

## 一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法

吴杰, 万源, 刘秋杰

### 引用本文

吴杰, 万源, 刘秋杰. 一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法[J]. 计算机科学, 2025, 52(4): 138-146.

WU Jie, WAN Yuan, LIU Qiuji. [Consistent Block Diagonal and Exclusive Multi-view Subspace Clustering](#) [J]. Computer Science, 2025, 52(4): 138-146.

---

### 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

#### Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

##### [基于生成对抗网络的云制造工业服务选择方法](#)

Selection Method for Cloud Manufacturing Industrial Services Based on Generative Adversarial Networks

计算机科学, 2025, 52(4): 54-63. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.241000102>

##### [基于多关系图注意力网络的社交机器人检测](#)

Social Bots Detection Based on Multi-relationship Graph Attention Network

计算机科学, 2025, 52(1): 298-306. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.231100161>

##### [视觉富文档理解预训练综述](#)

Review of Pre-training Methods for Visually-rich Document Understanding

计算机科学, 2025, 52(1): 259-276. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240300028>

##### [面向工业品缺陷检测的对比表示学习](#)

Contrastive Representation Learning for Industrial Defect Detection

计算机科学, 2025, 52(1): 210-220. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.240100202>

##### [融合时频特征的多粒度时间序列对比学习方法](#)

Multi-granularity Time Series Contrastive Learning Method Incorporating Time-Frequency Features

计算机科学, 2025, 52(1): 170-182. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.231100171>

# 一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法

吴杰 万源 刘秋杰

武汉理工大学理学院 武汉 430070

(273226@whut.edu.cn)

**摘要** 子空间聚类方法为高维多视角数据的聚类问题提供了有效的解决方案。针对现有算法利用低秩或稀疏约束通过模型的特定性质不能使得表示矩阵直接具有块对角性的问题,提出了一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法(CBDE-MS C)。CBDE-MS C 将各个视角的子空间表示矩阵分解为一致自表示矩阵和特定自表示矩阵。对于一致自表示矩阵,使用块对角约束使其具有近似的块对角结构,探索数据的一致性;对于特定自表示矩阵,在其间施加限定性约束,探索数据的互补性。使用矩阵  $L_{2,1}$  范数约束误差矩阵,使其满足行稀疏。此外,使用交替方向乘法(ADMM)优化目标函数。采用归一化互信息(NMI)、正确率(ACC)、调整兰德指数(AR)和 F 分数(F-score)等评价指标,对 CBDE-MS C 进行了评估。实验结果表明,CBDE-MS C 与现有的一些优良算法相比,4 个指标的结果均有较大的提升,尤其是在 YaleB 数据集上,相比于经典方法 CSMSC,其 NMI,ACC,AR 和 F-score 分别提升了 0.088,0.127,0.145 和 0.122。实验结果验证了所提算法的有效性。

**关键词:** 子空间聚类;多视角学习;表示学习;块对角表示

**中图分类号** TP391

## Consistent Block Diagonal and Exclusive Multi-view Subspace Clustering

WU Jie, WAN Yuan and LIU Qiuji e

School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China

**Abstract** Subspace clustering method provides an effective solution to the clustering problem of high-dimensional multi-view data. Focusing on the issue that the representation matrix cannot obey the block diagonal property directly by using low rank or sparse constraints in existing algorithms, a consistent block diagonal and exclusive multi-view subspace clustering (CBDE-MS C) is proposed. CBDE-MS C decomposes the subspace representation matrix of each perspective into consistent and specific self-representation matrices. For the consistent self-representation matrix, block diagonal constraint is used to make it have an approximate block diagonal structure and explore the consistency of the data. The exclusive constraint is applied between specific self-representation matrices to explore the complementarity of data. The matrix  $L_{2,1}$  norm is used to constrain the error matrix so that it satisfies row sparsity. In addition, alternate direction multiplier method (ADMM) is used to optimize the objective function. CBDE-MS C is evaluated by normalized mutual information (NMI), accuracy (ACC), adjusted rand index (AR) and F-score. Experimental results show that compared with some existing excellent algorithms, CBDE-MS C has a great improvement in the results of the four indicators, especially in the YaleB dataset, CBDE-MS C compared with the classical method CSMSC, NMI, ACC, AR and F-score increased by 0.088, 0.127, 0.145 and 0.122, which verifies the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords** Subspace clustering, Multi-view learning, Representation learning, Block diagonal representation

