

## 图片模糊集的一种相似度量及其在模式识别中的应用

高建雷, 罗敏霞

引用本文

高建雷, 罗敏霞. [图片模糊集的一种相似度量及其在模式识别中的应用](#) [J]. 计算机科学, 2024, 51(6A): 230500153-5.

GAO Jianlei, LUO Minxia. [Similarity Measure Between Picture Fuzzy Sets and Its Application in Pattern Recognition](#) [J]. Computer Science, 2024, 51(6A): 230500153-5.

---

### 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

**Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)**

[一个面向短波通信的LHOG语音检测方法](#)

Low-rank HOG Voice Detection Method for Short-wave Communication

计算机科学, 2024, 51(6A): 230600115-5. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230600115>

[二维多边形物体剖分研究](#)

Study on Decomposition of Two-dimensional Polygonal Objects

计算机科学, 2023, 50(11A): 230300237-5. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230300237>

[基于肌音信号图像化和卷积神经网络的手语识别研究](#)

Sign Language Recognition Based on Image-interpreted Mechanomyography and Convolution Neural Network

计算机科学, 2021, 48(11): 242-249. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.20100019>

[基于深度特征增广的跨域小样本人脸欺诈检测算法](#)

Cross-domain Few-shot Face Spoofing Detection Method Based on Deep Feature Augmentation

计算机科学, 2021, 48(2): 330-336. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200100020>

[基于手机传感器的人体活动识别综述](#)

Review of Human Activity Recognition Based on Mobile Phone Sensors

计算机科学, 2020, 47(10): 1-8. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200400092>

# 图片模糊集的一种相似度量及其在模式识别中的应用

高建雷 罗敏霞

中国计量大学数据科学系 杭州 310018

(s22080701003@cjl.u.edu.cn)

**摘要** 图片模糊集能刻画具有模糊性、不确定性和不一致性的信息,相似度量是刻画两个对象的相似程度。文中研究图片模糊集的相似度量。考虑图片模糊集 3 个隶属度的信息差,基于指数函数构造出一种新的相似度量。文中提出的相似度量不仅满足相似度量的公理化定义,并且在实际应用中得到合理的计算结果。将相似度量应用到模式识别中,与现存的一些相似度量进行对比分析,结果表明所提出的相似度量不仅可以弥补一些现存相似度量的缺陷,还可以得到合理的计算结果。

**关键词:** 图片模糊集;相似度量;模式识别

**中图分类号** TP18

## Similarity Measure Between Picture Fuzzy Sets and Its Application in Pattern Recognition

GAO Jianlei and LUO Minxia

Department of Data Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China

**Abstract** Picture fuzzy sets can depict information with fuzziness, uncertainty, and inconsistency. Similarity measure is a measure of the degree of similarity between two objects. The similarity measure between picture fuzzy sets is studied in this paper. Considering the information difference of the three membership degrees of picture fuzzy sets, a new similarity measure is constructed based on exponential function. The similarity measure proposed in this paper not only satisfies the axiomatic definition of the similarity measure, but also yields reasonable computational results in practical applications. We apply the proposed similarity measure to pattern recognition, and compare it with some existing similarity measures in examples. The results show that the proposed similarity measure can not only overcome the shortcomings of some existing similarity measures, but also obtain reasonable calculation results.

**Keywords** Picture fuzzy set, Similarity measure, Pattern recognition

图片模糊集是直觉模糊集的一般化,与直觉模糊集相比,图片模糊集是把直觉模糊集的犹豫度转化为中立度和拒绝度,并且图片模糊集满足隶属度、中立度和非隶属度三者之和不超过 1。因此,图片模糊集可以处理具有模糊性、不确定性和不一致性的信息。在日常生活中包含这样的信息的例子较多,如投票问题。投票问题是一种较经典的问题,在大会选举中,投票者需要对候选人投票,在投票时选民有以下 4 种情况,即支持票、反对票、弃权票和拒绝投票,这 4 种信息则可以用图片模糊集来刻画。

相似度量是一种重要的计算工具,它可以计算两个对象之间的相似程度。然而,图片模糊集作为表示信息的重要工具之一,关于图片模糊集的相似度量的研究有着重要的意义。这个研究方向受到了学者们的广泛关注,并且取得了一些重要的研究成果,这些研究成果也应用于多个领域,如模式识别<sup>[1-2]</sup>、多属性决策<sup>[3-5]</sup>和医疗诊断<sup>[6-8]</sup>等。

