。就统计结果而言, 所提算法在 31, 22, 30, 29 和 31 个测试实例上明显优于算法 MOEAPSL, SLMEA, SparseEA, SparseEA2 和 LMEA。算法 SLMEA 获得了 7 个最优值, 该算法优于其他的对比算法。SLMEA 采用快速聚类的方法来降低搜索空间的维度。算法 MOEAPSL 获得了一个最优值, 其采用最优子空间学习的方法, 是优于算法 LMEA, SparseEA 和 SparseEA2 的。算法 LMEA 在任何实例上都没有获得最佳值, 这是因为这种算法不是为 SMOPs 定制的。算法 SparseEA 和 SparseEA2 也没有获得最优值, 虽然它们是为 SMOPs 提出的。总的来说, 所提算法在处理大规模 SMOPs 时的表现明显优于其他 MOEAs。

表 1 6 种算法在 SMOP1—SMOP8 上运行 30 次得到的 IGD 的统计结果

Table 1 Statistical results of IGD obtained by 6 algorithms running on SMOP1—SMOP8 for 30 times

Problem	$D$	MOEAPSL	SLMEA	SparseEA	SparseEA2	LMEA	MOEA/OLSF				
SMOP1	300	$6.4857 \times 10^{-2}$ ( $3.08 \times 10^{-3}$ ) -	$5.9432 \times 10^{-2}$ ( $3.94 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1753 \times 10^{-2}$ ( $4.65 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1929 \times 10^{-2}$ ( $1.80 \times 10^{-3}$ ) -	$4.4979 \times 10^{-2}$ ( $1.55 \times 10^{-3}$ ) =	$4.4025 \times 10^{-2}$ ( $8.39 \times 10^{-4}$ )				
SMOP2	300	$8.6439 \times 10^{-2}$ ( $5.58 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1047 \times 10^{-2}$ ( $2.85 \times 10^{-3}$ ) -	$7.7910 \times 10^{-2}$ ( $6.51 \times 10^{-3}$ ) -	$7.7363 \times 10^{-2}$ ( $4.37 \times 10^{-3}$ ) -	$7.4660 \times 10^{-2}$ ( $3.26 \times 10^{-3}$ ) -	$4.8836 \times 10^{-2}$ ( $4.54 \times 10^{-3}$ )				
SMOP3	300	$4.0849 \times 10^{-1}$ ( $6.22 \times 10^{-1}$ ) -	$5.6842 \times 10^{-2}$ ( $3.77 \times 10^{-3}$ ) -	$6.4673 \times 10^{-2}$ ( $3.12 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1671 \times 10^{-2}$ ( $1.73 \times 10^{-3}$ ) -	$5.4969 \times 10^{-1}$ ( $1.18 \times 10^{-3}$ ) -	$4.1457 \times 10^{-2}$ ( $7.76 \times 10^{-4}$ )				
SMOP4	300	$7.1954 \times 10^{-2}$ ( $3.35 \times 10^{-2}$ ) -	$6.4817 \times 10^{-2}$ ( $9.19 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0841 \times 10^{-2}$ ( $5.16 \times 10^{-3}$ ) -	$6.2468 \times 10^{-2}$ ( $8.95 \times 10^{-3}$ ) -	$3.4570 \times 10^{-2}$ ( $1.52 \times 10^{-3}$ ) -	$3.0018 \times 10^{-2}$ ( $5.93 \times 10^{-4}$ )				
SMOP5	300	$1.2914 \times 10^{-1}$ ( $3.52 \times 10^{-2}$ ) -	$6.2145 \times 10^{-2}$ ( $1.09 \times 10^{-2}$ ) -	$6.4237 \times 10^{-2}$ ( $6.12 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0781 \times 10^{-2}$ ( $6.51 \times 10^{-3}$ ) -	$2.1268 \times 10^{-1}$ ( $3.93 \times 10^{-3}$ ) -	$3.0242 \times 10^{-2}$ ( $4.28 \times 10^{-4}$ )				
