

超立方体在对称PMC模型下的 g -好邻条件诊断度和 g -额外条件诊断度

涂远杰, 程宝雷, 王岩, 韩月娟, 樊建席

引用本文

涂远杰, 程宝雷, 王岩, 韩月娟, 樊建席. [超立方体在对称PMC模型下的 \$g\$ -好邻条件诊断度和 \$g\$ -额外条件诊断度](#)[J]. 计算机科学, 2024, 51(9): 103-111.

TU Yuanjie, CHENG Baolei, WANG Yan, HAN Yuejuan, FAN Jianxi. [g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability and g-Extra Conditional Diagnosability of Hypercubes Under Symmetric PMC Mode](#)[J]. Computer Science, 2024, 51(9): 103-111.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[增广立方体上边独立生成树的并行构造](#)

Parallel Construction of Edge-independent Spanning Trees in Augmented Cubes
计算机科学, 2024, 51(9): 346-356. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.230700041>

[分层立方体网络在NoC线性阵列中的最优嵌入](#)

Optimal Embedding of Hierarchical Cubic Networks into Linear Arrays of NoC
计算机科学, 2023, 50(4): 249-256. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220100019>

[蜻蜓网络上完全独立生成树的构造算法](#)

Construction Algorithm of Completely Independent Spanning Tree in Dragonfly Network
计算机科学, 2022, 49(11): 284-292. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.211000037>

[一种基于UIA接口的RPA系统设计方法](#)

Design and Implementation of RPA System Based on UIA Interface
计算机科学, 2022, 49(8): 225-229. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.211100046>

[数据中心网络BCDC上的顶点独立生成树构造算法](#)

Algorithm to Construct Node-independent Spanning Trees in Data Center Network BCDC
计算机科学, 2022, 49(7): 287-296. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210500170>

超立方体在对称 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度和 g -额外条件诊断度

涂远杰¹ 程宝雷¹ 王岩¹ 韩月娟² 樊建席¹

1 苏州大学计算机科学与技术学院 江苏 苏州 215006

2 苏州大学信息化建设与管理中心 江苏 苏州 215006

(20214227047@stu.suda.edu.cn)

摘要 故障诊断在维持多处理器系统的可靠性中起到了至关重要的作用,而诊断度是系统诊断能力的一个重要度量参数。除经典诊断度外还有条件诊断度,如 g -好邻条件诊断度、 g -额外条件诊断度等。其中 g -好邻条件诊断度是在每个无故障顶点至少有 g 个无故障邻点的条件下定义的一种条件诊断度, g -额外条件诊断度是在每个无故障分支包含超过 g 个顶点的条件下定义的一种条件诊断度。故障诊断需要在特定的诊断模型下进行,如 PMC 模型、对称 PMC 模型等。对称 PMC 模型是在 PMC 模型的基础上通过添加两个假设而提出的一种新的诊断模型。 n 维超立方体因具有多种优越性质而被研究者们广泛研究。目前有不少在 PMC 模型下的诊断度研究,但缺乏在对称 PMC 模型下的诊断度研究。文中首先证明了超立方体在对称 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度的上界和下界,当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n-4$ 时上界为 $2^{g+1}(n-g-1)+2^g-1$,当 $g \geq 0$ 且 $n \geq \max\{g+4, 2^{g+1}-2^{-g}-g-1\}$ 时下界为 $(2n-2^{g+1}+1)2^{g-1}+(n-g)2^{g-1}-1$ 。还证明了超立方体在对称 PMC 模型下的 g -额外条件诊断度的上界和下界,当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n-4$ 时上界为 $2n(g+1)-5g-2C_g^2-2$,当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq \min\{n-4, \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor\}$ 时下界为 $\frac{3}{2}n(g+1)-g-\frac{5}{2}C_{g+1}^2-1$ 。最后通过模拟实验验证了相关理论结果的正确性。

关键词: 互连网络;超立方体;系统级诊断;对称 PMC 模型;条件诊断度

中图分类号 TP393

g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability and g -Extra Conditional Diagnosability of Hypercubes Under Symmetric PMC Model

TU Yuanjie¹, CHENG Baolei¹, WANG Yan¹, HAN Yuejuan² and FAN Jianxi¹

1 School of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China

2 Center of Information Development and Management, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China

Abstract Fault diagnosis plays a very important role in maintaining the reliability of multiprocessor systems, and the diagnosability is an important measure of the diagnosis capability of the system. Except for the traditional diagnosability, there are also conditional diagnosability, such as g -good-neighbor conditional diagnosability, g -extra conditional diagnosability, etc. Where g -good-neighbor conditional diagnosability is defined under the condition that every fault-free vertex has at least g fault-free neighbors, and g -extra conditional diagnosability is defined under the condition that every fault-free component contains more than g vertices. Fault diagnosis needs to be performed under a specific diagnosis model, such as PMC model, symmetric PMC model, in which the symmetric PMC model is a new diagnosis model proposed by adding two assumptions to the PMC model. The n -dimensional hypercube has many excellent properties, so it has been widely studied by researchers. At present, there are a number of diagnosability studies under the PMC models, but there is a lack of diagnosability studies under the symmetric PMC models. This paper first investigates the upper and lower bounds for the g -good-neighbor conditional diagnosability of hypercubes under the symmetric PMC model, with an upper bound of $2^{g+1}(n-g-1)+2^g-1$ when $n \geq 4$ and $0 \leq g \leq n-4$ and a lower bound of $(2n-2^{g+1}+1)2^{g-1}+(n-g)2^{g-1}-1$ when $g \geq 0$ and $n \geq \max\{g+4, 2^{g+1}-2^{-g}-g-1\}$. Also study the upper and lower bounds for the g -extra conditional diagnosability of hypercubes under the symmetric PMC model, the upper bound is $2n(g+1)-5g-2C_g^2-2$ when $n \geq 4$ and $0 \leq g \leq n-4$, and the lower bound is $\frac{3}{2}n(g+1)-g-\frac{5}{2}C_{g+1}^2-1$ when $n \geq 4$ and $0 \leq g \leq \min\{n-4, \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor\}$. Finally, the correctness of the relevant theoretical conclusions is verified by simulation experiments.

到稿日期:2023-07-01 返修日期:2023-11-20

基金项目:国家自然科学基金(62172291,62272333)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62172291,62272333).