模式识别是一种常见的实际应用问题,根据对某个物理对象的观测信息,利用计算工具处理信息并对该对象进行分类,从而给出该对象所属的类别。在解决模式识别问题时,图片模糊集可以作为一种重要的工具去表示更复杂的信息,

相似度量则可以对这些复杂信息进行处理和计算,给出该物理对象的分类结果。因此,图片模糊集的相似度量在模式识别中的应用是非常有实际意义的。文献[9-10]给出图片模糊集的两种相似度量,并应用于模式识别问题;文献[11]提出了两个使用分数函数构造的相似度量,并且用于解决模式识别和聚类分析问题;文献[12]基于图片模糊集中的 3 个变量,研究了一种新型的相似度量,并用于解决模式识别和医学诊断问题。文献[13]研究了一些与指数有关的相似度量,用于解决模式识别、聚类和多属性决策问题。文献[14]提出了两个用于解决模式识别和医学诊断问题的相似度量。

然而,一些已有的图片模糊集的相似度量在实际应用时会出现一些缺陷,如有些相似度量出现反直觉的情形,有些相似度量识别两个完全不同的物体为同一类(见例 1),这些都是不合理的。为了弥补这些缺陷,本文提出了一种新的相似度量,该相似度量不仅满足相似度量的公理化定义,而且被应用于模式识别问题,同时具有较高的可信度。

### 1 预备知识

**定义 1**<sup>[15]</sup> 在论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的一个图片

基金项目:国家自然科学基金(12171445)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(12171445).

通信作者:罗敏霞(mxluo@cjl.u.edu.cn)

模糊集  $A$  的形式如下:

$$A = \{ \langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$$

其中,  $\mu_A(x_i): X \rightarrow [0, 1]$  称为“隶属度”,  $\eta_A(x_i): X \rightarrow [0, 1]$  称为“中立度”,  $\nu_A(x_i): X \rightarrow [0, 1]$  称为“非隶属度”, 并且  $\mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i)$  三者满足:  $0 \leq \mu_A(x_i) + \eta_A(x_i) + \nu_A(x_i) \leq 1, \forall x_i \in X$ . 且  $\rho_A(x_i) = 1 - \mu_A(x_i) - \eta_A(x_i) - \nu_A(x_i), \forall x_i \in X$  称为拒绝度. 论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上所有图片模糊集用  $PFS(X)$  来表示.

**定义 2**<sup>[15]</sup> 设  $A = \{ \langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}, B = \{ \langle \mu_B(x_i), \eta_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  是论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上任意两个图片模糊集,  $A$  和  $B$  的几个运算的定义如下:

(1)  $A \subseteq B$  当且仅当  $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i), \eta_A(x_i) \leq \eta_B(x_i), \nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i)$ ;

(2)  $A = B$  当且仅当  $A \subseteq B, B \subseteq A$ ;

(3)  $A^c = \{ \langle \mu, \eta, \nu \rangle \mid \mu, \eta, \nu \in [0, 1], \mu + \eta + \nu \leq 1 \}$  是图片模糊数的集合,  $\alpha = \langle \mu_\alpha, \eta_\alpha, \nu_\alpha \rangle, \beta = \langle \mu_\beta, \eta_\beta, \nu_\beta \rangle \in D^*$ , 序“ $\leq_{D^*}$ ”定义为  $\alpha \leq_{D^*} \beta$  当且仅当  $\mu_\alpha \leq \mu_\beta, \eta_\alpha \leq \eta_\beta, \nu_\alpha \geq \nu_\beta$  (见文献[15]).

**定义 3**<sup>[16]</sup> 设  $A = \{ \langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}, B = \{ \langle \mu_B(x_i), \eta_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  是论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上任意两个图片模糊集, 二元函数  $S(A, B): PFS(X) \times PFS(X) \rightarrow [0, 1]$  称为  $A$  和  $B$  的相似度量, 如果满足以下条件:

- (S1)  $0 \leq S(A, B) \leq 1$ ;
- (S2)  $S(A, B) = S(B, A)$ ;
- (S3)  $S(A, B) = 1$  当且仅当  $A = B$ ;
- (S4) 设  $C = \{ \langle \mu_C(x_i), \eta_C(x_i), \nu_C(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  也是论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的任意图片模糊集, 如果  $A \subseteq B \subseteq C$ , 那么  $S(A, C) \leq S(A, B), S(A, C) \leq S(B, C)$ .