SMOP6	300	$1.2410 \times 10^{-1}$ ( $4.48 \times 10^{-2}$ ) -	$6.3523 \times 10^{-2}$ ( $6.13 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8534 \times 10^{-2}$ ( $9.07 \times 10^{-3}$ ) -	$6.5342 \times 10^{-2}$ ( $7.79 \times 10^{-3}$ ) -	$3.1996 \times 10^{-2}$ ( $1.69 \times 10^{-3}$ ) -	$3.0264 \times 10^{-2}$ ( $3.26 \times 10^{-4}$ )				
SMOP7	300	$8.7576 \times 10^{-2}$ ( $3.80 \times 10^{-3}$ ) -	$7.2496 \times 10^{-2}$ ( $2.23 \times 10^{-3}$ ) -	$8.5417 \times 10^{-2}$ ( $6.56 \times 10^{-3}$ ) -	$8.5119 \times 10^{-2}$ ( $2.50 \times 10^{-3}$ ) -	$1.3749 \times 10^{-1}$ ( $1.13 \times 10^{-2}$ ) -	$6.5335 \times 10^{-2}$ ( $5.88 \times 10^{-3}$ )				
SMOP8	300	$2.0054 \times 10^{-1}$ ( $1.37 \times 10^{-2}$ ) -	$1.4125 \times 10^{-1}$ ( $1.38 \times 10^{-2}$ ) +	$1.8117 \times 10^{-1}$ ( $1.37 \times 10^{-2}$ ) =	$1.9882 \times 10^{-1}$ ( $1.34 \times 10^{-2}$ ) -	$8.8182 \times 10^{-1}$ ( $4.43 \times 10^{-2}$ ) -	$1.8273 \times 10^{-1}$ ( $2.47 \times 10^{-2}$ )				
SMOP1	500	$6.6209 \times 10^{-2}$ ( $3.19 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1048 \times 10^{-2}$ ( $4.47 \times 10^{-3}$ ) -	$6.3442 \times 10^{-2}$ ( $5.92 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1615 \times 10^{-2}$ ( $2.73 \times 10^{-3}$ ) -	1.3308 ( $1.82 \times 10^{-2}$ ) -	$4.4308 \times 10^{-2}$ ( $1.46 \times 10^{-3}$ )				
SMOP2	500	$8.9760 \times 10^{-2}$ ( $5.32 \times 10^{-3}$ ) -	$6.1690 \times 10^{-2}$ ( $1.87 \times 10^{-3}$ ) =	$8.4626 \times 10^{-2}$ ( $5.66 \times 10^{-3}$ ) -	$7.7352 \times 10^{-2}$ ( $4.23 \times 10^{-3}$ ) -	1.8374( $1.66 \times 10^{-2}$ ) -	$5.7612 \times 10^{-2}$ ( $6.52 \times 10^{-3}$ )				
SMOP3	500	$6.0701 \times 10^{-2}$ ( $6.99 \times 10^{-3}$ ) -	$5.9178 \times 10^{-2}$ ( $3.28 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8398 \times 10^{-2}$ ( $3.62 \times 10^{-3}$ ) -	$6.4940 \times 10^{-2}$ ( $2.19 \times 10^{-3}$ ) -	2.1475 ( $2.23 \times 10^{-2}$ ) -	$4.7130 \times 10^{-2}$ ( $2.65 \times 10^{-3}$ )				