通信作者:樊建席(jxfan@suda.edu.cn)

Keywords Interconnection network, Hypercube, System level diagnosis, Symmetric PMC model, Conditional diagnosability

1 引言

随着网络信息技术的飞速发展,对大型高性能多处理器系统的需求也日益增加。多处理器系统通常将互连网络作为底层拓扑,它可以表示为一个无向图,其中顶点表示处理器,边表示通信链路。例如超立方体互连网络,它具有低直径、高对称性等多种优越性质^[1-3],因此其被研究者们广泛研究。随着多处理器系统中处理器数量的不断增加,处理器发生故障的情形不可避免,为了维持系统的可靠性,需要检测出发生故障的处理器并及时更换。

在系统中识别故障处理器的过程称为故障诊断,其中具有自诊断能力的系统级诊断方式应用最为广泛^[6]。系统级诊断方式基于诊断模型进行诊断,常见的诊断模型有 PMC 模型^[6]、MM 模型^[7]和 BGM 模型^[8]等。其中最早被提出的 PMC 模型有着非常广泛的应用^[9-13]。

在 PMC 模型下,任意两个相邻的处理器 u 和 v 能够互相执行测试。一个有序对 (u, v) 表示处理器 u 在处理器 v 上执行一个测试,其中 u 被称为测试者, v 被称为被测试者。表 1 列出了测试者和被测试者在 PMC 模型中不同状态下的测试结果。Zhu 等^[14]在 PMC 模型的基础上通过添加两个假设提出了一个新的诊断模型,称为对称 PMC 模型,并证明了超立方体在对称 PMC 模型下的经典诊断度在 $n \geq 4$ 时为 $2n-2$ 。

表 1 PMC 模型下的测试结果

Table 1 Test outcomes under PMC model

测试者状态	被测试者状态	测试结果
无故障	无故障	0
无故障	故障	1
故障	无故障	0 或 1
故障	故障	0 或 1

Hakimi 等^[15]率先给出了系统在 PMC 模型下 t -可诊断的一个充要条件。Sullivan^[16]给出了一个多项式时间的算法,用于确定系统在 PMC 模型下的诊断度。诊断度是评估系统诊断能力的一个重要指标。

由系统的经典诊断度定义可知,假设某个处理器 u 的所有相邻处理器会同时发生故障,那么我们将无法知道 u 的故障状态,因此系统的诊断度被系统的最小度所限制。在许许多多处理器系统中,一个处理器的所有相邻处理器同时发生故障的概率极低,基于此,Lai 等^[17]通过假设任一故障集不能同时包含任一处理器的所有相邻处理器提出了条件诊断度。Peng 等^[9]基于条件诊断度提出了 g -好邻条件诊断度,该诊断度是在每个无故障处理器至少有 g 个无故障相邻处理器的条件下能达到的最大值。迄今为止,已经得到许多网络的 g -好邻条件诊断度的结果^[9,18-21]。考虑到在条件诊断度的假设条件下删除系统 G 的故障顶点集 F 以及与 F 中的顶点关联的边后每个分支包含超过 g 个顶点,Zhang 等^[22]假定在 $G-F$ 的每个分支需包含超过 g 个顶点的条件下定义了 G 的 g -额外条件诊断度。关于 g -额外条件诊断度的一些研究结果可参考文献^[22-25]。

由上述内容可知,目前有着许多在 PMC 等模型下的诊断度以及条件诊断度的研究成果,而在对称 PMC 模型下的相关研究只有超立方体的经典诊断度研究,结果为 $2n-2$,几乎是 PMC 模型下所求结果的两倍^[14]。并且相比经典诊断度, g -好邻条件诊断度以及 g -额外条件诊断度在系统诊断能力的评估中有着更好的表现,能够更贴合实际地度量系统的诊断能力,而诊断能力又是系统可靠性评估的一个重要方面。因此,开展超立方体在对称 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度以及 g -额外条件诊断度的研究对提升系统的可靠性具有重要的理论与实际意义。

本文第 2 章给出了图论中的一些基本概念以及对诊断系统的一些知识;第 3 章研究了 n 维超立方体 Q_n 在对称 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度;第 4 章研究了 Q_n 在对称 PMC 模型下的 g -额外条件诊断度;第 5 章进行了相应的模拟实验;最后总结全文。

2 预备知识

本章首先介绍了图论的一些基本概念以及在本文中用到的一些术语和符号,然后介绍了相关的故障诊断模型和 t -可诊断系统,最后介绍了 n 维超立方体。

2.1 术语和符号

本文中,对于本节中没有给出的所有定义和符号,请参考文献^[26]。多处理器系统或互连网络通常由无向图 $G=(V, E)$ 表示,其中 V 是顶点集合, E 是边集合。顶点代表处理器, G 中的每条边代表处理器之间的通信链路。若图 G 既不含平行边又不含自环,则称 G 为简单图。本文中的所有图都是简单图。设 v 是 G 中的一个顶点, v 的度是 G 中与 v 相关联的边的数量,记为 $d(v)$ 。若图 G 中每个顶点的度都为 n ,则称 G 为 n -正则图。 G 中所有与 v 相邻的顶点的集合称为 v 的邻集,用 $N_G(v)$ 或 $N(v)$ 表示。设 A 是 G 的一个顶点子集,我们用 $N(A)$ 表示 A 的邻集,即 $N(A)=\{y \mid \exists x \in A, \text{使得 } y \in N(x)-A\}$ 。

如果图 G 中任意两个顶点之间都有一条路相连,则称 G 为连通图,否则称 G 为不连通图。对于 $V(G)$ 的一个子集 S ,如果 $G-S$ 是不连通的,则称 S 是 G 的一个点割。对于图 H ,如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的一个子图,记为 $H \subseteq G$ 。给定 $V(G)$ 的一个非空子集 V' ,由 V' 确定的导出子图记为 $G[V']$,它的顶点集是 V' ,边集是 G 中所有端点都在 V' 中的边的集合。图 G 的一个最大连通子图被称为它的连通分支,显然, G 的每个分支都是一个连通图。对于图 G 的一个子图 C ,命题 $P_g(C)$ 成立当且仅当 C 中的每个顶点在 C 中至少有 g 个邻点。

图 G 的连通度指,使 G 变得不连通或变成平凡图所需去掉的最少的顶点数量,记为 $\kappa(G)$ 。也就是说,在连通度为 k 的多处理器系统中,当至多 $k-1$ 个处理器发生故障时,剩余的无故障处理器之间仍能保持通信。连通度是衡量系统可靠性的另一个重要方面^[27]。

2.2 PMC 模型和 t -可诊断系统

在经典的 PMC 模型中,系统的测试图是一个有向图。由于存在一些故障处理器,因此并非所有测试结果都是可靠的。对于一个测试 (u, v) ,如果测试者是无故障的,则称测试结果是可靠的,否则称测试结果是不可靠的。假设测试者是无故障的,如果被测试者无故障(故障),则测试结果将为 $0(1)$;如果测试者有故障,则测试结果随机为 0 或 1 。

所有测试结果的集合称为系统 G 的一个症候群(Syndrome)。系统中所有故障处理器的集合称为故障集,它可以是 $V(G)$ 的任一子集。对于一个症候群 σ 和一个故障集 F ,如果 σ 可以在 F 中的所有顶点都有故障而 $V(G) - F$ 中的所有顶点都无故障的情况下产生,则称 F 与 σ 一致,记为 $F \sim \sigma$ 。由于故障测试者的测试结果是不可靠的,因此给定的故障集 F 会产生许多症候群,用 $\sigma(F)$ 表示由 F 产生的所有症候群的集合。

给定 $V(G)$ 的两个不同的子集 F_1 和 F_2 ,如果 $\sigma(F_1) \cap \sigma(F_2) = \emptyset$,则称 F_1 和 F_2 可区分,否则称 F_1 和 F_2 不可区分。如果系统中任意两个不同的子集 F_1 和 F_2 都是可区分的并且 $|F_1| \leq t, |F_2| \leq t$,则称该系统 t -可诊断^[28]。系统 G 的诊断度是使得系统 t -可诊断的 t 的最大值,记为 $t(G)$ 。

定理 1 给出了一个在 PMC 模型下两个不同故障集可区分的充要条件。

定理 1^[28] 在 PMC 模型下,对于测试图 $G = (V, E)$ 中 $V(G)$ 的任意两个不同的故障子集 F_1 和 F_2 , F_1 和 F_2 是可区分的当且仅当至少存在一条从 $V(G) - (F_1 \cup F_2)$ 到 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_1)$ 的边,如图 1 所示。