设  $A = \{ \langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  与  $B = \{ \langle \mu_B(x_i), \eta_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  是论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上任意两个图片模糊集, 下面给出图片模糊集上已有的一些相似度量.

Singh 和 Mishra 提出的相似度量<sup>[16]</sup>如下:

$$S_{\rho_1}(A, B) = 1 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|) \quad (1)$$

$$S_{\rho_2}(A, B) = 1 - \left\{ \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 + |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$S_{\rho_3}(A, B) = 1 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|, |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|) \quad (3)$$

$$S_{\rho_4}(A, B) = 1 - \left\{ \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2, |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Dinh 和 Thao 提出的相似度量<sup>[17]</sup>如下:

$$S_{d_1}(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|) \quad (5)$$

$$S_{d_2}(A, B) = 1 - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Wei 提出的相似度量<sup>[18]</sup>如下:

$$S_{g_1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{2} (\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|, |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|)) \quad (7)$$

$$S_{g_2}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| + |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|) \quad (8)$$

$$S_{g_3}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)) \right] \quad (9)$$

$$S_{g_4}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cot \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|, |\rho_A(x_i) - \rho_B(x_i)|)) \right] \quad (10)$$

## 2 一种新的相似度量

**定理 1** 设  $A = \{ \langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}, B = \{ \langle \mu_B(x_i), \eta_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle \mid x_i \in X \}$  是论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上任意两个图片模糊集, 二元函数  $S_*: PFS(X) \times PFS(X) \rightarrow [0, 1]$  定义为:

$$S_*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\sqrt{\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2}{3}}}}{1 - e^{-1}} \quad (11)$$

则  $S_*$  是图片模糊集  $A$  和  $B$  的相似度量.

证明: 为了证明式(11)是一个相似度量, 我们只需要证明式(11)满足定义 3 的(S1)-(S4).

(S1) 因为  $0 \leq |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \leq 1, 0 \leq |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \leq 1, 0 \leq |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)| \leq 1$ , 所以  $0 \leq |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 \leq 3$ , 从而,  $e^{-1} \leq e^{-\sqrt{\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2}{3}}} \leq e^0$ .

综上,  $0 \leq S_*(A, B) \leq 1$ .

(S2)  $S_*(A, B) = S_*(B, A)$  是显然的.

(S3) 当  $S_*(A, B) = 1$  时, 那么

$$e^{-\sqrt{\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2}{3}}} = 1, \text{ 即}$$

$$-\sqrt{\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2}{3}} = 0.$$

由于  $|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^2 + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^2 + |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^2 \geq 0$ , 因此  $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \eta_A(x_i) = \eta_B(x_i), \nu_A(x_i) = \nu_B(x_i)$ , 即  $A = B$ .

当  $A=B$  时,存在  $\mu_A(x_i)=\mu_B(x_i), \eta_A(x_i)=\eta_B(x_i), \nu_A(x_i)=\nu_B(x_i)$ , 那么  $|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2=0$ , 则 
$$e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2}}{3}}=1$$
, 即  $S_*(A, B)=1$ .

(S4) 设  $A=\{\langle \mu_A(x_i), \eta_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle | x_i \in X\}, B=\{\langle \mu_B(x_i), \eta_B(x_i), \nu_B(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  和  $C=\{\langle \mu_C(x_i), \eta_C(x_i), \nu_C(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  是论域  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上任意 3 个图片模糊集, 下面给出图片模糊集  $A, B$  和  $C$  之间的相似度量:

$$S_*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$S_*(B, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{\sqrt{|\mu_B(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_B(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_B(x_i)-\nu_C(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$S_*(A, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

并且存在  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i), \eta_A(x_i) \leq \eta_B(x_i) \leq \eta_C(x_i), \nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i) \geq \nu_C(x_i)$ . 从而  $|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)| \leq |\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|, |\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)| \leq |\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|, |\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)| \leq |\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|$ , 进而  $|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2 \leq |\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|^2$ , 于是存在:

$$\begin{aligned} |\nu_B(x_i)|^2 &\leq |\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|^2 \\ &+ |\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2, \text{ 于是存在:} \\ e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2}}{3}} &\geq \\ e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|^2}}{3}} & \\ e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1} &\geq \\ \frac{e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_B(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} &\geq \\ \frac{e^{-\frac{\sqrt{|\mu_A(x_i)-\mu_C(x_i)|^2+|\eta_A(x_i)-\eta_C(x_i)|^2+|\nu_A(x_i)-\nu_C(x_i)|^2}}{3}} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} & \end{aligned}$$

因此,  $S_*(A, C) \leq S_*(A, B)$ .