SMOP4	500	$8.5258 \times 10^{-2}$ ( $4.17 \times 10^{-2}$ ) -	$6.5783 \times 10^{-2}$ ( $9.68 \times 10^{-3}$ ) -	$6.2120 \times 10^{-2}$ ( $1.13 \times 10^{-2}$ ) -	$5.6573 \times 10^{-2}$ ( $7.70 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8712 \times 10^{-1}$ ( $2.18 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0208 \times 10^{-2}$ ( $5.11 \times 10^{-4}$ )				
SMOP5	500	$1.1768 \times 10^{-1}$ ( $3.97 \times 10^{-2}$ ) -	$6.2064 \times 10^{-2}$ ( $5.10 \times 10^{-3}$ ) -	$6.7844 \times 10^{-2}$ ( $6.37 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0877 \times 10^{-2}$ ( $5.56 \times 10^{-3}$ ) -	$6.6603 \times 10^{-1}$ ( $1.65 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0366 \times 10^{-2}$ ( $5.23 \times 10^{-4}$ )				
SMOP6	500	$1.3082 \times 10^{-1}$ ( $4.14 \times 10^{-2}$ ) -	$6.8880 \times 10^{-2}$ ( $1.20 \times 10^{-2}$ ) -	$6.4892 \times 10^{-2}$ ( $6.33 \times 10^{-3}$ ) -	$6.2797 \times 10^{-2}$ ( $7.45 \times 10^{-3}$ ) -	$3.1468 \times 10^{-1}$ ( $7.66 \times 10^{-3}$ ) -	$2.9964 \times 10^{-2}$ ( $4.70 \times 10^{-4}$ )				
SMOP7	500	$1.3983 \times 10^{-1}$ ( $8.67 \times 10^{-2}$ ) -	$7.3851 \times 10^{-2}$ ( $4.98 \times 10^{-3}$ ) +	$9.4553 \times 10^{-2}$ ( $5.44 \times 10^{-3}$ ) -	$9.0993 \times 10^{-2}$ ( $4.37 \times 10^{-3}$ ) =	2.9110( $3.59 \times 10^{-2}$ ) -	$8.4296 \times 10^{-2}$ ( $9.22 \times 10^{-3}$ )				
SMOP8	500	$1.9776 \times 10^{-1}$ ( $1.61 \times 10^{-2}$ ) =	$2.0858 \times 10^{-1}$ ( $1.22 \times 10^{-1}$ ) =	$2.0953 \times 10^{-1}$ ( $9.44 \times 10^{-3}$ ) =	$2.2694 \times 10^{-1}$ ( $1.72 \times 10^{-2}$ ) -	3.7054 ( $6.49 \times 10^{-3}$ ) -	$1.9851 \times 10^{-1}$ ( $3.05 \times 10^{-2}$ )				
SMOP1	800	$6.6843 \times 10^{-2}$ ( $3.31 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0547 \times 10^{-2}$ ( $5.96 \times 10^{-3}$ ) -	$6.3663 \times 10^{-2}$ ( $3.23 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0730 \times 10^{-2}$ ( $3.00 \times 10^{-3}$ ) -	1.3325 ( $2.05 \times 10^{-2}$ ) -	$4.7294 \times 10^{-2}$ ( $1.86 \times 10^{-3}$ )				
SMOP2	800	$1.0250 \times 10^{-1}$ ( $5.48 \times 10^{-3}$ ) -	$6.5058 \times 10^{-2}$ ( $6.04 \times 10^{-3}$ ) =	$8.9604 \times 10^{-2}$ ( $6.49 \times 10^{-3}$ ) -	$8.3797 \times 10^{-2}$ ( $4.16 \times 10^{-3}$ ) -	1.8449 ( $2.19 \times 10^{-2}$ ) -	$6.4936 \times 10^{-2}$ ( $4.52 \times 10^{-3}$ )				
