计算机科学
COMPUTER SCIENCE

保持决策蕴涵不变的决策背景属性约简

毕盛, 翟岩慧, 李德玉

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.230900009

保持决策蕴涵不变的决策背景属性约简

毕 盛 翟岩慧 李德玉
山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006
山西大学计算智能与中文信息处理教育部重点实验室 太原 030006
(bisheng20210320@163.com)

摘 要 形式概念分析是一种利用概念格进行数据分析的理论,属性约简是概念格约简的主要方式之一。决策蕴涵是形式概念分析在决策情形下的一种知识表示与推理模型。在已有保持决策背景知识信息不变的属性约简研究中,通常以保持概念规则或粒规则来保持决策背景的知识信息。而相比于概念规则与粒规则,决策蕴涵具备更强的知识表示能力。为了进一步缩小数据在属性约简前后对知识信息表示的差异,对保持决策蕴涵不变的属性约简进行了研究。首先,结合决策蕴涵的语义给出了保持决策蕴涵不变的协调集和约简定义,提出了判定协调集和约简的充要条件;接着,通过实例分析了该约简存在的问题,并结合蕴涵理论给出解决方法,从而给出了弱协调集和弱约简的定义;然后,从知识包含的角度分析了弱约简相比于约简的合理性;最后,提出了判定弱协调集和弱约简的充要条件,并结合决策蕴涵规范基给出了能够找到弱约简的方法,丰富了保持知识信息的属性约简研究内容。

关键词:形式概念分析;属性约简;决策蕴涵;知识表示模型;决策蕴涵规范基
中图分类号 TP182

Decision Implication Preserving Attribute Reduction in Decision Context

BI Sheng,ZHAI Yanhui and LI Deyu
School of Computer and Information Technology,Shanxi University,Taiyuan 030006,China
Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing of Ministry of Education,Shanxi University,Taiyuan 030006,China

Abstract Formal concept analysis is a theory of data analysis using concept lattice,and attribute reduction is one of the main ways of concept lattice reduction. Decision implication is a knowledge representation and reasoning model of formal concept analysis in decision situations. In the existing research on attribute reduction that preserves decision context knowledge information,concept rules or granular rules are usually used to preserve decision context knowledge information. Compared with concept rules and granular rules,decision implication has a stronger ability of knowledge representation. To further reduce the difference between the representation of knowledge information before and after attribute reduction,a study is conducted on attribute reduction which preserves decision implication. Firstly,based on the semantics of decision implication,the definitions of consistent set and reduction that preserve decision implication aregiven,and the necessary and sufficient conditions for determining consistent set and reduction are provided. Examples show the problems of the reduction,and by combining implication theory,the definitions of weak consistent set and weak reduction are introduced. Then,the rationality of weak reduction compared with reduction is analyzed from the perspective of knowledge inclusion. Finally,the necessary and sufficient conditions for judging weak consistent set and weak reduction are provided,and the method that can find weak reduction is given by combining decision implication canonical basis,which enriches the research of attribute reduction that preserves knowledge information.

Keywords Formal concept analysis,Attribute reduction,Decision implication,Knowledge representation model,Decision implication canonical basis

1 引言

形式概念分析(Formal Concept Analysis,FCA)是由德国教授 Wille 提出的一种数据分析方法[1],利用形式背景体现对象与属性之间的二元关系,利用概念格挖掘数据之间的关联关系[2]。目前,形式概念分析已普遍与粒计算[3]、粗糙集[3]、三支

到稿日期:2023-09-04 返修日期:2023-12-01
基金项目:国家自然科学基金(61972238,62072294)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61972238,62072294).
通信作者:翟岩慧(chai_yanhui@163.com)

决策[4]等领域相结合，并且被广泛应用到机器学习[5]、软件工程[6]、冲突分析[7]等诸多领域[8]。

为了更好地进行数据分析并节约存储空间，有必要对概念格进行约简。概念格的约简方式可分为对象约简[9]、属性约简[10-17]以及概念约简[18-19] 3 种。其中，属性约简是一种在保持一致性的基础上消除冗余属性以实现概念格简化的方法，其目标是找到不破坏一致性的最小属性集。属性约简作为概念格约简的主要方式之一，一直以来都是 FCA 的热门研究内容并被学术界广泛关注[10-17]。从基于概念格结构及概念格基本构成单元的一致性角度出发，Shao 等[10]研究了保持概念格结构不变的属性约简；Wang 等[11]研究了保持交不可约元外延集不变的属性约简；Ren 等[12]研究了保持并不可约元外延集不变的属性约简；Li 等[13]将粒计算思想与形式概念分析相结合，研究了粒约简方法；Yue 等[14]研究了面向属性概念格与面向对象概念格上的属性约简。

然而，有些情况下会要求数据在进行属性约简前后所表达的知识信息（即属性之间的依赖关系）相同。基于此，Zhai 等[15]通过保持任意对象对的包含度不变性研究了模糊背景下保持知识结构不变的属性约简，并给出了一种计算模糊属性约简的算法。Li 等[16]利用确定性决策规则和可能性决策规则（决策规则即概念规则）研究了决策背景属性约简问题；Zhang 等[17]研究了粒协调决策形式背景下保持粒规则的属性约简问题。

在决策背景下，通常选择决策蕴涵[20-22]、概念规则[23]以及粒规则[23]来表达知识信息。决策蕴涵是在决策背景下反映条件属性与决策属性之间关联关系的蕴涵，其前提均为条件属性，结论均为决策属性。概念规则与粒规则是两种知识表示与推理模型，其含义分别为在某个条件概念外延或条件粒外延与某个决策概念外延或决策粒外延之间具有某种关系时，相应的两个概念内涵或粒内涵之间具有的关系。概念规则与粒规则也是特殊的决策蕴涵。在目前的决策背景属性约简研究中，由于概念规则和粒规则更便于从决策背景的两个概念格（条件概念格与决策概念格）中获取，研究人员通常选择保持概念规则或粒规则来保留决策背景的知识信息。研究表明[24]，相比于概念规则或粒规则，决策蕴涵具备更强的知识表示能力。换句话说，当基于概念规则或粒规则进行知识表示与推理时，会存在不同程度的知识损失。由此可知，概念规则和粒规则都在一定程度上反映了条件属性与决策属性之间的依赖关系，但并不完全。因此，数据在基于保持概念规则或粒规则进行属性约简前后所表达的知识信息（条件属性与决策属性之间的依赖关系）将存在一些差异。为了进一步缩小数据在属性约简前后所表达知识信息的差异，本文进行决策背景下保持决策蕴涵不变的属性约简研究。