同理可以证明,  $S_*(A, C) \leq S_*(B, C)$ .

### 3 模式识别的应用

#### 3.1 数值例子

例 1 设  $A_i, B_i (i=1, 2, 3, 4)$  是论域  $X=\{x_1, x_2\}$  上的任意两个图片模糊集,  $A_1=A_2, A_3=A_4, B_1 \neq B_2, B_3 \neq B_4$ . 表 1 列出了本文提出的相似度量和一些现存的相似度量的计算结果. 通过表 1 可知, 对于第一组和第二组图片模糊集, 只有  $S_{g_2}$  和  $S_{p_1}$  没有具体的分类结果, 其余相似度量都认为第一组集合的相似程度更高, 本文提出的相似度量也得到一致的结果. 对于第三组和第四组图片模糊集, 现存的相似度量都没有给出准确的分类结果, 本文提出的相似度量得到第四组图片模糊集的相似程度更高. 因此, 本文提出的相似度量在一些图片模糊集数据处理中可以弥补图片模糊集一些存在的相似度量的缺陷.

表 1 不同相似度的计算结果(例 1)

Table 1 Calculation results of different similarity measures(Example 1)

	1	2	3	4
$A_i$	$\langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4, 0.2 \rangle$
$B_i$	$\langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.1, 0.4, 0.3 \rangle$
$S_{d_1}$ ([17])	0.950	0.900	<b>0.900</b>	<b>0.900</b>
$S_{d_2}$ ([17])	0.929	0.859	<b>0.859</b>	<b>0.859</b>
$S_{g_1}$ ([18])	0.994	0.976	<b>0.976</b>	<b>0.976</b>
$S_{g_2}$ ([18])	<b>0.976</b>	<b>0.976</b>	<b>0.946</b>	<b>0.946</b>
$S_{g_3}$ ([18])	0.927	0.863	<b>0.863</b>	<b>0.863</b>
$S_{g_4}$ ([18])	0.927	0.863	<b>0.863</b>	<b>0.863</b>
$S_{p_1}$ ([16])	<b>0.950</b>	<b>0.950</b>	<b>0.925</b>	<b>0.925</b>
$S_{p_2}$ ([16])	0.929	0.913	<b>0.888</b>	<b>0.888</b>
$S_{p_3}$ ([16])	0.988	0.975	<b>0.975</b>	<b>0.975</b>
$S_{p_4}$ ([16])	0.965	0.929	<b>0.929</b>	<b>0.929</b>
本文提出的相似度 $S_*$	0.925	0.904	0.874	0.896

#### 3.2 模式识别算法及应用

模式识别是一种常见的分类问题. 首先给出一些不同类型的已知模式和一些未知模式, 模式识别问题则需要通过使用相似度量计算工具来计算未知模式和不同已知模式之间的相似程度, 相似程度越高, 说明该未知模式与这个已知模式更相似, 从而对模式进行分类.

##### 3.2.1 模式识别算法

论域  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  有  $h$  个模式  $M_j = \{\langle \mu_{M_j}(x_i), \eta_{M_j}(x_i), \nu_{M_j}(x_i) \rangle | x_i \in X\}, (j=1, 2, \dots, h)$  这些模式是已知的,  $N = \{\langle \mu_N(x_i), \eta_N(x_i), \nu_N(x_i) \rangle | x_i \in X\}$  是一个未知模式, 那么  $N$  属于哪个模式?

第 1 步 用相似度量  $S(M_j, N)$  计算模式  $M_j$  和未知模式  $N$  之间的相似程度;

第 2 步 从第 1 步中计算的相似度量中找到最大的相似度量  $S(M_{j_0}, N) = \max_{1 \leq j \leq h} S(M_j, N)$ , 那么未知模式  $N$  属于  $M_{j_0}$ .

##### 3.2.2 模式识别的应用

例 2 表 2 列出了 3 个已知模式  $A_1, A_2, A_3$  和 1 个未知模式  $B$  在图片模糊环境下的数据, 那么未知模式  $B$  属于哪种模式?