## 1 引言

当数据从不同数据源获得或者由多个特征集来共同表示时,这类数据称为多视角数据。例如,图像可由颜色直方图、局部二值模式(Local Binary Pattern, LBP)特征<sup>[1]</sup>、方向梯度直方图(Histogram of Oriented Gradient, HOG)特征<sup>[2]</sup>等多种特征来表示;不同新闻媒体对同一新闻事件报道的内容会根据自身情况和受众群体进行选择 and 编辑。多视角数据各个

视角之间通常能够提供共识和互补的信息,而传统聚类方法并未考虑这点。因此,如何有效提取不同视角的特征,且保留各个视角之间的相关性来实现聚类,成为机器学习领域近年的研究热点。多视角学习算法可分为协同训练(Co-training)<sup>[3-5]</sup>、多核学习法(Multiple Kernel Learning)<sup>[6]</sup>、图学习(Graph Learning)<sup>[7]</sup>和子空间学习(Subspace Learning)<sup>[8]</sup>等。

协同训练对不同视角训练出不同的分类器,交替迭代降低所有分类器的聚类结果的差异,直到所有分类器的分类

到稿日期:2024-01-16 返修日期:2024-06-15

基金项目:中央高校基本科研业务费专项基金(2021III030JC)

This work was supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China(2021III030JC).

通信作者:万源(wanyuan@whut.edu.cn)

结果趋于一致。协同训练算法的缺点在于要求多视角信息充分冗余且满足条件独立性。多核学习为不同的视角构造不同的基核,并融合多视角信息得到一致性核,从而提高聚类性能。多核学习面临的挑战,是如何选择最佳核函数,以及如何有效地混合多个核函数。图学习基于单视角数据分别构造初始图,之后融合全部视角数据得到一致图,最后将聚类问题转化为图分割问题。图学习的优势在于对聚类结果的可解释性强,但图的初始化和图融合策略对算法的性能影响很大。根据多视角数据的一致性,子空间学习假设所有样本共享一个公共的子空间,每个视角的样本在该空间中都有相应的表示。子空间学习的核心在于,尽可能保留每个视角的特定信息,同时寻找多个视角共享的一致性表示。

子空间聚类应用于子空间学习从数据中寻找子空间表示,通过表示矩阵构建亲和矩阵,最后应用谱聚类<sup>[9]</sup>得到聚类结果。表示学习<sup>[10]</sup>、运动分割<sup>[11-13]</sup>和图像处理<sup>[14]</sup>等研究都与子空间聚类有关。稀疏子空间聚类(Sparse Subspace Clustering, SSC)<sup>[15]</sup>采用  $L_1$  范数约束系数矩阵,寻找稀疏的自表示结构。低秩表示的子空间结构鲁棒恢复(Robust Recovery of Subspace Structures by Low-rank Representation, LRR)<sup>[16]</sup>采用核范数约束系数矩阵,并使用低秩表示探索子空间结构。结构化稀疏子空间聚类(Structured Sparse Subspace Clustering, S3C)<sup>[17]</sup>将稀疏自表示和谱聚类过程进行统一。块对角表示子空间聚类(Subspace Clustering by Block Diagonal Representation, BDR)<sup>[18]</sup>发掘原始数据的块对角结构,使一个块对应一个类。这些基于自表示的方法凭借其优势,在子空间聚类中表现突出。