2 预备知识

本章主要介绍决策背景与决策蕴涵的基础概念。

定义 1[20] 决策背景是一个三元组 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$，其中 G 为对象集，C 为条件属性集，D 为决策属性集，$C\cap D=\emptyset$，I_C和I_D分别为G 与C 和D 之间的二元关系。对于 $o\in G, m\in C\cup D$，$(o,m)\in I_C\cup I_D$表示对象 o 具有属性 m。

例 1 表 1 列出了一个决策背景 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$，其中对象集 $G=\{o_1,o_2,o_3,o_4,o_5\}$，条件属性集 $C=\{a,b,c,d,e\}$，决策属性集 $D=\{f,g,h\}$。表 1 中的 0 代表该对象不具有该属性，1 代表该对象具有该属性，如对象o_1具有属性$\{b,d,f,h\}$，不具有属性$\{a,c,e,g\}$。

表 1 决策背景 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$

Table 1 Decision context $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$

G	a	b	c	d	e	f	g	h
o_1	0	1	0	1	0	1	0	1
o_2	1	1	1	0	1	0	1	1
o_3	1	1	0	0	1	0	1	0
o_4	0	1	1	1	0	1	0	1
o_5	0	0	0	0	1	0	1	0

定义 2[20] 设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$为决策背景，对于集合$G_1\subseteq G, A\subseteq C, B\subseteq D$，记：

$G_1^C=\{m\in C\mid(o,m)\in I_C,\forall o\in G_1\}$

$G_1^D=\{m\in D\mid(o,m)\in I_D,\forall o\in G_1\}$

$A^C=\{o\in G\mid(o,m)\in I_C,\forall m\in A\}$

$B^D=\{o\in G\mid(o,m)\in I_D,\forall m\in B\}$

定义 3[20] 设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$为决策背景。若 $A\subseteq C, B\subseteq D$ 且$A^C\subseteq B^D$，则 $A\rightarrow B$ 被称为 K 上成立的决策蕴涵，称 A 为决策蕴涵的前提，B 为决策蕴涵的结论。K 上成立的所有决策蕴涵的集合记作$\mathscr{L}_K$。

显然，决策蕴涵 $A\rightarrow B$ 的含义为：若某对象具有条件属性集 A 中的所有属性，则该对象必然具有决策属性集 B 中的所有属性。

定义 4[20] 设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$为决策背景，$T\subseteq C\cup D$，$A\rightarrow B$ 是 K 上成立的决策蕴涵，$\mathscr{L}$和$\mathscr{L}_1$是 K 上成立的决策蕴涵集。定义：

(1)若 $A\nsubseteq T$ 或 $B\subseteq T$ 成立，则称 T 是 $A\rightarrow B$ 的模型，记作 $T\models A\rightarrow B$。

(2)若任意的 $A\rightarrow B\in\mathscr{L}$，$T$ 是 $A\rightarrow B$ 的模型，则称 T 是 $\mathscr{L}$ 的模型，记作 $T\models\mathscr{L}$。

(3)若任意的 $T\subseteq C\cup D$，$T\models\mathscr{L}$ 蕴含 $T\models A\rightarrow B$，则称决策蕴涵 $A\rightarrow B$ 可以从 $\mathscr{L}$ 中语义导出，记作 $\mathscr{L}\vdash A\rightarrow B$。

(4)若任意的 $A\rightarrow B\in\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}\vdash A\rightarrow B$，则称$\mathscr{L}_1$可以由 $\mathscr{L}$ 语义导出，记作 $\mathscr{L}\vdash\mathscr{L}_1$。

(5)若由 $\mathscr{L}$ 语义导出的全部决策蕴涵都包含在 $\mathscr{L}$ 中，则称 $\mathscr{L}$ 是封闭的。

(6)对于封闭的决策蕴涵集 $\mathscr{L}$，若 $\mathscr{L}$ 可以从$\mathscr{L}_2\subseteq\mathscr{L}$ 中语义导出，则称$\mathscr{L}_2$相对于 $\mathscr{L}$ 是完备的。

(7)若任意的 $A\rightarrow B\in\mathscr{L}$，$\mathscr{L}\backslash\{A\rightarrow B\}\nvdash A\rightarrow B$，则称决策蕴涵集 $\mathscr{L}$ 是无冗余的。

定义 5[25-26] 设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$为决策背景，集合$C_1\subseteq C$ 被称为 K 的决策前提，若满足下列条件：

(1)C_1相对于C_1^{CD}是最小的，即若$C_2\subset C_1$，则$C_2^{CD}\subset C_1^{CD}$。

(2)C_1是恰当的，即$C_1^{CD}\neq\bigcup\{C_i^{CD}\mid C_i\subset C_1, C_i$是 K 的决策前提$\}$。

则称集合$K_C^*=\{C_1\rightarrow C_1^{CD}\mid C_1$是 K 的决策前提$\}$为 K 的决策蕴涵规范基。

决策蕴涵规范基是一个完备无冗余且最优的决策蕴涵集[25-26]。

例 2　表 2 为表 1 决策背景中成立的所有决策蕴涵，表 3 为 K 的决策蕴涵规范基。对于任意一条决策蕴涵，如 $ae\to g$，可以通过定义 3 验证 $ae\to g$ 是 K 上成立的决策蕴涵（$\{a,e\}^C=\{o_2,o_3,o_5\}\subseteq\{g\}^D=\{o_2,o_3,o_5\}$）。可以验证，$K_C^*$ 的任意模型也是 $ae\to g$ 的模型，结合定义 4 可知，$ae\to g$ 能由 K_C^* 语义导出；进一步易知，K 上成立的任意决策蕴涵都能由 K_C^* 语义导出，即 K_C^* 是完备的。对于 K_C^* 中的任意一条决策蕴涵，如 $a\to g$，总能找到 $K_C^*\setminus\{a\to g\}$ 的模型 $\{a\}$，使得 $\{a\}$ 不是 $a\to g$ 的模型，结合定义 4 可知，$K_C^*\setminus\{a\to g\}$ 不能语义导出 $a\to g$；进一步易知，K_C^* 是无冗余的。