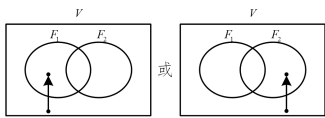


图 1 F_1 和 F_2 在 PMC 模型下可区分的图解

Fig. 1 Illustration of F_1 and F_2 are distinguishable under PMC model

对于一个故障集 F ,如果对任意的 $v \in V(G) - F$ 都有 $|N(v) \cap (V(G) - F)| \geq g$ 成立,则称 F 是 g -好邻条件故障集^[9]。如果 $G - F$ 的每个分支的顶点数都大于 g ,则称 F 是 g -额外条件故障集^[22]。如果 $V(G)$ 中任意两个不同的 g -好邻条件故障子集(g -额外条件故障子集) F_1 和 F_2 可区分且 $|F_1|$ 和 $|F_2|$ 都不超过 t ,则称系统 G 是 g -好邻条件 t -可诊断的(g -额外条件 t -可诊断的)^[9,22]。系统 G 的 g -好邻条件诊断度(g -额外条件诊断度)是使得系统 g -好邻条件 t -可诊断(g -额外条件 t -可诊断)的 t 的最大值,记为 $t_g(G)$ ($\tilde{t}_g(G)$)^[9,22]。

2.3 对称 PMC 模型和 t -可诊断系统

Zhu 等^[14]提出了一种新的诊断模型,称为对称 PMC (SPMC)模型,该模型是在 PMC 模型的基础上增加了两个假设而提出的。第一个假设是,任意两个相邻的顶点都会互相测试对方的状态。第二个假设是,在两个故障集 F_1 和 F_2 与同一个症候群一致且 $F_1 \subset F_2$ 的情况下不需要确定 $F_2 - F_1$ 中顶点的状态,因为在一步诊断中不可能知道该情况下 $F_2 - F_1$ 中顶点的状态^[14]。

下面是基于第二个假设给出的可行对的定义。

定义 1^[14] 在系统 G 中, $V(G)$ 中的一对故障子集 (F_1, F_2) 在 SPMC 模型下称为可行对当且仅当 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$ 。

下面是系统 G 在 SPMC 模型下 t -可诊断的定义。

定义 2^[14] 在系统 G 中,如果 $V(G)$ 中任意一对基数不超过 t 且可行的故障子集都可区分,则称 G 在 SPMC 模型下 t -可诊断。在 SPMC 模型下, G 的诊断度是使得 G 在 SPMC 模型下 t -可诊断的 t 的最大值,记为 $t^s(G)$ 。

引理 1 给出了一对可行故障子集在 SPMC 模型下可区分的充要条件。

引理 1^[14] 在系统 G 中,对于 $V(G)$ 中任意一对可行的故障子集 (F_1, F_2) , F_1 和 F_2 在 SPMC 模型下可区分,当且仅当在 $V(G) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间存在边。

接下来给出了系统 G 在 SPMC 模型下 g -好邻条件 t -可诊断和 g -额外条件 t -可诊断的定义。

定义 3 在系统 G 中,如果 $V(G)$ 中任意一对具有 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$ 的可行的 g -好邻条件故障子集 (F_1, F_2) 都可区分,则称 G 在 SPMC 模型下是 g -好邻条件 t -可诊断的。 G 在 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度是使得 G 在 SPMC 模型下 g -好邻条件 t -可诊断的 t 的最大值,记为 $t_g^s(G)$ 。

定义 4 在系统 G 中,如果 $V(G)$ 中任意一对具有 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$ 的可行的 g -额外条件故障子集 (F_1, F_2) 都可区分,则称 G 在 SPMC 模型下是 g -额外条件 t -可诊断的。 G 在 SPMC 模型下的 g -额外条件诊断度是使得 G 在 SPMC 模型下 g -额外条件 t -可诊断的 t 的最大值,记为 $\tilde{t}_g^s(G)$ 。

引理 2 给出了任意系统 G 分别在 PMC 模型和 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度之间的关系。

引理 2 对于任意的系统 G , 设 $t_g^p(G)$ 和 $t_g^s(G)$ 分别是 G 在 PMC 模型和 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度, 则 $t_g^s(G) \geq t_g^p(G)$ 。

证明: 因为 $t_g^p(G)$ 是 G 在 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度, 所以 $V(G)$ 中任意两个不同且基数不超过 $t_g^p(G)$ 的 g -好邻条件故障子集 F_1 和 F_2 都可区分。因此, 在 $V(G) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间存在一条边。那么所有满足 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$ 的子集对在 SPMC 模型下也是可区分的, 因此 $t_g^s(G) \geq t_g^p(G)$ 。证毕。

同理, 很容易得到引理 3。

引理 3 对于任意的系统 G , 设 $\tilde{t}_g^p(G)$ 和 $\tilde{t}_g^s(G)$ 分别是 G 在 PMC 模型和 SPMC 模型下的 g -额外条件诊断度, 则 $\tilde{t}_g^s(G) \geq \tilde{t}_g^p(G)$ 。

2.4 n 维超立方体

n 维超立方体 Q_n 可以表示为一个由 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边组成的无向图。 Q_n 的顶点集是 $V(Q_n) = \{u = u_{n-1}u_{n-2}\dots u_0 \mid u_i \in \{0, 1\}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ 。 $V(Q_n)$ 中的两个顶点 u 和 v 相邻当且仅当它们恰好有一位不同。我们用 u^i 表示 u 的第 i 个邻点, 其中 $0 \leq i \leq n-1$, 显然 u 和 u^i 只在第 i 位不同。由此可知, Q_n 中的每个顶点都与 n 条边相关联, 因此 Q_n 是一个 n -正则图。根据文献^[29]可知, Q_n 既是点传递的, 也是边传递的。

对于任意的整数 $k, 0 \leq k \leq n-1$ 和 $i \in \{0, 1\}$, 我们设 Q_n^{ki} 是由顶点集合 $\{u \in V(Q_n) \mid u_k = i\}$ 导出的 Q_n 的子图。显然, Q_n^{k0} 和 Q_n^{k1} 都与 $n-1$ 维超立方体 Q_{n-1} 同构, 并且 $V(Q_n^{k0})$ 与 $V(Q_n^{k1})$ 之间存在一组完美匹配。

Q_3 和 Q_4 如图 2 所示。

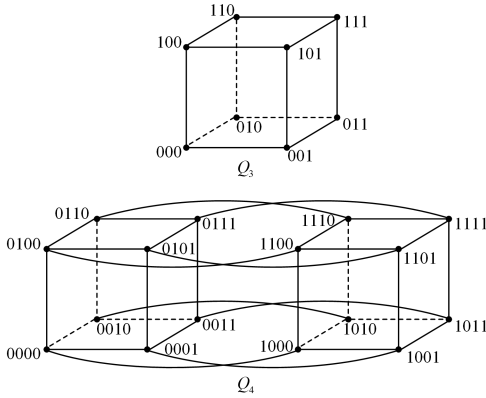


图 2 Q_3 和 Q_4 的图示

Fig. 2 Illustration of Q_3 and Q_4

引理 4—引理 7 给出了 Q_n 的一些性质。

引理 4^[30] 设 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n$, 对于 Q_n 的任一子图 H , 如果 $P_g(H)$ 成立, 则 $|V(H)| \geq 2^g$ 。