多视角学习利用不同视角之间的一致性和互补性信息来提高学习性能。为了挖掘多视角数据的一致信息,潜在多视角子空间聚类(Latent Multi-view Subspace Clustering, LM-SC)<sup>[19]</sup>串联所有视角,并基于潜在空间构建一致的子空间自表示,使用核范数约束子空间表示矩阵为低秩。多样性诱导的多视角子空间聚类(Diversity-induced Multiview Subspace Clustering, DiMSC)<sup>[8]</sup>引入 HSIC 准则作为多样性约束,来探索不同视角之间的互补信息。为了同时挖掘一致和互补信息,一致和特定的多视角子空间聚类(Consistent and Specific Multi-view Subspace Clustering, CSMSC)<sup>[20]</sup>设置了核范数约束的一致表示矩阵和  $L_2$  范数约束的特定表示矩阵。排他性和一致性的正则化多视角子空间聚类(Exclusivity-Consistency Regularized Multi-view Subspace Clustering, ECMSC)<sup>[21]</sup>引入排他性定义,来探索多视角数据的互补性。

近年来,深度学习技术不断发展,其凭借有效探索数据深度特征的能力被应用于子空间聚类,诞生了深度子空间聚类(Deep Subspace Clustering, DSC)方法。它通过深度学习技术学习原始数据的低维特性并执行子空间聚类。卷积神经网络<sup>[22]</sup>、生成对立网络<sup>[23-24]</sup>、深度自编码<sup>[25]</sup>等主流深度学习算法已成功应用于子空间聚类,并取得了良好的聚类性能。虽然 DSC 方法在一定程度上提高了聚类的准确性,但其受到计算时间消耗和内存消耗大的限制。此外, DSC 如何有效地挖掘数据中的子空间结构并获得更稳定的数据表示,仍需要进一步研究。

上述大多数多视角子空间聚类方法都是通过设计特定的正则化约束来优化自表示矩阵,通过这些不同的正则化器得到的表示矩阵在一定的子空间假设下都服从块对角结构。但是这种性质是模型特定的,由此得到的表示矩阵并不直接具有块对角的性质。为了使表示矩阵直接服从块对角结构,将块对角表示引入多视角子空间聚类,同时使用一种限定性约束挖掘不同视角的互补信息,提出一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法(Consistent Block Diagonal and Exclusive Multi-view Subspace Clustering, CBDE-MS-C)。CBDE-MS-C 既能探索多视角数据的块对角结构,提高表示矩阵与类别信息的相关性;又能获得多个视角的一致信息和互补信息,提高子空间学习中表示矩阵的聚类表现。由于引入块对角约束导致求解目标函数成为一个非凸优化问题,因此采用交替方向乘法来求解目标函数并恢复相应的子空间表示。在基准数据集上的实验结果验证了该算法具有更优的聚类效果。

## 2 相关工作

本章回顾多视角子空间聚类的基本过程和相关工作。

### 2.1 多视角子空间聚类

设  $\mathbf{X}^{(v)} \in \mathbf{R}^{d_v \times N}$  是表示与第  $v$  个视角相对应的特征矩阵,其中  $N$  是样本数,  $d_v$  表示第  $v$  个视角中数据的维数,并且  $v \in \{1, 2, \dots, V\}$ 。自表示性质假设每个数据样本由同一子空间中其他样本的线性组合表示。如果只考虑所有视角的一致性项,则  $\mathbf{X}^{(v)}$  表示为:

$$\mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  是视角一致的子空间表示,  $\mathbf{E}^{(v)} \in \mathbf{R}^{d_v \times N}$  是误差项。

基于自表示的多视角子空间聚类的目标函数为:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{E}^{(v)}} \lambda \Omega(\mathbf{Z}) + \sum_{v=1}^V \Phi(\mathbf{E}^{(v)})$$

其中,  $\Omega(\cdot)$  和  $\Phi(\cdot)$  表示某种正则化策略,  $\lambda > 0$  是平衡这两个正则化器的参数。得到了自表示矩阵  $\mathbf{Z}$  后,亲和矩阵  $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  通常表示为:

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{Z}| + |\mathbf{Z}|^T}{2}$$

其中,  $|\cdot|$  是绝对值运算符。对亲和矩阵应用谱聚类算法,得到最终的聚类结果。

### 2.2 一致和特定的多视角子空间聚类

式(1)中尽管考虑了所有视角共享的公共表示  $\mathbf{Z}$ ,但没有考虑每个视角中的特定部分,而仅利用公共表示中的信息进行数据建模是不够的或不准确的。一致和特定的多视角子空间聚类算法(CSMSC)考虑将各个视角下的表示矩阵  $\mathbf{Z}^{(v)}$  分解为对不同视角上保持不变的一致表示  $\mathbf{C}$  和对应于第  $v$  个视角的特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  的和,即:

$$\mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} (\mathbf{C} + \mathbf{D}^{(v)}) + \mathbf{E}^{(v)}$$

再施加相关约束,得到 CSMSC 的目标函数为:

$$\min_{\mathbf{C}, \mathbf{D}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}} \lambda_C \|\mathbf{C}\|_* + \lambda_D \sum_{v=1}^V \|\mathbf{D}^{(v)}\|_2^2 + \sum_{v=1}^V \|\mathbf{E}^{(v)}\|_{2,1} \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} (\mathbf{C} + \mathbf{D}^{(v)}) + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V$$

其中,  $\|\cdot\|_*$  表示矩阵核范数,  $\|\cdot\|_2$  是  $L_2$  范数,  $\|\cdot\|_{2,1}$  表示  $L_{2,1}$  范数,  $\lambda_C$  和  $\lambda_D$  是平衡参数。

### 2.3 块对角表示子空间聚类

块对角表示通过施加块对角约束追求表示矩阵的块对角结构,使得每一个块对应一个类,这样的结构也便于后续进行谱聚类。

设  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  是亲和矩阵,即满秩  $\mathbf{B} \geq 0$  且  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ ,对应的拉普拉斯矩阵定义为  $\mathbf{L}_B = \text{Diag}(\mathbf{B}\mathbf{1}) - \mathbf{B}$ 。其中,  $\text{Diag}(\cdot)$  表示将向量对角化为矩阵,  $\mathbf{0}$  和  $\mathbf{1}$  分别表示元素全为 0 和 1 的列向量。用  $\lambda_i(\mathbf{L}_B)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 表示矩阵  $\mathbf{L}_B$  从大到小排列的第  $i$  个特征值。根据拉普拉斯矩阵的性质可知,拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_B$  的特征值 0 的代数重数等于  $\mathbf{B}$  中的分块的数量,以此将  $k$  块块对角正则化器定义为  $\mathbf{L}_B$  的  $k$  个最小特征值的和,即:

$$\|\mathbf{B}\|_k = \sum_{i=N-k+1}^N \lambda_i(\mathbf{L}_B)$$

其中,  $\|\cdot\|_k$  表示  $k$  块块对角正则化器。可以看出  $\|\mathbf{B}\|_k = 0$  等价于亲和矩阵  $\mathbf{B}$  是  $k$  块对角的,因此  $\|\mathbf{B}\|_k$  可以看作是块对角矩阵结构的诱导正则化器。在  $k$  块块对角正则化的基础上,带误差项的块对角表示方法 BDR 模型如下:

$$\min_{\mathbf{B}} \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{B}\|_F^2 + \gamma \|\mathbf{B}\|_k \quad (3)$$