表 2　K 上成立的所有决策蕴涵

Table 2　All decision implications of K

所有决策蕴涵			
$a\to g$	$de\to gf$	$bcd\to f$	$abce\to fh$
$c\to h$	$de\to gh$	$bcd\to h$	$abce\to gfh$
$d\to f$	$de\to fh$	$bcd\to fh$	$abde\to g$
$d\to h$	$de\to gfh$	$bce\to g$	$abde\to f$
$d\to fh$	$abc\to g$	$bce\to h$	$abde\to h$
$e\to g$	$abc\to h$	$bce\to gh$	$abde\to gf$
$ab\to g$	$abc\to gh$	$bde\to g$	$abde\to gh$
$ac\to g$	$abd\to g$	$bde\to f$	$abde\to fh$
$ac\to h$	$abd\to f$	$bde\to h$	$abde\to gfh$
$ac\to gh$	$abd\to h$	$bde\to gf$	$acde\to g$
$ad\to g$	$abd\to gf$	$bde\to gh$	$acde\to f$
$ad\to f$	$abd\to gh$	$bde\to fh$	$acde\to h$
$ad\to h$	$abd\to fh$	$bde\to gfh$	$acde\to gf$
$ad\to gf$	$abd\to gfh$	$cde\to g$	$acde\to gh$
$ad\to gh$	$abe\to g$	$cde\to f$	$acde\to fh$
$ad\to fh$	$acd\to g$	$cde\to h$	$acde\to gfh$
$ad\to gfh$	$acd\to f$	$cde\to gf$	$bcde\to g$
$ae\to g$	$acd\to h$	$cde\to gh$	$bcde\to f$
$bc\to h$	$acd\to gf$	$cde\to fh$	$bcde\to h$
$bd\to f$	$acd\to gh$	$cde\to gfh$	$bcde\to gf$
$bd\to h$	$acd\to fh$	$abcd\to g$	$bcde\to gh$
$bd\to fh$	$acd\to gfh$	$abcd\to f$	$bcde\to fh$
$be\to g$	$ace\to g$	$abcd\to h$	$bcde\to gfh$
$cd\to f$	$ace\to h$	$abcd\to gf$	$abcde\to g$
$cd\to h$	$ace\to gh$	$abcd\to gh$	$abcde\to f$
$cd\to fh$	$ade\to g$	$abcd\to fh$	$abcde\to h$
$ce\to g$	$ade\to f$	$abcd\to gfh$	$abcde\to gf$
$ce\to h$	$ade\to h$	$abce\to g$	$abcde\to gh$
$ce\to gh$	$ade\to gf$	$abce\to f$	$abcde\to fh$
$de\to g$	$ade\to gh$	$abce\to h$	$abcde\to gfh$
$de\to f$	$ade\to fh$	$abce\to gf$	
$de\to h$	$ade\to gfh$	$abce\to gh$	

表 3　K 的决策蕴涵规范基 K_C^*

Table 3　Decision implication canonical basis K_C^* of K

决策蕴涵规范基			
$a\to g$	$e\to g$	$c\to h$	$d\to fh$

3　保持决策蕴涵不变的协调集和约简

形式背景中的知识信息是属性之间的关联关系，通常以蕴涵的方式来表述。然而，相比于形式背景，决策背景更加强调条件属性与决策属性之间的关联关系，所以决策背景中的知识信息也可称为决策信息。

概念规则和粒规则都是特殊的决策蕴涵，而粒规则又是特殊的概念规则。文献[24]的研究表明，概念规则和粒规则可能损失决策蕴涵中含有的决策信息。如果以保持概念规则或粒规则不变对决策背景进行属性约简，仅能够保持原背景中的概念规则和粒规则含有的决策信息，决策蕴涵含有的部分决策信息可能由于部分属性被约简而导致知识缺失。若能保证原背景中的所有决策蕴涵都能够在属性约简后被直接获取（在约简后的背景上成立）或被推导得到，则约简后的背景将能够保留原背景中的所有决策信息。因此，接下来研究如何通过保持所有决策蕴涵来保持决策背景中的全部知识。

决策蕴涵的语义导出提供一种根据已有决策蕴涵推导新决策蕴涵的方法。对于决策蕴涵 $A\to B$，若 $\mathscr{L}\vdash A\to B$，则 $A\to B$ 的含义包含在决策蕴涵集 $\mathscr{L}$ 中，即 $A\to B$ 中的决策信息能够由决策蕴涵集 $\mathscr{L}$ 表述。因此，在属性约简过程中，若原背景中的决策蕴涵都能由约简后背景中的决策蕴涵语义导出，则可以认为原背景中的决策信息没有损失。结合上述分析，可以给出保持决策蕴涵不变的属性约简定义。

定义 6　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景，K^S 为 K 的子背景，即 $K^S=(G,S\cup D,I_S\cup I_D)$，$S\subseteq C$，$I_S=I_C\cap(G\times S)$。如果对于任意的 $A\to B\in\mathscr{L}_K$，$\mathscr{L}_{K^S}\vdash A\to B$，则称 S 是 K 的保持决策蕴涵不变的协调集，简称协调集；若 S 是 K 的协调集且 S 的任意真子集都不是 K 的协调集，则称 S 是 K 的保持决策蕴涵不变的约简，简称约简。

因为 $\mathscr{L}_K$ 包含 K 上成立的所有决策蕴涵，即包含 K 的所有决策信息，因此若 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash\mathscr{L}_K$，则表明 $\mathscr{L}_K$ 中的决策蕴涵都能由 $\mathscr{L}_{K^S}$ 推导得到，即 $\mathscr{L}_{K^S}$ 包含了 $\mathscr{L}_K$ 的所有决策信息。