引理 5^[31] 设 $n \geq 3$ 且 $0 \leq g \leq n-2$, 假设 F 是 Q_n 中的一个最小点割, 并且对于所有的 $x \in V(Q_n) - F$ 都有 $|N(x) - F| \geq g$, 那么 $|F| = (n-g)2^g$ 。

引理 6^[5] 当 $n \geq 4$ 时, 设 H 是 Q_n 的一个子图且 $|V(H)| = k+1$, 那么 $|N_{Q_n}(V(H))| \geq (k+1)n - 2k - C_k^2$ 。

引理 7^[5] 当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n-4$ 时, $\kappa_g(Q_n) = n(g+1) - 2g - C_g^2$ 。

3 Q_n 在 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度

本章确定了超立方体在 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度的上界和下界。

定理 2 当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n-4$ 时, $t_g^i(Q_n) \leq 2^{g+1}(n-g-1) + 2^g - 1$ 。

证明: 设 g 是一个正整数且 $g \leq n-4$ 。在 SPMC 模型下, 我们要证明 Q_n 的 g -好邻条件诊断度不超过 $2^{g+1}(n-g-1) + 2^g - 1$, 相当于证明 Q_n 在 SPMC 模型下不是 g -好邻条件 $(2^{g+1}(n-g-1) + 2^g)$ -可诊断的。根据定义 3, 我们将证明在 Q_n 中存在一对可行的 g -好邻条件故障顶点子集 (F_1, F_2) , 且 $|F_1|$ 和 $|F_2|$ 都小于等于 $2^{g+1}(n-g-1) + 2^g$, 但 F_1 和 F_2 不可区分。

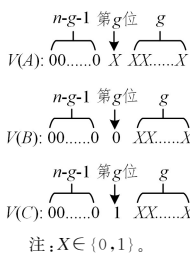


图 3 $V(A), V(B)$ 和 $V(C)$ 的图解

Fig. 3 Illustration of $V(A), V(B)$ and $V(C)$

设 A, B, C 是 Q_n 的 3 个子图, 其中 $V(A) = \{x = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0 \mid x_i = 0 \text{ 且 } i \in \{g+1, g+2, \dots, n-1\}, x_j \in \{0, 1\} \text{ 且 } j \in \{0, 1, \dots, g\}\}$, $V(B) = \{y = y_{n-1}y_{n-2}\dots y_0 \mid y_i = 0 \text{ 且 } i \in \{g, g+1, \dots, n-1\}, y_j \in \{0, 1\} \text{ 且 } j \in \{0, 1, \dots, g-1\}\}$, $V(C) = \{z = z_{n-1}z_{n-2}\dots z_0 \mid z_i = 0 \text{ 且 } i \in \{g+1, g+2, \dots, n-1\}, z_g = 1, z_j \in \{0, 1\} \text{ 且 } j \in \{0, 1, \dots, g-1\}\}$ 。关于 $V(A), V(B)$ 和 $V(C)$ 的解释如图 3 所示。显然, $V(A) = V(B) \cup V(C)$ 且 $V(B) \cap V(C) = \emptyset$ 。设 $V_k = \{x^k \mid x \in V(A)\}$ 且 $g+1 \leq k \leq n-1$, 则有 $N(V(A)) = \bigcup_{k=g+1}^{n-1} V_k$ 。因此设 $F_1 = V(B) \cup N(V(A))$ 且 $F_2 = V(C) \cup N(V(A))$ 。因为 $|V(B)| = |V(C)| = 2^g$ 且对于每个 $g+1 \leq k \leq n-1$, 都有 $|V_k| = 2^{g+1}$, 所以有 $|N(V(A))| = 2^{g+1}(n-g-1)$ 和 $|F_1| = |F_2| = 2^g + 2^{g+1}(n-g-1)$ 。

由 $|F_1 - F_2| = |V(B)| = 2^g \geq 1$ 以及 $|F_2 - F_1| = |V(C)| = 2^g \geq 1$, 得 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$ 。因此, (F_1, F_2) 在 SPMC 模型下是一对可行的顶点子集。由 $F_1 \cup F_2 = V(A) \cup N(V(A))$ 且 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_1) = V(B) \cup V(C) = V(A)$ 可知, 在 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。根据引理 1 可得, 在 SPMC 模型下 F_1 和 F_2 不可区分。 F_1 和 F_2 的图解如图 4 所示。

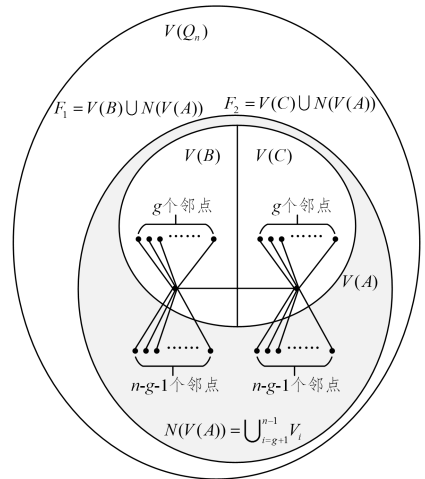


图 4 F_1 和 F_2 的图解

Fig. 4 Illustration of F_1 and F_2

下面证明 F_1 和 F_2 都是 g -好邻条件故障集。设 $X = Q_n - (F_1 \cup F_2)$, 由于在 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边, 因此只需要证明 $P_g(X), P_g(B)$ 和 $P_g(C)$ 成立。显然, 对于 $V(B)$ 中的任一顶点 u 和每个 $i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$, 都有 $u^i \in V(B)$, 因此 $P_g(B)$ 成立。同理, $P_g(C)$ 也成立。根据 $V(A)$ 的定义, 可知 $N(V(A))$ 中的顶点与 $V(A)$ 中的顶点在第 $g+1$ 位到第 $n-1$ 位中有且仅有一位不同。因此, 对于 $V(X) = V(Q_n) - (V(A) \cup N(V(A)))$ 中的任一顶点 x , 以及每个 $i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$, 都有 $x^i \in V(X)$, 因此 $P_g(X)$ 也成立。故 F_1 和 F_2 都是 Q_n 中的 g -好邻条件故障顶点子集。

又因为 (F_1, F_2) 在 SPMC 模型下是一个可行且 $|F_1| = |F_2| = 2^{g+1}(n-g-1) + 2^g$ 的不可区分对, 所以我们可以得出结论: $t_g^i(Q_n) \leq 2^{g+1}(n-g-1) + 2^g - 1$ 。证毕。

定理 3 当 $g \geq 0$ 且 $n \geq \max\{g+4, 2^{g+1} - 2^{-g} - g - 1\}$ 时, $t_g^i(Q_n) \geq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n-g)2^{g-1} - 1$ 。

证明:设 $g \geq 0$ 且 $n \geq \max\{g+4, 2^{g+1} - 2^{g-1} - g - 1\}$, 证明 Q_n 在 SPMC 模型下 g -好邻条件 $((2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1)$ -可诊断, 等价于证明, 对于 Q_n 中任意一对可行的 g -好邻条件故障子集 (F_1, F_2) , 只要 $|F_1|$ 和 $|F_2|$ 均不超过 $(2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1$, 则 F_1 和 F_2 可区分。