s. t.  $\text{diag}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T$

其中,  $\gamma$  是平衡参数,  $\text{diag}(\cdot)$  表示将矩阵对角线上的元素转化为向量。

## 3 本文工作

CSMSC 可以提取出一致表示和一系列视角特定的表示,但无法直接找到表示矩阵的块对角结构;BDR 虽然使用块对角约束探索表示矩阵的块对角结构,但没有挖掘多视角数据的互补信息。为了解决这些问题,本文提出一致块对角和限定的多视角子空间聚类算法(CBDE-MSC)。模型的具体框架如图 1 所示。将单视角的块对角表示引入多视角数据  $\mathbf{X}^{(v)}$ ,对不同视角下的一致表示矩阵  $\mathbf{C}$  施加块对角约束;同时考虑多视角数据的互补性,对得到的一系列特定的表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  施加限定性约束。额外的建模误差  $\mathbf{E}^{(v)}$  将使用  $L_{2,1}$  范数使其稀疏。最后,使用一致表示  $\mathbf{C}$  和特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  得到相应的亲和矩阵  $\mathbf{S}$ ,并对其进行谱聚类。

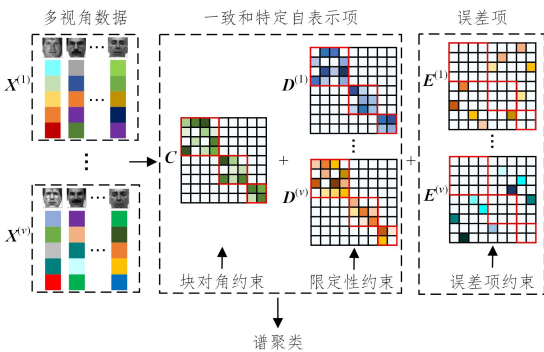


图 1 CBDE-MSC 框架

Fig. 1 Framework of CBDE-MSC

### 3.1 CBDE-MSC 的目标函数

CBDE-MSC 考虑多视角数据之间不变的公共表示和每个视角中的特定表示,将各个视角下的表示矩阵  $\mathbf{Z}^{(v)}$  分解为对不同视角上保持不变的一致表示  $\mathbf{C}$  和对应于第  $v$  个视角

唯一一部分的视角特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  的和,即:

$$\mathbf{Z}^{(v)} = \mathbf{C} + \mathbf{D}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V$$

对于一致项  $\mathbf{C}$ ,引入块对角约束让一致自表示矩阵更清楚、直接地具有块对角结构,以挖掘不同视角之间更多的共享信息,同时防止得到平凡解:

$$\Omega(\mathbf{C}) = \lambda_C \|\mathbf{C}\|_k$$

其中,  $\lambda_C$  是平衡参数。

为了让不同视角的特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  有足够的差异性而使得所有特定表示互补,对特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  施加限定性约束。对于两个特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$  和  $\mathbf{D}^{(w)}$  中的表示向量  $\mathbf{d}_i^{(v)}$  和  $\mathbf{d}_i^{(w)}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,有哈达玛积  $\mathbf{g}_i = \mathbf{d}_i^{(v)} \odot \mathbf{d}_i^{(w)}$ ,当向量  $\mathbf{d}_i^{(v)}$  某一位置的元素不为零时,在理想情况下,不同视角的特定表示的差异性使向量  $\mathbf{d}_i^{(w)}$  在该位置为零,可以依据  $\mathbf{g}_i$  中非零元素的数目来表现不同表示向量的差异性。使用  $L_0$  范数  $\|\mathbf{g}_i\|_0$  来表现不同表示向量的差异性,  $\|\mathbf{g}_i\|_0$  越小,则不同表示向量的差异性越大。将这个性质推广到不同视角的特定表示,有如下限定性约束:

$$\mathcal{G}(\mathbf{D}^{(v)}, \mathbf{D}^{(w)}) = \|\mathbf{D}^{(v)} \odot \mathbf{D}^{(w)}\|_0 \quad (4)$$

其中,  $\odot$  代表哈达玛积,  $\|\cdot\|_0$  是  $L_0$  范数。当矩阵  $\mathbf{D}^{(v)}$  某一位置的元素不为零时,在理想情况下,由限定性约束得  $\mathbf{D}^{(w)}$  在同一位置为零,使用该限定性约束来增强不同视角之间的差异性。