SMOP3	800	$6.4580 \times 10^{-2}$ ( $9.75 \times 10^{-3}$ ) -	$5.7726 \times 10^{-2}$ ( $3.74 \times 10^{-3}$ ) -	$7.1849 \times 10^{-2}$ ( $3.57 \times 10^{-3}$ ) -	$6.4648 \times 10^{-2}$ ( $3.41 \times 10^{-3}$ ) -	2.1617( $1.97 \times 10^{-2}$ ) -	$4.7864 \times 10^{-2}$ ( $1.75 \times 10^{-3}$ )				
SMOP4	800	$6.7030 \times 10^{-2}$ ( $1.74 \times 10^{-2}$ ) -	$7.7000 \times 10^{-2}$ ( $1.40 \times 10^{-2}$ ) -	$6.9249 \times 10^{-2}$ ( $7.09 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0513 \times 10^{-2}$ ( $8.66 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8080 \times 10^{-1}$ ( $1.65 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0356 \times 10^{-2}$ ( $6.40 \times 10^{-4}$ )				
SMOP5	800	$1.0584 \times 10^{-1}$ ( $4.91 \times 10^{-2}$ ) -	$6.5689 \times 10^{-2}$ ( $1.08 \times 10^{-2}$ ) -	$6.6868 \times 10^{-2}$ ( $7.54 \times 10^{-3}$ ) -	$5.9641 \times 10^{-2}$ ( $7.19 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8073 \times 10^{-1}$ ( $2.20 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0289 \times 10^{-2}$ ( $5.74 \times 10^{-4}$ )				
SMOP6	800	$7.6041 \times 10^{-2}$ ( $3.47 \times 10^{-2}$ ) -	$6.7360 \times 10^{-2}$ ( $6.12 \times 10^{-3}$ ) -	$6.6777 \times 10^{-2}$ ( $6.20 \times 10^{-3}$ ) -	$6.3514 \times 10^{-2}$ ( $5.16 \times 10^{-3}$ ) -	$3.1549 \times 10^{-1}$ ( $7.57 \times 10^{-3}$ ) -	$3.0157 \times 10^{-2}$ ( $4.73 \times 10^{-4}$ )				
SMOP7	800	$2.0247 \times 10^{-1}$ ( $1.08 \times 10^{-1}$ ) -	$7.4582 \times 10^{-2}$ ( $6.29 \times 10^{-3}$ ) +	$1.1470 \times 10^{-1}$ ( $5.51 \times 10^{-3}$ ) -	$9.4346 \times 10^{-2}$ ( $3.19 \times 10^{-3}$ ) =	2.9752 ( $4.48 \times 10^{-2}$ ) -	$9.9380 \times 10^{-2}$ ( $1.29 \times 10^{-2}$ )				
SMOP8	800	$3.3874 \times 10^{-1}$ ( $3.83 \times 10^{-2}$ ) -	$1.9066 \times 10^{-1}$ ( $1.20 \times 10^{-2}$ ) +	$2.4589 \times 10^{-1}$ ( $1.49 \times 10^{-2}$ ) -	$2.5783 \times 10^{-1}$ ( $1.49 \times 10^{-2}$ ) -	3.7249 ( $8.68 \times 10^{-3}$ ) -	$2.2055 \times 10^{-1}$ ( $1.30 \times 10^{-2}$ )				
SMOP1	1000	$7.0306 \times 10^{-2}$ ( $2.82 \times 10^{-3}$ ) -	$6.0614 \times 10^{-2}$ ( $6.36 \times 10^{-3}$ ) -	$7.9432 \times 10^{-2}$ ( $4.39 \times 10^{-2}$ ) -	$6.0206 \times 10^{-2}$ ( $2.15 \times 10^{-3}$ ) -	1.3390 ( $1.48 \times 10^{-2}$ ) -	$4.8701 \times 10^{-2}$ ( $1.90 \times 10^{-3}$ )				