假设在 Q_n 中存在一对可行的 g -好邻条件故障子集 (F_1, F_2) , $|F_1| \leq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1$ 且 $|F_2| \leq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1$, 但 F_1 和 F_2 不可区分。不失一般性, 假设 $|F_1| \geq |F_2|$ 。

因为 $|V(Q_n)| = 2^n > |F_1| + |F_2| \geq |F_1 \cup F_2|$, 所以 $|V(Q_n)| - |F_1 \cup F_2| \geq 1$ 。又因为 F_1 和 F_2 不可区分, 根据引理 1, 可知在 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。又由于 (F_1, F_2) 是可行对, $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$, 因此 $F_1 \cap F_2$ 是 Q_n 的一个点割且 $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cap F_2$ 。又因为 F_1 和 F_2 都是 g -好邻条件故障集, 所以 $F_1 \cap F_2$ 也是 g -好邻条件故障集, 从而 $F_1 \cap F_2$ 是 Q_n 的一个 g -好邻条件割。根据引理 5, 可得 $|F_1 \cap F_2| \geq (n - g)2^g$ 。根据引理 4, 可得 $|F_1 - F_2| \geq 2^g$ 且 $|F_2 - F_1| \geq 2^g$, 因此 $|F_1 \Delta F_2| \geq 2^{g+1}$ 。

设 A 是 $F_1 \Delta F_2$ 的一个分支且 $|A| = 2^{g+1}$, 并设 B 是 $F_1 \cap F_2$ 的一个子集且 $|B| = (n - g)2^g$ 。由引理 6 可得 $|N(A)| \geq n2^{g+1} - 2(2^{g+1} - 1) - C_{2^{g+1}-1}^2 = (2n - 2^{g+1} - 1)2^g + 1$, 从而 $|A \cup N(A)| = |A| + |N(A)| \geq 2^{g+1} + (2n - 2^{g+1} - 1)2^g + 1 = (2n - 2^{g+1} + 1)2^g + 1$ 。因为 $A \cup N(A) \subseteq F_1 \cup F_2$ 且 $B \subseteq F_1 \cap F_2$, 所以 $|(F_1 \cup F_2) - B| = |F_1 \cup F_2| - |B| \geq |A \cup N(A)| - |B| \geq (2n - 2^{g+1} + 1)2^g - (n - g)2^g + 1$ 。因此, 有:

$$\begin{aligned} |F_1| &\geq \frac{|F_1 \cup F_2| + |F_1 \cap F_2|}{2} \\ &\geq \frac{|F_1 \cup F_2| + |B|}{2} \\ &= \frac{|F_1 \cup F_2| - |B|}{2} + |B| \\ &\geq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

这与 $|F_1| \leq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1$ 矛盾, 故 $t_g^b(Q_n) \geq (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1$ 。证毕。

由引理 2 可知, $t_g^b(Q_n)$ 不会小于 $t_g^b(Q_n)$, 文献[9]证明了当 $0 \leq g \leq n-3$ 时 $t_g^b(Q_n) = 2^g(n - g) + 2^g - 1$, 结合定理 3, 我们得到定理 4。

定理 4 Q_n 在 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度的一个下界为:

$$t_g^b(Q_n) \geq \begin{cases} (2n - 2^{g+1} + 1)2^{g-1} + (n - g)2^{g-1} - 1, \\ \quad \text{若 } g \geq 0 \text{ 且 } n \geq \max\{g+4, 2^{g+1} - g + 1\} \\ (n - g)2^g + 2^g - 1, \\ \quad \text{若 } g \geq 2 \text{ 且 } g+4 \leq n \leq 2^{g+1} - g + 1 \end{cases}$$

定理 5 当 $n \geq 4$ 且 $n - 3 \leq g \leq n - 1$ 时, $t_g^b(Q_n) \leq 2^{n-1} - 1$ 。

证明:显然, $Q_n^{k_0}$ 和 $Q_n^{k_1}$ 都是 $(n-1)$ -正则的, 且都包含 2^{n-1} 个顶点。设 $F_1 = V(Q_n^{k_0})$ 且 $F_2 = V(Q_n^{k_1})$ 。显然 $F_1 - F_2 = F_1 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 = F_2 \neq \emptyset$, 因此 (F_1, F_2) 在 SPMC 模型下是 Q_n 中一对可行的故障顶点子集。由于 $F_1 \cup F_2 = V(Q_n^{k_0}) \cup V(Q_n^{k_1}) = V(Q_n)$, 因此在 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间

没有边。根据引理 1 得, F_1 和 F_2 在 SPMC 模型下不可区分。由于 $V(Q_n) - F_1 = V(Q_n^{k_1})$ 且 $V(Q_n) - F_2 = V(Q_n^{k_0})$, 因此 F_1 和 F_2 都是 $(n-1)$ -好邻条件故障集。那么 F_1 和 F_2 也都是 $(n-2)$ -好邻条件故障集和 $(n-3)$ -好邻条件故障集。

根据以上条件且 $|F_1| = |F_2| = 2^{n-1}$, 我们得出结论:当 $n-3 \leq g \leq n-1$ 时, Q_n 在 SPMC 模型下不是 g -好邻条件 2^{n-1} -可诊断的。证毕。

定理 6 当 $n \geq 4$ 且 $n - 3 \leq g \leq n - 1$ 时, $t_g^b(Q_n) \geq 2^{n-1} - 1$ 。

证明:文献[9]证明了 Q_n 在 PMC 模型下的 g -好邻条件诊断度为:

$$t_g^b(Q_n) = \begin{cases} 2^g(n - g) + 2^g - 1, & \text{若 } 0 \leq g \leq n - 3 \\ 2^{n-1} - 1, & \text{若 } n - 2 \leq g \leq n - 1 \end{cases}$$

代入 $g = n - 3$, 得到 $t_g^b(Q_n) = 2^{n-1} - 1$, 因此当 $n - 3 \leq g \leq n - 1$ 时 $t_g^b(Q_n) = 2^{n-1} - 1$ 。根据引理 2 可得, 当 $n - 3 \leq g \leq n - 1$ 时 $t_g^b(Q_n) \geq t_g^b(Q_n) = 2^{n-1} - 1$ 。证毕。

根据定理 5 和定理 6 我们可以得到如下结论。

定理 7 当 $n \geq 4$ 且 $n - 3 \leq g \leq n - 1$ 时, $t_g^b(Q_n) = 2^{n-1} - 1$ 。

4 Q_n 在 SPMC 模型下的 g -额外条件诊断度

本章确定了超立方体在 SPMC 模型下的 g -额外条件诊断度的上界和下界。

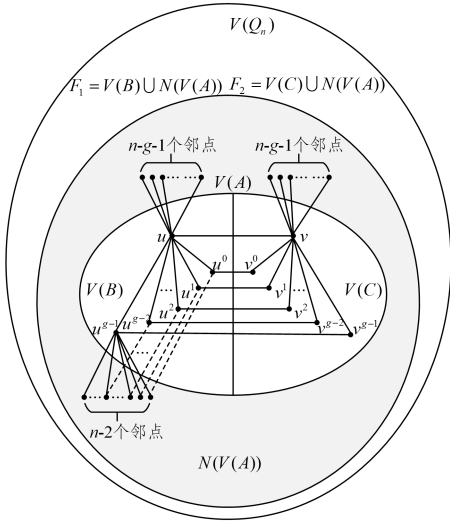
引理 8^[32] 当 $n \geq 3$ 时, 若 $V(Q_n)$ 中任意两个顶点有公共邻点, 则它们恰好有两个公共邻点。