由于式(4)中  $L_0$  范数是非凸且不连续的,因此使用  $L_1$  范数代替  $L_0$  范数,使目标函数更容易优化。其次,为了防止各个视角表示学习的过拟合,加入光滑正则化项,得到对于视角特定表示矩阵的约束:

$$\sum_{v=1}^V \Omega(\mathbf{D}^{(v)}) = \frac{\lambda_D}{2} \sum_{v=1}^V \|\mathbf{D}^{(v)}\|_F^2 + \lambda_G \sum_{v \neq w} \|\mathbf{D}^{(v)} \odot \mathbf{D}^{(w)}\|_1 \quad (5)$$

其中,  $\lambda_D$  和  $\lambda_G$  是平衡参数。

由此,得到 CBDE-MSC 的目标函数:

$$\min_{\mathbf{C}, \mathbf{D}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}} \lambda_C \|\mathbf{C}\|_k + \frac{\lambda_D}{2} \sum_{v=1}^V \|\mathbf{D}^{(v)}\|_F^2 + \lambda_G \sum_{v \neq w} \|\mathbf{D}^{(v)} \odot \mathbf{D}^{(w)}\|_1 + \sum_{v=1}^V \|\mathbf{E}^{(v)}\|_{2,1}$$

s. t.  $\mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)}(\mathbf{C} + \mathbf{D}^{(v)}) + \mathbf{E}^{(v)}, \text{diag}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}, \mathbf{C} \geq \mathbf{0}, \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, v=1, \dots, V$  (6)

其中,  $\lambda_C, \lambda_D, \lambda_G$  是平衡参数。式(6)中第一项是对一致项  $\mathbf{C}$  施加块对角约束,第二项是对特定项  $\mathbf{D}^{(v)}$  使用的光滑正则化项,第三项是对特定表示矩阵之间施加限定性约束,最后一项使用  $L_{2,1}$  范数使误差矩阵  $\mathbf{E}^{(v)}$  行稀疏。与 CSMSC 的目标函数式(2)相比, CBDE-MSC 拥有块对角正则化以及限定性约束;与 BDR 模型式(3)相比, CBDE-MSC 添加限定性约束挖掘互补的视角特定表示  $\mathbf{D}^{(v)}$ 。

求解最小化问题(6),可以从多视角数据提取出具有近似块对角结构的一致表示和一系列具有互补性的特定表示,这样能够准确地对表示矩阵进行聚类。

### 3.2 目标函数的优化

解决上述非凸问题的关键在于非凸项  $\|\mathbf{C}\|_k$ 。  $\|\mathbf{C}\|_k$  可由 Ky Fan<sup>[26]</sup> 做重新表述。

设  $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  和  $\mathbf{L} \geq \mathbf{0}$ , 于是有:

$$\sum_{i=N-k+1}^N \lambda_i(\mathbf{L}) = \min_{\mathbf{W}} \langle \mathbf{L}, \mathbf{W} \rangle, \text{ s. t. } \mathbf{I} \geq \mathbf{W} \geq \mathbf{0}, \text{Tr}(\mathbf{W}) = k$$

即可将  $\|C\|_K$  表示为一个凸规划:

$$\|C\|_K = \min_W \langle L_C, W \rangle, \text{ s. t. } I \geq W \geq 0, \text{Tr}(W) = k$$

同时,对  $C$  和  $D^{(v)}$  分别引入辅助矩阵  $J$  和  $M^{(v)}$ ,将式(3)转换为:

$$\begin{aligned} \min_{C, J, W, D^{(v)}, M^{(v)}, E^{(v)}} \lambda_C \|J\|_K + \frac{\lambda_D}{2} \sum_{v=1}^V \|D^{(v)}\|_2^2 + \\ \lambda_G \sum_{v \neq w} \|D^{(v)} \odot D^{(w)}\|_1 + \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_{2,1} \\ \text{ s. t. } X^{(v)} = X^{(v)}(C + M^{(v)}) + E^{(v)}, J = C, M^{(v)} = D^{(v)}, \\ \text{diag}(J) = 0, J \geq 0, J = J^T, I \geq W \geq 0, \text{Tr}(W) = k, v = \\ 1, \dots, V \end{aligned} \quad (7)$$