从表 3 中可以观察到, 一些现存的相似度量都存在不合理的情况, 判别两组不同的集合相似度是相等的, 这种情况会导致未知模式无法被识别分类, 因此不能产生合理的识别结

果。本文提出的相似度量则避免了该情况,并且判别未知模式  $B$  属于  $A_2$ ,因此本文提出的相似度量可以弥补一些现存相似度量的缺陷。

例3 表4列出了3个已知模式  $A_1, A_2, A_3$  和一个未知模式  $B$ ,判断未知模式  $B$  属于哪种已知模式?

表2 已知模式与未知模式的数据(例2)

Table 2 Data of known and unknown patterns(Example 2)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$A_1$	$\langle 0.5, 0.1, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.1, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.1, 0.4 \rangle$
$A_2$	$\langle 0.4, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2, 0.5 \rangle$	$\langle 0.4, 0.1, 0.3 \rangle$
$A_3$	$\langle 0.2, 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.1, 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.0, 0.0, 0.0 \rangle$
$B$	$\langle 0.3, 0.2, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.1, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.2, 0.3 \rangle$

表3 相似度的结果和模式识别结果(例2)

Table 3 Similarity results and pattern recognition results (Example 2)

相似度量	$S(A_1, B)$	$S(A_2, B)$	$S(A_3, B)$	识别结果
$S_{d_1}$ ([17])	<b>0.867</b>	<b>0.867</b>	0.700	无法确定
$S_{d_2}$ ([17])	<b>0.859</b>	<b>0.859</b>	0.689	无法确定
$S_{k_1}$ ([18])	<b>0.975</b>	<b>0.975</b>	0.666	无法确定
$S_{k_2}$ ([18])	<b>0.943</b>	<b>0.943</b>	0.639	无法确定
$S_{k_3}$ ([18])	<b>0.812</b>	<b>0.812</b>	0.616	无法确定
$S_{k_4}$ ([18])	<b>0.812</b>	<b>0.812</b>	0.473	无法确定
$S_{p_1}$ ([16])	<b>0.900</b>	<b>0.900</b>	0.750	无法确定
$S_{p_2}$ ([16])	<b>0.885</b>	<b>0.885</b>	0.663	无法确定
$S_{p_3}$ ([16])	<b>0.967</b>	<b>0.967</b>	0.883	无法确定
$S_{p_4}$ ([16])	<b>0.929</b>	<b>0.929</b>	0.720	无法确定
本文提出的相似度量 $S^*$	0.836	0.851	0.678	$A_2$

表4 已知模式与未知模式的数据(例3)

Table 4 Data of known and unknown patterns(Example 3)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$A_1$	$\langle 0.4, 0.3, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3, 0.0 \rangle$	$\langle 0.7, 0.0, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1, 0.1 \rangle$
$A_2$	$\langle 0.7, 0.1, 0.1 \rangle$	$\langle 0.2, 0.3, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.1, 0.5 \rangle$	$\langle 0.1, 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.3, 0.3, 0.3 \rangle$
$A_3$	$\langle 0.1, 0.3, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.2, 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3, 0.1 \rangle$
$B$	$\langle 0.6, 0.2, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1, 0.0 \rangle$	$\langle 0.4, 0.2, 0.2 \rangle$

从表5中可以观察到,本文引用的现有的图片模糊集的一些相似度量判别得出未知模式  $B$  属于  $A_1$ ,同时本文所提出的相似度量也可以得到一致的结果,因此本文提出的相似度量是合理且有效的。

表5 相似度的结果和模式识别结果(例3)

Table 5 Similarity results and pattern recognition results (Example 3)

相似度量	$S(A_1, B)$	$S(A_2, B)$	$S(A_3, B)$	识别结果
$S_{d_1}$ ([17])	0.800	0.740	0.740	$A_1$
$S_{d_2}$ ([17])	0.800	0.681	0.674	$A_1$
$S_{k_1}$ ([18])	0.951	0.881	0.875	$A_1$
$S_{k_2}$ ([18])	0.951	0.857	0.810	$A_1$
$S_{k_3}$ ([18])	0.727	0.674	0.678	$A_1$
$S_{k_4}$ ([18])	0.727	0.674	0.678	$A_1$
$S_{p_1}$ ([16])	0.900	0.850	0.830	$A_1$
$S_{p_2}$ ([16])	0.874	0.793	0.776	$A_1$
$S_{p_3}$ ([16])	0.950	0.935	0.935	$A_1$
$S_{p_4}$ ([16])	0.900	0.840	0.837	$A_1$
本文提出的相似度量 $S^*$	0.809	0.653	0.732	$A_1$