定理 8 设 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n - 4$, 则 $\tilde{t}_g^b(Q_n) \leq 2n(g + 1) - 5g - 2C_g^2 - 2$ 。

证明:根据定义 4, 在 SPMC 模型下, 我们将证明 Q_n 不是 g -额外条件 $(2n(g + 1) - 5g - 2C_g^2 - 1)$ -可诊断的, 即在 Q_n 中存在一对可行但不可区分的 g -额外条件故障子集 (F_1, F_2) , 使得 $|F_1| \leq 2n(g + 1) - 5g - 2C_g^2 - 1$ 且 $|F_2| \leq 2n(g + 1) - 5g - 2C_g^2 - 1$ 。

设 $u = u_{n-1}u_{n-2} \cdots u_0$, 对于 $0 \leq i \leq n-1$ 有 $u_i = 0$ 。设 $v = v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_0$, 其中 $v_{n-1} = 1$ 且对于 $0 \leq k \leq n-2$ 有 $v_k = 0$ 。设 A, B, C 是 Q_n 的 3 个子图, 其中 $V(A) = \{u, u^0, u^1, \dots, u^{g-1}, v, v^0, v^1, \dots, v^{g-1}\}$, $V(B) = \{u, u^0, u^1, \dots, u^{g-1}\}$, 以及 $V(C) = \{v, v^0, v^1, \dots, v^{g-1}\}$ 。显然, 子图 B 和 C 均与 $K_{1,g}$ 同构, 并且有 $V(A) = V(B) \cup V(C)$ 且 $V(B) \cap V(C) = \emptyset$ 。因此我们可以设 $F_1 = V(B) \cup N(V(A))$ 且 $F_2 = V(C) \cup N(V(A))$ 。因为 $|V(B)| = |V(C)| = g + 1$, 根据引理 8 可得 $|N(V(A))| = 2n(g + 1) - 6g - 2C_g^2 - 2$, 从而 $|F_1| = |F_2| = 2n(g + 1) - 5g - 2C_g^2 - 1$ 。

由 $|F_1 - F_2| = |V(B)| = g + 1 \geq 1$ 且 $|F_2 - F_1| = |V(C)| = g + 1 \geq 1$ 可得, 在 SPMC 模型下 (F_1, F_2) 是一个可行顶点子集对。因为 $F_1 \cup F_2 = V(A) \cup N(V(A))$ 并且 $F_1 \Delta F_2 = V(A)$, 所以在 $F_1 \Delta F_2$ 与 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 之间没有边。根据引理 1, 可知 F_1 和 F_2 在 SPMC 模型下不可区分。 F_1 和 F_2 的图解如图 5 所示。

图5 F_1 和 F_2 的图解Fig. 5 Illustration of F_1 and F_2

接下来将证明 F_1 和 F_2 都是 g -额外条件故障集。由于在 $F_1 \Delta F_2$ 与 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 之间没有边,我们只需证明 B, C 以及 $Q_n - (F_1 \cup F_2)$ 的每个分支的顶点数都大于 g 。显然, B 和 C 都满足该条件。易知, $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 中的顶点有两种二进制字符串表示形式,第一种表示形式在第 g 位到第 $n-2$ 位中至少有两位与 u 和 v 的表示形式不同,第二种表示形式除第 i 位外在第 0 位到第 $n-2$ 位中至少有两位与 u^i 和 v^i 的表示形式不同,其中 $0 \leq i \leq g-1$ 。因此, $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 中的每个顶点都被包含在一个与 Q_{n-2} 同构或与 Q_{n-3} 同构的子图中。因为 $|V(Q_{n-2})| > |V(Q_{n-3})| > g+1$, 所以 $Q_n - (F_1 \cup F_2)$ 的每个分支也满足条件。因此, F_1 和 F_2 都是 Q_n 的 g -额外条件故障子集。

由于 (F_1, F_2) 在 SPMC 模型下是一个可行但不可区分的 g -额外条件故障子集对,并且 $|F_1| = |F_2| = 2n(g+1) - 5g - 2C_{2g+1}^2 - 1$, 因此我们得出结论: $\tilde{t}_g^s(Q_n) < 2n(g+1) - 5g - 2C_{2g+1}^2 - 1$ 。证毕。

定理 9 当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq \min\{n-4, \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor\}$ 时,

$$\tilde{t}_g^s(Q_n) \geq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1.$$

证明: 设 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq \min\{n-4, \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor\}$ 。假设

$\tilde{t}_g^s(Q_n) < \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1$, 那么在 Q_n 中存在一对在 SPMC 模型下可行但不可区分的 g -额外条件故障子集 (F_1, F_2) , 使得 $|F_1| \leq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1$ 且 $|F_2| \leq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1$ 。不失一般性, 假设 $|F_1| \geq |F_2|$ 。

因为 $|V(Q_n)| - |F_1 \cup F_2| \geq |V(Q_n)| - (|F_1| + |F_2|) \geq 2^n - 3n(g+1) + 2g + 5C_{2g+1}^2 + 2 > 0$, 所以 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$ 。由于 F_1 和 F_2 不可区分, 根据引理 1, 可知在 $V(Q_n) - (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边。又因为 (F_1, F_2) 是一个可行对, 所以 $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$, 并且 F_1 和 F_2

都是 g -额外条件故障集, 因此 $F_1 \cap F_2$ 是 Q_n 的一个 g -额外条件割且 $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cap F_2$ 。根据引理 7, 可得 $|F_1 \cap F_2| \geq n(g+1) - 2g - C_{2g+1}^2$ 。因为 F_1 和 F_2 均为 g -额外条件故障顶点集, $F_1 - F_2 \neq \emptyset$ 且 $F_2 - F_1 \neq \emptyset$, 所以 $|F_1 - F_2| \geq g+1$ 且 $|F_2 - F_1| \geq g+1$, 从而 $|F_1 \Delta F_2| \geq 2g+2$ 。

设 A 是 $F_1 \Delta F_2$ 的一个分支且 $|A| = 2g+2$, 并设 B 是 $F_1 \cap F_2$ 的一个子集且 $|B| = n(g+1) - 2g - C_{2g+1}^2$ 。由引理 6 可得 $|N(A)| \geq n(2g+2) - 2(2g+1) - C_{2g+1}^2 = 2n(g+1) - 4g - C_{2g+1}^2 - 2$ 。所以 $|A \cup N(A)| = |A| + |N(A)| \geq 2g+2 + 2n(g+1) - 4g - C_{2g+1}^2 - 2 = 2n(g+1) - 2g - C_{2g+1}^2$ 。由 $A \cup N(A) \subseteq F_1 \cup F_2$ 且 $B \subseteq F_1 \cap F_2$, 可得 $|F_1 \cup F_2| - |B| \geq |A \cup N(A)| - |B| \geq n(g+1) - 3C_{2g+1}^2$ 。因此有:

$$\begin{aligned} |F_1| &\geq \frac{|F_1 \cup F_2| + |F_1 \cap F_2|}{2} \\ &\geq \frac{|F_1 \cup F_2| + |B|}{2} \\ &= \frac{|F_1 \cup F_2| - |B|}{2} + |B| \\ &\geq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 \end{aligned}$$