性质 1　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景，K^S 为 K 的子背景，即 $K^S=(G,S\cup D,I_S\cup I_D)$，$S\subseteq C$，$I_S=I_C\cap(G\times S)$。若 S 不是 K 的协调集，则任意的 $S_1\subseteq S$ 也不是 K 的协调集。

性质 1 表明协调集的超集也是协调集，非协调集的子集也是非协调集。同时，由于决策蕴涵的语义和语构是一致的，为了便于叙述，可以从语构角度进行决策信息的研究。为此，引入以下结论：

引理 1[20]　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景，$A\subseteq C$，$A_1\subseteq C$，$B\subseteq D$，$B_1\subseteq D$。以下结论成立：

（1）若 $A\to B$ 在 K 上成立，$A_1\supseteq A$，$B_1\subseteq B$，则 $A\to B\vdash A_1\to B_1$。

（2）若 $A\to B$ 与 $A_1\to B_1$ 在 K 上成立，则 $\{A\to B,A_1\to B_1\}\vdash A\cup A_1\to B\cup B_1$。

引理 1 中的结论（1）为扩增推理规则，结论（2）为合并推理规则。由文献[20]可知，扩增推理规则与合并推理规则相对于语义是完备的，即对于任意的封闭集 $\mathscr{L}$ 及其完备集 $\mathscr{L}_1\subseteq\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 中的决策蕴涵都能由 $\mathscr{L}_1$ 中的决策蕴涵多次使用扩增推理规则与合并推理规则得到。反之，扩增推理规则与合并推理规则相对于语义是合理的，即若决策蕴涵 $A\to B$ 可以被决策蕴涵集 $\mathscr{L}$ 使用扩增推理规则与合并推理规则推导得出，则 $\mathscr{L}\vdash A\to B$。

下面给出协调集和约简的判定定理。

命题 1　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景，记 $E=\bigcup\{A\mid A\to B\in K_C^*\}$，则 $S\subseteq C$ 是 K 的协调集当且仅当 $K_S^*\vdash$

K_C^*，当且仅当 $S \supseteq E$；进一步，$S \subseteq C$ 是 K 的约简当且仅当 $S=E$。

证明：首先证明 $S \subseteq C$ 是 K 的协调集当且仅当 $K_S^* \vdash K_C^*$。

(必要性)由 K_S^* 是 K^S 的决策蕴涵规范基可知，$K_S^* \vdash \mathscr{L}_{K^S}$，又因为 $S \subseteq C$ 是 K 的协调集，即 $\mathscr{L}_{K^S} \vdash \mathscr{L}_K$，所以 $K_S^* \vdash \mathscr{L}_K$。由 K_C^* 是 K 的决策蕴涵规范基可知，$K_C^* \subseteq \mathscr{L}_K$，故 $K_S^* \vdash K_C^*$。

(充分性)由 K_C^* 是 K 决策蕴涵规范基可知，$K_C^* \vdash \mathscr{L}_K$，又因为 $K_S^* \vdash K_C^*$，所以 $K_S^* \vdash \mathscr{L}_K$。由 K_S^* 是 K^S 的决策蕴涵规范基可知，$K_S^* \subseteq \mathscr{L}_{K^S}$，故有 $\mathscr{L}_{K^S} \vdash \mathscr{L}_K$，即 S 是 K 的协调集。

接下来证明 $S \subseteq C$ 是 K 的协调集当且仅当 $S \supseteq E$。

(必要性)首先证明 $K_C^* \vdash K_S^*$。由 K_C^* 是 K 的决策蕴涵规范基可知，$K_C^* \vdash \mathscr{L}_K$。由 K^S 是 K 的子背景和 K_S^* 是 K^S 的决策蕴涵规范基可知，$K_S^* \subseteq \mathscr{L}_{K^S} \subseteq \mathscr{L}_K$，故有 $K_C^* \vdash K_S^*$。

接下来证明 $S \supseteq E$。假设 $S \not\supseteq E$，则存在 $A \to B \in K_C^*$ 满足 $S \not\supseteq A$。对于任意的 $A_1 \to B_1 \in K_S^*$，由 $K_C^* \vdash K_S^*$ 可知，$K_C^* \vdash A_1 \to B_1$，由引理 1 可知，$A_1 \to B_1$ 可由 K_C^* 中的决策蕴涵通过扩增推理规则或合并推理规则得到。然而，由于 $S \not\supseteq A$，而 $S \supseteq A_1$，故 $A_1 \not\supseteq A$；由扩增推理规则或合并推理规则的形式可知，由 $A \to B$ 参与扩增或合并推导得到的决策蕴涵的前件必然包含 A，而 $A_1 \not\supseteq A$，因此 $A_1 \to B_1$ 不能由 $A \to B$ 通过扩增推理规则或合并推理规则得到，所以 $K_C^* \setminus \{A \to B\} \vdash K_S^*$。由 S 是 K 的协调集可知，$K_S^* \vdash K_C^*$，因此 $K_C^* \setminus \{A \to B\} \vdash K_C^*$，而由决策蕴涵规范基的无冗余性可知，$K_C^* \setminus \{A \to B\} \nvdash A \to B$，所以 $K_C^* \setminus \{A \to B\} \nvdash K_C^*$，矛盾。

(充分性)因为 $S \supseteq E = \bigcup\{A \mid A \to B \in K_C^*\}$，因此对于任意的 $A \to B \in K_C^*$，$A \to B$ 在 K^S 上成立，故有 $K_C^* \subseteq \mathscr{L}_{K^S}$；又因为 $K_C^* \vdash \mathscr{L}_{K^S}$，因此 $\mathscr{L}_{K^S} \vdash \mathscr{L}_K$，即 S 是 K 的协调集。

下面证明 $S \subseteq C$ 是 K 的约简当且仅当 $S=E$。

(必要性)因为 S 是 K 的约简，所以 S 是 K 的协调集，即有 $S \supseteq E$。假设 $S \neq E$，即 $S \supset E$。因为 $E = \bigcup\{A \mid A \to B \in K_C^*\}$，对于任意的 $A \to B \in K_C^*$，$A \to B$ 在 K^E 上成立，故有 $K_C^* \subseteq \mathscr{L}_{K^E}$；又因为 $K_C^* \vdash \mathscr{L}_K$，因此 $\mathscr{L}_{K^E} \vdash \mathscr{L}_K$，即 E 是 K 的协调集。因此，S 不是 K 的约简，与条件矛盾。