SMOP2	1000	$1.0970 \times 10^{-1}$ ( $3.51 \times 10^{-3}$ ) -	$5.9744 \times 10^{-2}$ ( $7.68 \times 10^{-3}$ ) +	$9.2431 \times 10^{-2}$ ( $7.13 \times 10^{-3}$ ) -	$8.8794 \times 10^{-2}$ ( $5.23 \times 10^{-3}$ ) -	1.8560 ( $1.46 \times 10^{-2}$ ) -	$6.9642 \times 10^{-2}$ ( $3.30 \times 10^{-3}$ )				
SMOP3	1000	$2.7046 \times 10^{-1}$ ( $6.20 \times 10^{-1}$ ) -	$5.7901 \times 10^{-2}$ ( $3.56 \times 10^{-3}$ ) -	$7.5934 \times 10^{-2}$ ( $3.46 \times 10^{-3}$ ) -	$6.7014 \times 10^{-2}$ ( $3.40 \times 10^{-3}$ ) -	2.1564( $1.29 \times 10^{-2}$ ) -	$4.8549 \times 10^{-2}$ ( $3.45 \times 10^{-3}$ )				
SMOP4	1000	$6.1016 \times 10^{-2}$ ( $1.02 \times 10^{-2}$ ) -	$7.5540 \times 10^{-2}$ ( $1.26 \times 10^{-2}$ ) -	$6.4294 \times 10^{-2}$ ( $9.48 \times 10^{-3}$ ) -	$5.8394 \times 10^{-2}$ ( $4.29 \times 10^{-3}$ ) -	$6.8619 \times 10^{-1}$ ( $1.57 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0133 \times 10^{-2}$ ( $5.23 \times 10^{-4}$ )				
SMOP5	1000	$1.1549 \times 10^{-1}$ ( $4.93 \times 10^{-2}$ ) -	$6.3346 \times 10^{-2}$ ( $4.21 \times 10^{-3}$ ) -	$7.2650 \times 10^{-2}$ ( $1.19 \times 10^{-2}$ ) -	$6.0594 \times 10^{-2}$ ( $9.47 \times 10^{-3}$ ) -	$6.7708 \times 10^{-1}$ ( $1.95 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0216 \times 10^{-2}$ ( $3.69 \times 10^{-4}$ )				
SMOP6	1000	$6.1290 \times 10^{-2}$ ( $7.56 \times 10^{-3}$ ) -	$7.0447 \times 10^{-2}$ ( $9.41 \times 10^{-3}$ ) -	$7.2384 \times 10^{-2}$ ( $1.12 \times 10^{-2}$ ) -	$6.8479 \times 10^{-2}$ ( $1.25 \times 10^{-2}$ ) -	$3.1611 \times 10^{-1}$ ( $1.49 \times 10^{-2}$ ) -	$3.0181 \times 10^{-2}$ ( $4.04 \times 10^{-4}$ )				
SMOP7	1000	$2.0614 \times 10^{-1}$ ( $1.16 \times 10^{-1}$ ) -	$7.4833 \times 10^{-2}$ ( $6.66 \times 10^{-3}$ ) +	$1.2409 \times 10^{-1}$ ( $4.22 \times 10^{-3}$ ) -	$9.7435 \times 10^{-2}$ ( $4.15 \times 10^{-3}$ ) +	3.0017( $2.57 \times 10^{-2}$ ) -	$1.0684 \times 10^{-1}$ ( $6.38 \times 10^{-3}$ )				
SMOP8	1000	$3.9220 \times 10^{-1}$ ( $2.89 \times 10^{-2}$ ) -	$1.9885 \times 10^{-1}$ ( $2.11 \times 10^{-2}$ ) +	$2.5976 \times 10^{-1}$ ( $2.02 \times 10^{-2}$ ) -	$2.8563 \times 10^{-1}$ ( $1.77 \times 10^{-2}$ ) -	3.7303 ( $4.42 \times 10^{-3}$ ) -	$2.2981 \times 10^{-1}$ ( $2.39 \times 10^{-2}$ )				
+/-/=		0/31/1		7/22/3		0/30/2		1/29/2		0/31/1	