这与 $|F_1| \leq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1$ 矛盾, 故 $\tilde{t}_g^s(Q_n) \geq \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1$ 。证毕。

文献[22]证明了当 $n \geq 4$ 且 $0 \leq g \leq n-4$ 时 $\tilde{t}_g^s(Q_n) = n(g+1) - g - C_{2g+1}^2$, 由引理 3 可知 $\tilde{t}_g^s(Q_n) \geq \tilde{t}_g^p(Q_n)$, 结合定理 9, 我们得到定理 10。

定理 10 Q_n 在 SPMC 模型下的 g -额外条件诊断度的一个下界为:

$$\tilde{t}_g^s(Q_n) \geq \begin{cases} \frac{3}{2}n(g+1) - g - \frac{5}{2}C_{2g+1}^2 - 1, \\ \text{若 } n \geq 4 \text{ 且 } 0 \leq g \leq \min\left\{n-4, \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor\right\} \\ n(g+1) - g - C_{2g+1}^2, \\ \text{若 } n \geq 8 \text{ 且 } \left\lceil \frac{2n-4}{3} \right\rceil \leq g \leq n-4 \end{cases}$$

5 模拟实验

本章通过模拟实验验证了第 3 章和第 4 章证明的理论结果的正确性。模拟实验在 Java 环境下进行, JDK 版本为 1.8。

基于定义 3 和定义 4, 我们总结了模拟实验的流程, 如图 6 所示。

在该模拟实验中, 有 3 个关键的模块, 分别是 g -好邻条件故障集的判定模块、 g -额外条件故障集的判定模块和故障集合对在 SPMC 模型下可区分的判定模块。

基于 g -好邻条件故障集的定义, 我们设计了第一个模块的算法, 即算法 1。该算法遍历每个无故障顶点, 并统计每个无故障顶点的无故障邻点数, 只要有一个无故障顶点的无故障邻点数小于 g , 就说明传入的故障集不是 g -好邻条件故障集, 若每个无故障顶点都有 g 个无故障邻点, 那么传入的故障集是 g -好邻条件故障集。

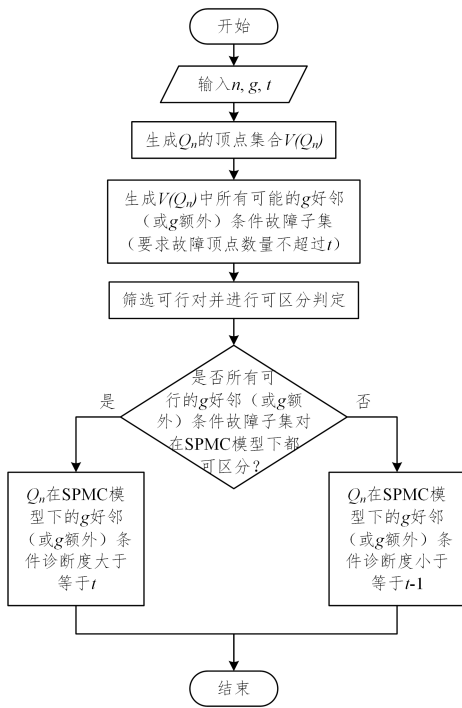


图 6 实验流程图

Fig. 6 Flowchart of experiment process

算法 1 g -好邻条件故障集判定算法输入: Q_n 的顶点集合 V , 故障集 F , 无故障邻点个数 g 输出: 对故障集 F 的判定结果

```

1. for all  $v \in V$  do
2. if  $v$  not in  $F$  then
3.   count=0;
4.   for all neighbor  $\in N(v)$  do
5.     if neighbor not in  $F$  then
6.       count++;
7.     end if
8.   end for
9.   if count <  $g$  then
10.    return false;
11.   end if
12. end if
13. end for
14. return true.

```

基于 g -额外条件故障集的定义,我们设计了第二个模块的算法,即算法 2。该算法采取深度优先的策略确定所有的无故障分支,并统计每个无故障分支的顶点数,若存在一个顶点数不超过 g 的无故障分支,则说明传入的故障集不是 g -额外条件故障集,若每个无故障分支的顶点数都大于 g ,那么传入的故障集是 g -额外条件故障集。

算法 2 g -额外条件故障集判定算法输入: Q_n 的顶点集合 V , 故障集 F , 无故障顶点个数 g 输出: 对故障集 F 的判定结果

```

1. isVisitMap={};
2. for all  $v \in V$  do
3.   if  $v$  not in  $F$  then

```

```

4.     isVisitMap.put(v,false);
5.   end if
6. end for
7. for all  $v \in$  isVisitMap.keySet() do
8.   if isVisitMap.get(v) == false then
9.     count=0;
10.    stack={};
11.    stack.push(v);
12.    while stack != null do
13.      node=stack.pop();
14.      if isVisitMap.get(node) == false then
15.        isVisitMap.replace(node,true);
16.        count++;
17.        for all neighbor  $\in N$ (node) do
18.          if neighbor not in  $F$  then
19.            if isVisitMap.get(neighbor) == false then
20.              stack.push(neighbor);
21.            end if
22.          end if
23.        end for
24.      end if
25.    end while
26.    if count <=  $g$  then
27.      return false;
28.    end if
29.  end if
30. end for
31. return true.

```

基于定义 1 和引理 1,我们设计了第三个模块的算法,即算法 3。该算法首先判断 F_1 和 F_2 是否形成可行对,若不形成可行对,则不进行可区分判断。若形成可行对,则遍历 $F_1 \Delta F_2$ 中的每个顶点,若存在一个至少有一个无故障邻点的顶点,则说明 F_1 和 F_2 是可区分的,否则是不可区分的。

算法 3 SPMC 模型下故障集合对可区分判定算法输入: 故障集合 F_1 和 F_2 输出: F_1 和 F_2 在 SPMC 模型下是否可区分的判定结果

```

1. if  $(F_1 - F_2) \neq \emptyset$  and  $(F_2 - F_1) \neq \emptyset$  then
2.   for all  $v \in (F_1 \Delta F_2)$  do
3.     for all neighbor  $\in N(v)$  do
4.       if neighbor not in  $(F_1 \cup F_2)$  then
5.         return true;
6.       end if
7.     end for
8.   end for
9.   return false;
10. end if
11. /*  $(F_1, F_2)$  不是可行对 */
12. return null.