(充分性)若 $S=E$，因为 $S \supseteq E$，因此 S 是 K 的协调集。若存在 $S_1 \subset S=E$ 是 K 的协调集，则其与结论“S_1 是 K 的协调集当且仅当 $S_1 \supseteq E$”矛盾。

由命题 1 可知，为了保证协调性，决策蕴涵规范基中的所有决策蕴涵前件中的属性均不能被约去。在现实场景中，大部分数据的决策蕴涵规范基几乎包含了所有的条件属性，导致几乎所有条件属性都不能被删除。

例 3　对于表 1 所列的决策背景，令 $S=\{a,c,d,e\}$，K^S 如表 4 所列，K^S 的决策蕴涵规范基 K_S^* 如表 5 所列。

表 4　决策背景 $K^S=(G,S \cup D,I_S \cup I_D)$

Table 4　Decision context $K^S=(G,S \cup D,I_S \cup I_D)$

G	a	c	d	e	f	g	h
o_1	0	0	1	0	1	0	1
o_2	1	1	0	1	0	1	1
o_3	1	0	0	1	0	1	0
o_4	0	1	1	0	1	0	1
o_5	0	0	0	1	0	1	0

表 5　K^S 的决策蕴涵规范基 K_S^*

Table 5　Decision implication canonical basis K_S^* of K^S

决策蕴涵规范基			
$a \to g$	$e \to g$	$c \to h$	$d \to fh$

对比表 5 与表 3 可以发现，K_S^* 与 K_C^* 完全相同，即有 $K_S^* = K_C^* \vdash \mathscr{L}_K$，因此 $S=\{a,c,d,e\}$ 是 K 的一个协调集。容易看出，删除 S 中的任意属性会导致 K_S^* 发生变化，例如删除属性 a 会导致 $a \to g$ 从 K_S^* 中删除。可以验证，$S_1=\{a,c,d\}$，$S_2=\{a,c,e\}$，$S_3=\{a,d,e\}$ 和 $S_4=\{c,d,e\}$ 都不是 K 的协调集，结合性质 1 与命题 1 可知，$S=\{a,c,d,e\}$ 的所有真子集都不是 K 的协调集，所以 S 是 K 的一个约简。可以看出，表 1 中只有不属于 K_C^* 中任意决策蕴涵前件的属性 b 才能被约去。

4　保持决策蕴涵不变的弱协调集和弱约简

由例 3 可知，只有不在决策蕴涵规范基中的条件属性才能被约去，导致几乎所有的条件属性都不能够被删除。为了解决上述问题并给出更合适的属性约简定义(在保持决策背景中所有决策信息不变的前提下，定义能够尽可能多地删除冗余属性的协调集和约简)，接下来引入蕴涵的概念来研究决策蕴涵所表述的决策信息之间的包含关系。为此，首先给出蕴涵的定义。

定义 7[1]　设 $K_C=(G,C,I_C)$ 为条件子背景。若 $A_1, A_2 \subseteq C$ 且 $A_1^C \subseteq A_2^C$，则 $A_1 \to A_2$ 被称为 K_C 上成立的蕴涵，称 A_1 为蕴涵的前提，A_2 为蕴涵的结论。

观察表 5 可知，K_S^* 中的决策蕴涵 $a \to g$ 与 $e \to g$ 具有相同的结论和不同的前提。接下来从蕴涵的角度来分析 $a \to g$ 与 $e \to g$ 的价值差异以及决策信息的包含关系。

例 4　续例 3，由表 4 可知蕴涵 $a \to e$ 成立，即 $\{a\}^C \subseteq \{e\}^C$，这表明在 K^S 中具有属性 a 的对象必然具有属性 e，如 $\{o_2, o_3\}$。反之，在 K^S 中具有属性 e 的对象可能不具有属性 a，如 $\{o_5\}$。因此，若使用决策蕴涵 $e \to g$，在对象具有属性 e 时，无需关注该对象是否具有属性 a 即可判断该对象具有决策属性 g。若使用决策蕴涵 $a \to g$，只有在对象具有属性 a 时才能判断对象具有决策属性 g；当对象不具有属性 a 时(如对象 o_5)，则无法判断对象是否具有决策属性 g。换言之，决策蕴涵 $e \to g$ 比 $a \to g$ 覆盖更多的对象，因此其决策更有价值。

下面的结论验证了上述分析的合理性。

命题 2　设 $K=(G,C \cup D,I_C \cup I_D)$ 为决策背景，$A_1, A_2 \subseteq C$，$B \subseteq D$。若 $A_1 \to A_2$ 在 K_C 上成立，$A_2 \to B$ 在 K 上成立，则 $A_1 \to B$ 在 K 上成立。

证明：因为 $A_1 \to A_2$ 在 K_C 上成立，由定义 7 可知 $A_1^C \subseteq A_2^C$。因为 $A_2 \to B$ 在 K 上成立，由定义 3 可知 $A_2^C \subseteq B^D$，所以 $A_1^C \subseteq A_2^C \subseteq B^D$，即 $A_1 \to B$ 在 K 上成立。

命题 2 表明，当结论相同的两个决策蕴涵 $A_1 \to B$ 与 $A_2 \to B$ 的前件之间具有蕴涵关系 $A_1 \to A_2$ 时，无论在语义上 $A_2 \to B$ 是否能够推导得出 $A_1 \to B$，$A_1 \to B$ 所包含的决策信息都能够由 $A_2 \to B$ 间接表达。实际上，命题 2 给出的结论是利用了决策蕴涵前件间的蕴涵关系，从而弱化了扩增推理规则成立的约束条件；又因为对于一个确定的决策背景，其条件属性及决