图2给出了6种算法在具有3个目标500个决策变量的SMOP4和SMOP5上获得的IGD值的收敛曲线。可以看出,所提算法能快速收敛到最接近Pareto的最优前沿。算法MOEAPSL在SMOP4和SMOP5上的收敛都不稳定,而且IGD值在收敛过程中有明显恶化。算法SLMEA在问题SMOP4上的收敛过程也有不同程度的

反复,没有表现出稳定收敛的性能。SparseEA和SparseEA2的收敛性能比其他算法好,但在问题SMOP4上也不能很好地收敛。LMEA在SMOP4和SMOP5上都无法收敛,如图2中右上角紫色圆点所示。本文算法在SMOP4和SMOP5上都获得了较低的平均IGD值,也是最快收敛到最优值的算法。

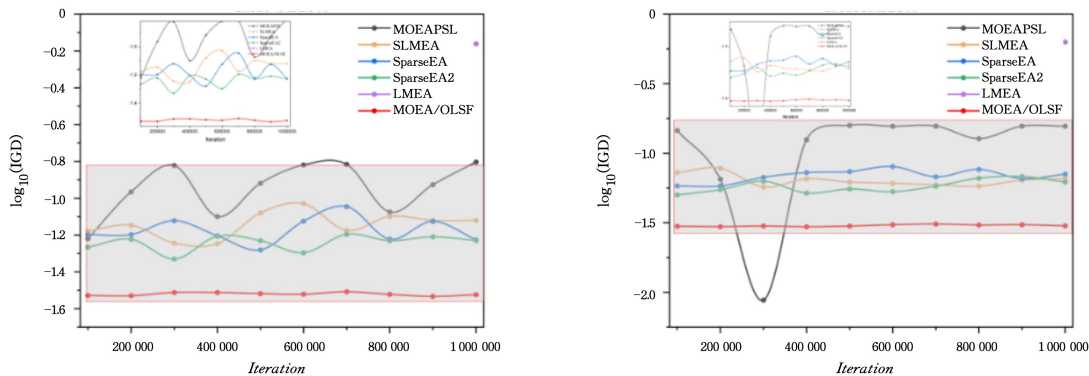


图2 6种算法在SMOP4和SMOP5上的IGD度量值的演变过程(电子版为彩图)

Fig.2 Evolution process of IGD-metric values by six algorithms on SMOP4 and SMOP5

种群分布性对于算法来说非常重要。图3中绘制了6种算法获得的具有IGD中值的Pareto最优前沿。决策变量设置为500,目标为3。可以看出,本文算法获得的解决方案具有良好的收敛性和分布性,因为我们在挖掘非零变量的同时进行了优化,大大减小了搜索空间。算法LMEA距离真正的

Pareto前沿很远,得到的种群分布性最差,个体分布得最不均匀。虽然算法MOEAPSL,SLMEA,SparseEA和SparseEA2获得的种群比算法LMEA更接近真实的Pareto最优前沿,但它们在种群分布性方面也明显不如本文算法。这应该与本文算法使用了一种保留边界解的环境选择技术有关。