```

我们以 $Q_n (4 \leq n \leq 7)$ 为实验对象按照图 6 的实验流程进行模拟实验,实验结果如表 2 所列,经过计算,实验得到的结果符合第 3 章和第 4 章理论推导的结果。

表 2 实验结果

Table 2 Experiment results

n	g	$ V(Q_n) $	$t_g^s(Q_n)$	$\tilde{t}_g^s(Q_n)$
4	0	16	$5 \leq t_0^s(Q_4) \leq 6$	$5 \leq \tilde{t}_0^s(Q_4) \leq 6$
5	0	32	$6 \leq t_0^s(Q_5) \leq 8$	$7 \leq \tilde{t}_0^s(Q_5) \leq 8$
5	1	32	$10 \leq t_1^s(Q_5) \leq 13$	$11 \leq \tilde{t}_1^s(Q_5) \leq 13$
6	0	64	$8 \leq t_0^s(Q_6) \leq 10$	$8 \leq \tilde{t}_0^s(Q_6) \leq 10$
6	1	64	$13 \leq t_1^s(Q_6) \leq 17$	$14 \leq \tilde{t}_1^s(Q_6) \leq 17$
6	2	64	$19 \leq t_2^s(Q_6) \leq 27$	$17 \leq \tilde{t}_2^s(Q_6) \leq 22$
7	0	128	$9 \leq t_0^s(Q_7) \leq 12$	$10 \leq \tilde{t}_0^s(Q_7) \leq 12$
7	1	128	$16 \leq t_1^s(Q_7) \leq 21$	$17 \leq \tilde{t}_1^s(Q_7) \leq 21$
7	2	128	$23 \leq t_2^s(Q_7) \leq 35$	$21 \leq \tilde{t}_2^s(Q_7) \leq 28$
7	3	128	$39 \leq t_3^s(Q_7) \leq 55$	$23 \leq \tilde{t}_3^s(Q_7) \leq 33$

结束语 对称 PMC 模型是 Zhu 等提出的一种新的诊断模型,与 PMC 模型相比,其具有更严格的约束条件,因此在该模型下开展诊断工作可以提高系统的诊断能力。与经典的诊断度相比, g -好邻条件诊断度和 g -额外条件诊断度能更准确地衡量系统的诊断能力。超立方体是一类具有重要性质的经典互连网络。本文主要研究了 n 维超立方体 Q_n 在 SPMC 模型下的 g -好邻条件诊断度与 g -额外条件诊断度的上下界,并且最后通过模拟实验验证了相关结论的正确性。与 Q_n 在 PMC 模型下的这两种条件诊断度相比, Q_n 在 SPMC 模型下的条件诊断度都有所提高,因此在 SPMC 模型下可以提高 Q_n 的诊断能力。

可以看到, Q_n 在 SPMC 模型下的这两种条件诊断度的上下界之间有着明显的差距,如何缩小它们之间的差距以及确定 Q_n 在 SPMC 模型下的这两种条件诊断度值得进一步研究。此外,超立方体及其变型在 SPMC 模型下的多种条件诊断度也非常值得研究。

参考文献

- [1] SAAD Y, SCHULTZ M H. Topological properties of hypercubes[J]. IEEE Transactions on Computers, 1988, 37(7): 867-872.
- [2] CONDON P, DIAZ A E, GIRAO A, et al. Hamiltonicity of random subgraphs of the hypercube[C]// Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms(SODA). Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021: 889-898.
- [3] ZHANG S, LIANG D, CHEN L, et al. The component diagnosability of hypercubes with large-scale faulty nodes[J]. The Computer Journal, 2022, 65(5): 1129-1143.
- [4] WEI C C, HSIEH S Y. Random and conditional (t, k) -diagnosis of hypercubes[J]. Algorithmica, 2017, 79(3): 625-644.
- [5] YANG W, MENG J. Extraconnectivity of hypercubes[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(6): 887-891.
- [6] PREPARATA F P, METZE G, CHIEN R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Electronic Computers, 1967, EC-16(6): 848-854.
- [7] MAENG J, MALEK M. A comparison connection assignment for self-diagnosis of multiprocessor systems[C]// Proceedings-11th Annual International Symposium on Fault-Tolerant Computing. IEEE Computer Society, 1981: 173-175.
- [8] BARSÌ F, GRANDONI F, MAESTRINI P. A theory of diagnosability of digital systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1976, 25(6): 585-593.
- [9] PENG S L, LIN C K, TAN J J M, et al. The g -good-neighbor conditional diagnosability of hypercube under PMC model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(21): 10406-10412.
- [10] DING T, XU M. Relationship between diagnosability and non-inclusive diagnosability of triangle-free connected graphs under the PMC model[J]. Theoretical Computer Science, 2023, 944: 113676.
- [11] YUAN J, QIAO H, LIU A. The upper and lower bounds of Rg -conditional diagnosability of networks[J]. Information Processing Letters, 2022, 176: 106248.
- [12] WEI Y, XU M. Conditional diagnosability of Cayley graphs generated by wheel graphs under the PMC model[J]. Theoretical Computer Science, 2021, 849: 163-172.
- [13] MA M J, XU M, DING T T, et al. The non-inclusion diagnosability of hypercubes under the PMC model[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2022, 6: 1-7.
- [14] ZHU Q, THULASIRAMAN K, NAIK K, et al. Symmetric PMC model of diagnosis, b -matchings in graphs and fault identification in t -diagnosable systems[J]. Theoretical Computer Science, 2021, 891: 35-49.
- [15] HAKIMI S L, AMIN A T. Characterization of connection assignment of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1974, 23(1): 86-88.
- [16] SULLIVAN G. A polynomial time algorithm for fault diagnosability[C]// IEEE 25th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. IEEE Computer Society Press, 1984: 148-156.
- [17] LAI P L, TAN J J M, CHANG C P, et al. Conditional diagnosability measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 165-175.
- [18] LIU H, HU X, GAO S. The g -good neighbor conditional diagnosability of twisted hypercubes under the PMC and MM^* model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 332: 484-492.
- [19] WEI Y L, XU M. The g -good-neighbor conditional diagnosability of locally twisted cubes[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2018, 6(2): 333-347.
- [20] GUO J, LI D, LU M. The g -good-neighbor conditional diagnosability of the crossed cubes under the PMC and MM^* model[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 755: 81-88.
- [21] JUN Y, AIXIA L, XUE M, et al. The g -good-neighbor conditional diagnosability of k -ary n -cubes under the PMC model and MM^* model[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2014, 26(4): 1165-1177.
- [22] ZHANG S, YANG W. The g -extra conditional diagnosability and sequential t/k -diagnosability of hypercubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2016, 93(3): 482-497.
- [23] WANG X, HUANG L, SUN Q, et al. The g -extra diagnosability of the balanced hypercube under the PMC and MM^* model[J]. The Journal of Supercomputing, 2022, 78(5): 6995-7015.

- [24] CHENG E, QIU K, SHEN Z. On the g -extra diagnosability of enhanced hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2022, 921: 6-19.
- [25] WANG S, MA X. The g -extra connectivity and diagnosability of crossed cubes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 336: 60-66.
- [26] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications [M]. London: Macmillan, 1976.
- [27] LI X, LIN C K, FAN J, et al. Relationship between extra connectivity and component connectivity in networks[J]. The Computer Journal, 2021, 64(1): 38-53.
- [28] DAHBURA A T, MASSON G M. An $O(n^{2.5})$ fault identification algorithm for diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1984, 33(6): 486-492.
- [29] LEIGHTON F T. Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes [M]. San Mateo: Elsevier, 1992.
- [30] LATIFI S, HEGDE M, NARAGHI-POUR M. Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1994, 43(2): 218-222.
- [31] OH A D, CHOI H A. Generalized measures of fault tolerance in

n -cube networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1993, 4(6): 702-703.

- [32] ZHU Q, XU J M. On restricted edge connectivity and extra edge connectivity of hypercubes and folded hypercubes[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(3): 249-253.



TU Yuanjie, born in 1999, postgraduate, is a member of CCF (No. J1792G). His main research interests include parallel and distributed systems, and graph algorithms.



FAN Jianxi, born in 1965, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. His main research interests include parallel and distributed systems, computer networks and graph algorithms.

(责任编辑:喻藜)