策蕴涵前件的蕴涵关系是确定的,所以这种不依赖语义导出的决策信息推导方式是成立的。

接下来结合命题2中知识包含的结论,给出新的保持决策蕴涵不变的属性约简定义。

定义8　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景,K^S 为 K 的子背景,即 $K^S=(G,S\cup D,I_S\cup I_D)$,$S\subseteq C$,$I_S=I_C\cap(G\times S)$。如果对于任意的 $A\to B\in\mathscr{L}_K$,存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立和 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$,则称 S 是 K 保持决策蕴涵不变的弱协调集,简称弱协调集;若 S 是 K 的弱协调集且 S 的任意真子集都不是 K 的弱协调集,则称 S 是 K 保持决策蕴涵不变的弱约简,简称弱约简。

性质2　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景,K^S 为 K 的子背景,即 $K^S=(G,S\cup D,I_S\cup I_D)$,$S\subseteq C$,$I_S=I_C\cap(G\times S)$。若 S 不是 K 的弱协调集,则任意的 $S_1\subseteq S$ 也不是 K 的弱协调集。

证明:易证。

接下来分析定义8和定义6的差异,并从知识包含程度阐述定义8的合理性。

命题3　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景,$A_1,A_2\subseteq C$,$B\subseteq D$。若 $A_1\to B\vdash A_2\to B$,则有 $A_1\subseteq A_2$。

证明:若 $A_1\to B\vdash A_2\to B$,则 $A_2\to B$ 只能由扩增推理规则从 $A_1\to B$ 推得,因此有 $A_1\subseteq A_2$。

由命题3可知,扩增推理规则的两条决策蕴涵的前提之间具有集合包含关系 $A_1\subseteq A_2$,此时 $A_2\to A_1$ 在 K_C 上成立。结合命题2可知,定义8不要求 A_1 与 A_2 之间具有集合包含关系,仅 $A_2\to A_1$ 成立即可,相当于弱化了知识推导的条件。因此,能够由扩增推理规则推导得到的决策蕴涵信息同样能由命题2所表述的推导方式得到,反之不成立(例如 $a\to e$)。

接下来通过研究协调集与弱协调集的关系,进一步分析定义8和定义6的差异。

命题4　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景。若 $S\subseteq C$ 是 K 的协调集,则 S 是 K 的弱协调集。

证明:若 $S\subseteq C$ 是 K 的协调集,则 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash\mathscr{L}_K$,因此对于 $A\to B\in\mathscr{L}_K$,有 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A\to B$。接下来根据定义8考虑两种情形。

若 $A\to B\in\mathscr{L}_{K^S}$,因为 $A\subseteq S$ 满足 $A\to A$ 在 K_C 上成立,且 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A\to B$,因此 $A\to B$ 满足定义8。

若 $A\to B\in\mathscr{L}_K-\mathscr{L}_{K^S}$,记 $A_1=A\cap S$,$A_2=A\cap(C-S)$,则有 $A=A_1\cup A_2$。若可以证明 $A_1\to B\in\mathscr{L}_{K^S}$,则由 $A_1\subseteq A\subseteq S$ 可知,$A\to A_1$ 在 K_C 上成立;又因为 $A_1\to B\vdash A_1\to B$(使用扩增推理规则),而且 $A_1\to B\in\mathscr{L}_{K^S}$,因此 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$,即 $A\to B$ 满足定义8。

下证 $A_1\to B\in\mathscr{L}_{K^S}$。对于满足 $A'\subseteq A_1\cup A_2$ 的任意 $A'\to B'\in\mathscr{L}_{K^S}$,根据合并推理规则可知 $\cup A'\to\cup B'$ 在 K^S 上成立。此时,由 $A'\subseteq S$ 和 $A_2\subseteq(C-S)$ 可知 $A'\cap A_2=\emptyset$,因此 $A'\subseteq A_1$,即有 $\cup A'\subseteq A_1$。因为 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\cup A_2\to B$,根据定义4易证 $B\subseteq\cup\{B'\mid A'\to B'\in\mathscr{L}_{K^S}$ 且 $A'\subseteq A_1\cup A_2\}=\cup B'$。由 $\cup A'\subseteq A_1$ 和 $B'\subseteq\cup B'$,应用扩增推理规则到 $\cup A'\to\cup B'$ 可知 $A_1\to B$ 在 K^S 上成立,即 $A_1\to B\in\mathscr{L}_{K^S}$。

因此,对于 $\mathscr{L}_K$ 中的任意决策蕴涵 $A\to B$,存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立和 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$,即 S 是 K 的弱协调集。

命题4表明,K 的协调集是 K 的弱协调集;因为 K 的约简也是 K 的协调集,因此 K 的约简也是 K 的弱协调集,这也说明,K 的约简的子集可能是 K 的弱约简。后面的例子(例5)表明,定义8给出的弱约简可以在一定程度上删除定义6给出的约简中不能约去的属性。为了简化弱协调集的判定,首先给出下面的判定定理。

命题5　设 $K=(G,C\cup D,I_C\cup I_D)$ 为决策背景,则 $S\subseteq C$ 是 K 的弱协调集,当且仅当对于任意的 $A\to B\in K_C^*$,存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\to B$。

证明:(必要性)由 S 是 K 的弱协调集可知,对于任意的 $A\to B\in\mathscr{L}_K$,存在 $A_1\subseteq S$ 且满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立和 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$。特别地,由 $K_C^*\subseteq\mathscr{L}_K$ 可知,对于任意的 $A\to B\in K_C^*$,存在 $A_1\subseteq S$ 且满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立和 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$。再由 $K_S^*\vdash\mathscr{L}_{K^S}$ 可知,$K_S^*\vdash A_1\to B$。

(充分性)为了证明 S 是 K 的弱协调集,需要证明对于任意的 $A\to B\in\mathscr{L}_K$,满足条件(1):存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立,且有 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$。由条件可知,对于任意的 $A\to B\in K_C^*$,存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\to B$;又因为 $K_S^*\subseteq\mathscr{L}_{K^S}$,所以 $\mathscr{L}_{K^S}\vdash A_1\to B$,即 $A\to B\in K_C^*$ 满足条件(1),故只需证明任意的 $A\to B\in\mathscr{L}_K\backslash K_C^*$,满足条件(1)。因为 $K_C^*\vdash\mathscr{L}_K\backslash K_C^*$,因此只需证明可以由 K_C^* 导出的任意决策蕴涵 $A\to B$ 均满足条件(1)。又因为决策蕴涵 $A\to B$ 可以由 K_C^* 导出当且仅当 $A\to B$ 可以由 K_C^* 中的决策蕴涵使用有限次的扩增/合并推理规则推导得到,因此只需证明,由 K_C^* 使用有限次的扩增/合并推理规则推导得到的任意蕴涵都满足条件(1)。