**结束语** 本文提出了图片模糊集的一种新的相似度量,这个相似度量是基于图片模糊集的隶属度、中立度和非隶属度的差,并且将指数函数与三者的差结合起来构造的。通过模式识别的应用我们可以看到,在一些情况下,现存图片模糊集的一些相似度量会出现不合理的情况,本文提出的相似度量则可以弥补这些缺陷。通过与现存一些相似度量进行比较分析,我们可以看到提出的相似度量可以得到合理的结果。在未来,我们将利用图片模糊数与梯形模糊数的转换关系,利用定积分进一步研究图片模糊集新的相似度量,并用于解决多属性决策问题及医疗诊断问题。

### 参考文献

- [1] LUO M X, LI W L. Some new similarity measures on picture fuzzy sets and their applications [J]. Soft Computing, 2023, 27: 6049-6067.
- [2] LUO M X, ZHANG Y. A new similarity measure between picture fuzzy sets and its application [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 96: 103956.
- [3] LUO M X, ZHANG Y, FU LI. A new similarity measure for picture fuzzy sets and its application to multi-attribute decision making [J]. Informatica, 2021, 32(3): 543-564.
- [4] GANIE A H, SINGH S. A picture fuzzy similarity measure based on direct operations and novel multi-attribute decision-making method [J]. Neural Computing and Applications, 2021, 33(15): 9199-9219.
- [5] THAO N X. Similarity measures of picture fuzzy sets based on entropy and their application in MCDM [J]. Pattern Analysis and Applications, 2020, 23(3): 1203-1213.
- [6] KHAN M J, KUMAM P, DEEBANI W, et al. Bi-parametric distance and similarity measures of picture fuzzy sets and their applications in medical diagnosis [J]. Egyptian Informatics Journal, 2021, 22(2): 201-212.
- [7] JIN J L, HARISH G, YOU T J. Generalized picture fuzzy distance and similarity measures on the complete lattice and their applications [J]. Expert Systems with Applications, 2023, 220: 119710.
- [8] FATHIMA PERVEEN P A, JOHN S J, KAMACI H, et al. A novel similarity measure of picture fuzzy sets and its applications [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2023, 44(3): 4653-4665.
- [9] WEI G. Some similarity measures for picture fuzzy sets and their applications [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2018, 15(1): 77-89.
- [10] WEI G, GAO H. The generalized Dice similarity measures for picture fuzzy sets and their application [J]. Informatica, 2018, 29(1): 107-124.
- [11] GUPTA R, KUMAR S. A new similarity measure between picture fuzzy sets with applications to pattern recognition and clustering problems [J]. Granular Computing, 2022, 7(3): 561-576.
- [12] LUO M X, ZHANG Y. A new similarity measure between picture fuzzy sets and its application [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 96: 103956.
- [13] SINGH S, GANIE A H. Applications of picture fuzzy similarity measures in pattern recognition, clustering, and MADM [J]. Expert Systems with Applications, 2021, 168: 114264.

- [14] VERMA R, ROHTAGI B. Novel similarity measures between picture fuzzy sets and their applications to pattern recognition and medical diagnosis [J]. *Granular Computing*, 2022, 7: 761-777.
- [15] CUONG B C, KREINOVICH V. Picture fuzzy sets-a new concept for computational intelligence problems[C]//Proceeding of 2013 3rd World Congress on Information and Communication Technologies. Vietnam: WICT, 2013: 1-6.
- [16] SINGH P, MISHRA N K, KUMAR M, et al. Risk analysis of flood disaster based on similarity measures in picture fuzzy environment [J]. *Afrika Matematika*, 2018, 29(7): 1019-1038.
- [17] DINH N V, THAO N X, XUAN N. Some measures of picture fuzzy sets and their application in multi-attribute decision making [J]. *International Journal Mathematical Sciences and Computing*, 2018, 4(3): 23-41.
- [18] WEI G. Some cosine similarity measures for picture fuzzy sets

and their applications to strategic decision making [J]. *Informatica*, 2017, 28(3): 547-564.



**GAO Jianlei**, born in 1997, postgraduate. His main research interest include pattern recognition.



**LUO Minxia**, born in 1964, professor, doctor, master supervisor. Her main research interests include non-classical logic, approximate reasoning and image processing.