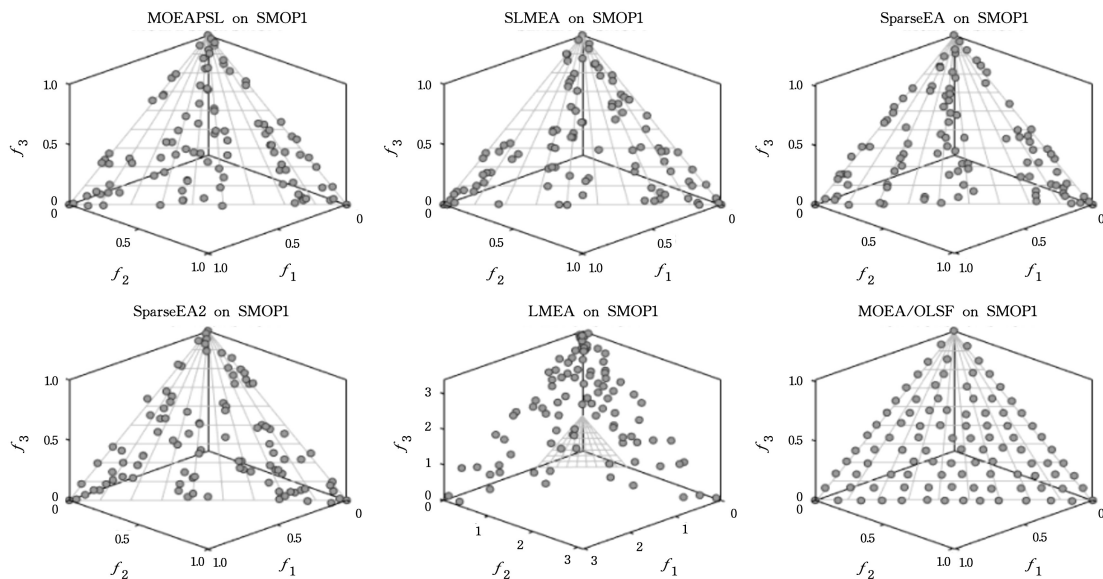


图3 6种算法在SMOPI上获得的具有IGD中位值的Pareto最优前沿

Fig.3 Pareto optimal fronts with median IGD values obtained by 6 algorithms on SMOPI

**结束语** 本文提出了一种在线学习稀疏特征的大规模多目标进化算法。首先采用在线学习方法挖掘非零变量,然后设计了一种稀疏遗传算子用于生成子代解决方案,并控制解决方案的多样性和稀疏性。将本文算法与最新的MOEAs在8个基准问题上进行对比,32个测试实例上的统计结果证明了本文算法在解决大规模稀疏多目标问题的优越性。未来我们还将继续探索更高效地挖掘非零变量的方法,以及解决方案的单层编码方法。

## 参考文献

- [1] LI Z, SHI L, YUE C, et al. Differential Evolution Based on Reinforcement Learning with Fitness Ranking for Solving Multimodal Multiobjective Problems[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019, 49: 234-244.
- [2] TIAN Y, LU C, ZHANG X, et al. A Pattern Mining-Based Evolutionary Algorithm for Large-Scale Sparse Multiobjective Opti-