若某决策蕴涵可以由 $A'\to B'\in K_C^*$ 经扩增推理规则推导得到,不妨设该决策蕴涵为 $(A'\cup A_2)\to B_2$,满足 $A_2\subseteq C$ 和 $B_2\subseteq B'$。因为 $A'\to B'\in K_C^*$,因此满足条件(1),即存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A'\to A_1$ 在 K^C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\to B'$。因为 $A'\to A_1$ 在 K_C 上成立,因此 $A'^C\subseteq A_1^C$,所以 $(A'\cup A_2)^C=A'^C\cap A_2^C\subseteq A_1^C$,即 $A'\cup A_2\to A_1$ 在 K_C 上成立。另外,显然可以应用扩增推理规则由 $A_1\to B'$ 推导得 $A_1\to B_2$,因此有 $A_1\to B'\vdash A_1\to B_2$,又因为 $K_S^*\vdash A_1\to B'$,所以 $K_S^*\vdash A_1\to B_2$。因此,对于由 K_C^* 经扩增推理规则推导得到的任意决策蕴涵 $(A'\cup A_2)\to B_2$,存在 $A_1\subseteq S$,满足 $A'\cup A_2\to A_1$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\to B_2$,即当决策蕴涵由 K_C^* 中的决策蕴涵使用扩增推理规则推导得到时,其必然满足条件(1)。

若某决策蕴涵 $A'\cup A''\to B'\cup B''$ 可以由 $A'\to B'$,$A''\to B''\in K_C^*$ 经合并推理规则推导得到,因为 $A'\to B'$,$A''\to B''\in K_C^*$,因此满足条件(1),即存在 $A_1\subseteq S$ 满足 $A'\to A_1$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\to B'$,存在 $A_2\subseteq S$ 满足 $A''\to A_2$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_2\to B''$。因为 $A'\to A_1$ 和 $A''\to A_2$ 是 K_C 上成立的蕴涵,因此 $A'^C\subseteq A_1^C$,$A''^C\subseteq A_2^C$,所以 $A'^C\cap A''^C\subseteq A_1^C\cap A_2^C$,即 $(A'\cup A'')^C\subseteq(A_1\cup A_2)^C$,故 $A'\cup A''\to A_1\cup A_2$ 在 K_C 上成立。另外,因为 $\{A_1\to B',A_2\to B''\}\vdash A_1\cup A_2\to B'\cup B''$,而 $K_S^*\vdash A_1\to B'$ 且 $K_S^*\vdash A_2\to B''$,故有 $K_S^*\vdash A_1\cup A_2\to B'\cup B''$。因此,对于由 K_C^* 经合并推理规则推导得到的任意决策蕴涵 $A'\cup A''\to B'\cup B''$,存在 $A_1\cup A_2\subseteq S$,满足 $A'\cup A''\to A_1\cup A_2$ 在 K_C 上成立,且有 $K_S^*\vdash A_1\cup A_2\to B'\cup B''$,即

当决策蕴涵由 K_C^* 中的决策蕴涵使用合并推理规则推导得到时，其必然满足条件(1)。

使用归纳法容易证明，当决策蕴涵由 K_C^* 使用有限次的扩增/合并推理规则推导得到时，必然也满足条件(1)。

命题 5 给出了一种通过求解决策蕴涵规范基，从而找到决策背景中一个弱约简的方法。

步骤 1　计算 K 的决策蕴涵规范基 K_C^*，记 $E=\bigcup\{A\mid A\to B\in K_C^*\}$。

步骤 2　对所有的 $a\in E$，记 $S_a=E-\{a\}$。将由所有 S_a 构成的集合记为 Ω。

步骤 3　对任意 $S\in\Omega$，验证 S 是否为 K 的弱协调集，即计算 S 的决策蕴涵规范基 K_S^*，若对于任意的 $A\to B\in K_C^*$，存在 $A_1\subseteq S$，满足 $A\to A_1$ 在 K_C 上成立和 $K_S^*\vdash A_1\to B$，则 S 是 K 的弱协调集；否则 S 不是 K 的弱协调集。

步骤 4　若存在 $S\in\Omega$ 是 K 的弱协调集，则转至步骤 5，否则返回 E。

步骤 5　令 $E=S$，转步骤 2。

上述过程首先计算得出 K 的决策蕴涵规范基 K_C^* 及其决策前提前件并集 E(步骤 1)；然后根据性质 2 计算 E 的包含 $(n-1)$ 个属性的真子集，并将它们存入 Ω(步骤 2)；对于 Ω 中的一个属性集 S，根据命题 5 验证 S 是否为 K 的弱协调集(步骤 3)。若存在 $S\in\Omega$ 是 K 的弱协调集(步骤 4)，则令 $E=S$，并继续验证弱协调集 S 是否为 K 的弱约简(步骤 5)。若任意 $S\in\Omega$ 都不是 K 的弱协调集(步骤 4)，则说明当前 E 的所有真子集都不是 K 的弱协调集，即弱协调集 E 是 K 的一个弱约简，将 E 返回并结束。

例 5　对于表 1 所列的决策背景，令 $S_1=\{c,d,e\}$，表 6 列出了决策背景 K^{S_1}，表 7 列出了 K^{S_1} 的决策蕴涵规范基 $K_{S_1}^*$。

表 6　决策背景 $K^{S_1}=(G,S_1\cup D,I_{S_1}\cup I_D)$

Table 6　Decision context $K^{S_1}=(G,S_1\cup D,I_{S_1}\cup I_D)$

G	c	d	e	f	g	h
o_1	0	1	0	1	0	1
o_2	1	0	1	0	1	1
o_3	0	0	1	0	1	0
o_4	1	1	0	1	0	1
o_5	0	0	1	0	1	0

表 7　K^{S_1} 的决策蕴涵规范基 $K_{S_1}^*$

Table 7　Decision implication canonical basis $K_{S_1}^*$ of K^{S_1}

决策蕴涵规范基		
$c\to h$	$d\to fh$	$e\to g$

通过观察可以发现，$K_{S_1}^*$ 是 $K_C^*=\{a\to g,e\to g,c\to h,d\to fh\}$ 的一个子集。对于 $a\to g\in(K_C^*-K_{S_1}^*)$，由于 $e\to g\in K_{S_1}^*$ 且 $a\to e$ 在 K_C 上成立，因此 S_1 是 K 的弱协调集。进一步可以验证，S_1 的任意真子集均不是弱协调集，因此 S_1 是 K 的弱约简。容易验证，例 3 中 K 的约简 $\{a,c,d,e\}$ 是 K 的弱协调集，而 K 的弱约简 S_1 并非 K 的协调集。换言之，弱约简可以删除约简中不能约去的属性 a。

结束语　相比于概念规则与粒规则[23]，决策蕴涵能够对决策背景中的知识信息进行更全面的表达[24]。为了缩小数据在属性约简前后所表达知识信息的差异，本文从保持知识不变的角度，定义了保持决策蕴涵不变的协调集和约简。随后的分析表明，该约简中存在几乎所有属性都无法约去的问题。为此，引入蕴涵概念，并给出了相应问题的解决方法，定义了保持决策蕴涵不变的弱协调集和弱约简，并分析了弱约简相比于约简的合理性。最后，给出了弱协调集与弱约简的判定定理，并提出了基于决策蕴涵规范基的弱约简方法。

显然，本文提出的弱约简方法需要多次求解弱协调集真子集的决策蕴涵规范基，计算复杂度依然很高，所以接下来计划寻找更高效的弱约简方法。

参 考 文 献

[1] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations[M]. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] YAN M Y, LI J H. Knowledge Discovery and Updating under the Evolution of Network Formal Contexts based on Three-Way Decision[J]. Information Sciences, 2022, 601: 18-38.

[3] YAO Y Y, QI J J, WEI L. Formal Concept Analysis, Rough Set Analysis and Granular Computing based on Three-Way Decisions[J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition), 2018, 48(4): 477-487.

[4] ZHAI Y H, QI J J, LI D Y, et al. The Structure Theorem of Three-Way Concept Lattice[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 146: 157-173.

[5] CHEN X, QI J J, ZHU X M, et al. Unlabelled Text Mining Methods based on Two Extension Models of Concept Lattices[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11: 475-490.

[6] MOTOGNA S, CRISTEA D, ŞOTROPA D, et al. Formal Concept Analysis Model for Static Code Analysis[J]. Carpathian Journal of Mathematics, 2022, 38(1): 159-168.

[7] ZHI H L, LI J H, LI Y N. Multilevel Conflict Analysis based on Fuzzy Formal Contexts[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(12): 5128-5142.

[8] LI J H, WEI L, ZHANG Z, et al. Concept Lattice Theory and Method and Their Research Prospect[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2020, 33(7): 619-642.

[9] SHI L L, YANG H L. Object Granular Reduction of Fuzzy Formal Contexts[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 34(1): 633-644.

[10] SHAO M W, LI K W. Attribute Reduction in Generalized One-Sided Formal Contexts[J]. Information Sciences, 2017, 378: 317-327.

[11] WANG Z, WEI L, QI J J, et al. Attribute Reduction of SE-ISI Concept Lattices for Incomplete Contexts[J]. Soft Computing, 2020, 24(20): 15143-15158.

[12] REN R S, WEI L. The Attribute Reductions of Three-Way Concept Lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.

[13] LI Z L, MI J S, ZHANG T. An Updated Method of Granular Reduct based on Cognitive Operators in Formal Contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2023, 154: 72-83.

[14] YUE X W, PENG S, QIN K Y. Attribute Reduction Methods of

Formal Context based on Object (Attribute) Oriented Concept Lattice[J]. Computer Science, 2020, 47(S1): 436-439.
[15] ZHAI Y H, LI D Y. Knowledge Structure Preserving Fuzzy Attribute Reduction in Fuzzy Formal Context[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 115: 209-220.
[16] LI T J, XU Y C, WU W Z, et al. Attribute Reduction of Formal Contexts based on Decision Rules[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2017, 30(9): 769-778.
[17] ZHANG X H, MI J S, LI M Z. Attribute Reduction and Rule Fusion in Granular Consistent Formal Decision Contexts[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2019, 14(6): 1138-1143.
[18] WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of Concept Reduction based on Concept Discernibility Matrix[J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.
[19] WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept Reduction and Characteristics in Formal Concept Analysis[J]. Scientia Sinica (Informationis), 2020, 50(12): 1817-1833.
[20] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Decision Implications: ALogical Point of View[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2014, 5(4): 509-516.
[21] WANG Q, LI D Y, ZHAI Y H, et al. Parameterized Fuzzy Decision Implication[J]. Journal of Computer Research and Development, 2022, 59(9): 2066-2074.
[22] ZHAI Y H, JIA N, ZHANG S X, et al. Study on Deduction Process and Inference Methods of Decision Implications[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2022, 13(7): 1959-1979.
[23] WU W Z, YEE L, MI J S. Granular Computing and Knowledge Reduction in Formal Contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2008, 21(10): 1461-1474.
[24] ZHANG S X, LI D Y, ZHAI Y H, et al. A Comparative Study of Decision Implication, Concept Rule and Granular Rule[J]. Information Sciences, 2020, 508(C): 33-49.
[25] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Decision Implication Canonical Basis: ALogical Perspective[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2015, 81: 208-218.
[26] ZHAI Y H, CHEN R J, LI D Y. An Update Method of Decision Implication Canonical Basis on Attribute Granulating[J]. Intelligent Automation & Soft Computing, 2023, 37(2): 1833-1851.

BI Sheng, born in 1999, postgraduate. His main research interests include data mining and intelligent decision.

ZHAI Yanhui, born in 1981, associate professor, doctoral supervisor, is a regular member of CCF (No. 22629M). His main research interests include concept lattice and knowledge reasoning.

(责任编辑:柯颖)