- mization Problems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(7): 6784-6797.
- [3] HE C, CHENG R, ZHANG C, et al. Evolutionary Large-Scale Multiobjective Optimization for Ratio Error Estimation of Voltage Transformers [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 24(5): 868-881.
- [4] TIAN Y, ZHANG X, WANG C, et al. An Evolutionary Algorithm for Large-Scale Sparse Multiobjective Optimization Problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 24(2): 380-393.
- [5] SONG X, ZHANG Y, GONG D, et al. Feature Selection Using Bare-Bones Particle Swarm Optimization with Mutual Information [J]. Pattern Recognition, 2021, 112: 107804.
- [6] NARKHEDE M V, BARTAKKE P P, SUTAONE M S. A Review on Weight Initialization Strategies for Neural Networks [J]. Artificial Intelligence Review, 2022, 55(1): 291-322.
- [7] HASHEMI A, DOWLATSHAHI M B, NEZAMABADI-POUR H. Ensemble of Feature Selection Algorithms: A Multi-Criteria Decision-Making Approach [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(1): 49-69.
- [8] ALHENAWI E, AL-SAYYED R, HUDAIB A, et al. Feature Selection Methods on Gene Expression Microarray Data for Cancer Classification: A Systematic Review [J]. Computers in Biology and Medicine, 2022, 140: 105051.
- [9] SHAFIULLAH M, ABIDO M A, AL-MOHAMMED A H. Intelligent Fault Diagnosis for Distribution Grid Considering Renewable Energy Intermittency [J]. Neural Computing and Applications, 2022, 34(19): 16473-16492.
- [10] TIAN Y, SI L, ZHANG X, et al. Evolutionary Large-Scale Multi-Objective Optimization: A Survey [J]. ACM Computing Surveys (CSUR), 2021, 54(8): 1-34.
- [11] HE C, LI L, TIAN Y, et al. Accelerating Large-Scale Multiobjective Optimization via Problem Reformulation [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(6): 949-961.
- [12] LIU R, REN R, LIU J, et al. A Clustering and Dimensionality Reduction Based Evolutionary Algorithm for Large-Scale Multi-Objective Problems [J]. Applied Soft Computing, 2020, 89: 106120.
- [13] ZHANG X, TIAN Y, CHENG R, et al. A Decision Variable Clustering-Based Evolutionary Algorithm for Large-Scale Many-Objective Optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 22(1): 97-112.
- [14] MA X, LIU F, QI Y, et al. A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decision Variable Analyses for Multiobjective Optimization Problems with Large-Scale Variables [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(2): 275-298.
- [15] TIAN Y, ZHENG X, ZHANG X, et al. Efficient Large-Scale Multiobjective Optimization Based on a Competitive Swarm Optimizer [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(8): 3696-3708.
- [16] CHEN H, CHENG R, WEN J, et al. Solving Large-Scale Many-Objective Optimization Problems by Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy with Scalable Small Subpopulations [J]. Information Sciences, 2020, 509: 457-469.
- [17] TAN Z, WANG H, LIU S. Multi-Stage Dimension Reduction for Expensive Sparse Multi-Objective Optimization Problems [J]. Neurocomputing, 2021, 440: 159-174.
- [18] DING Z, CHEN L, SUN D, et al. A Multi-Stage Knowledge-Guided Evolutionary Algorithm for Large-Scale Sparse Multi-Objective Optimization Problems [J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2022, 73: 101119.
- [19] TIAN Y, LU C, ZHANG X, et al. Solving Large-Scale Multiobjective Optimization Problems With Sparse Optimal Solutions via Unsupervised Neural Networks [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3115-3128.
- [20] TIAN Y, FENG Y, ZHANG X, et al. A Fast Clustering Based Evolutionary Algorithm for Super-Large-Scale Sparse Multi-Objective Optimization [J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2022, 9(4): 1-16.
- [21] HOI S C, SAHOO D, LU J, et al. Online Learning: A Comprehensive Survey [J]. Neurocomputing, 2021, 459: 249-289.
- [22] XU D, JIANG M, HU W, et al. An Online Prediction Approach Based on Incremental Support Vector Machine for Dynamic Multiobjective Optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2021, 26(4): 690-703.
- [23] XIAO L. Dual Averaging Method for Regularized Stochastic Learning and Online Optimization [C] // Proceedings of Neural Information Processing Systems (NIPS), 2009.
- [24] LIANG D, LIU D. A Novel Risk Decision Making Based on Decision-Theoretic Rough Sets under Hesitant Fuzzy Information [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 23(2): 237-247.
- [25] ZHANG Y, TIAN Y, ZHANG X. Improved SparseEA for Sparse Large-Scale Multi-Objective Optimization Problems [J/OL]. Complex & Intelligent Systems, 2021. [2022-09-08]. <https://doi.org/10.1007/s40747-021-00553-0>.
- [26] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X, et al. PlatEMO: A MATLAB Platform for Evolutionary Multi-Objective Optimization (Educational Forum) [J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.
- [27] ISHIBUCHI H, IMADA R, SETOBUCHI Y, et al. Reference Point Specification in Inverted Generational Distance for Triangular Linear Pareto Front [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(6): 961-975.



**GAO Mengqi**, born in 1994, postgraduate. Her main research interests include swarm intelligence, machine learning and evolutionary computing.



**FENG Xiang**, born in 1977, Ph.D., professor, is a member of CCF (No. 16665M). Her main research interests include distributed swarm intelligence and evolutionary computing, integration learning and integration optimization, and big data intelligence.