使用交替拉格朗日乘子法求解上述问题,得到增广拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} L(C, J, W, D^{(v)}, M^{(v)}, E^{(v)}) \\ = \lambda_C \langle \text{Diag}(J) - J, W \rangle + \frac{\lambda_D}{2} \sum_{v=1}^V \|D^{(v)}\|_2^2 + \\ \lambda_G \sum_{v \neq w} \|D^{(v)} \odot D^{(w)}\|_1 + \sum_{v=1}^V \|E^{(v)}\|_{2,1} + \\ \sum_{v=1}^V \Psi(Y_1^{(v)}, X^{(v)} - X^{(v)}(C + M^{(v)}) - E^{(v)}) + \Psi(Y_2, J - \\ C) + \sum_{v=1}^V \Psi(Y_3^{(v)}, D^{(v)} - M^{(v)}) \\ \text{ s. t. } \text{diag}(J) = 0, J \geq 0, J = J^T, I \geq W \geq 0, \text{Tr}(W) = k, v = \\ 1, \dots, V \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\Psi(P, Q) = \frac{\mu}{2} \|Q\|_F^2 + \langle P, Q \rangle$ ,  $\langle \cdot \rangle$  为两个矩阵的欧几里得内积,  $Y_1^{(v)}, Y_2, Y_3^{(v)}$  为拉格朗日乘子,  $\mu > 0$  为罚参数。

将上述问题分为 6 个子问题进行交替优化。

1) 固定其他变量,更新  $W$

$$\begin{aligned} W = \arg \min_W \langle \text{Diag}(J) - J, W \rangle \\ \text{ s. t. } I \geq W \geq 0, \text{Tr}(W) = k \end{aligned} \quad (9)$$

将  $\text{Diag}(J) - J$  对角化表示为  $QAQ^T$ 。因此,式(6)的解为  $W = UU^T$ ,  $U \in \mathbb{R}^{N \times k}$  由  $\text{Diag}(J) - J$  的前  $k$  个最小特征值对应的前  $k$  个特征向量组成。

2) 固定其他变量,更新  $J$

$$\begin{aligned} J = \arg \min_J \lambda_C \langle \text{Diag}(J) - J, W \rangle + \Psi(Y_2, J - C) \\ \text{ s. t. } \text{diag}(J) = 0, J \geq 0, J = J^T \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)等价于:

$$J = \frac{1}{2} \left\| J - C + \frac{Y_2}{\mu} + \frac{\lambda_C}{\mu} (\text{diag}(W) \mathbf{1}^T - W) \right\|_F^2 \quad (11)$$

s. t.  $\text{diag}(J) = 0, J \geq 0, J = J^T$

$$\text{令 } A = C - \frac{Y_2}{\mu} - \frac{\lambda_C}{\mu} (\text{diag}(W) \mathbf{1}^T - W), \hat{A} = A - \text{Diag}(\text{diag}(A)), \text{则式(11)的解为:}$$

$$J = [(\hat{A} + (\hat{A})^T) / 2]_+ \quad (12)$$

其中,  $[A]_+ = \max(O, A)$  表示保留  $A$  的非负元素,其余负元素设置为 0。求解式(10)的详细过程见文献[18]。

3) 再固定其他变量,更新  $C$

$$\begin{aligned} C = \arg \min_C \sum_{v=1}^V \Psi(Y_1^{(v)}, X^{(v)} - X^{(v)}(C + M^{(v)}) - E^{(v)}) + \\ \Psi(Y_2, J - C) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)右侧对  $C$  求偏导并令其为 0,解得:

$$C = C_1^{-1}(C_2 + C_3) \quad (14)$$

$$\text{其中, } C_1 = \sum_{v=1}^V (X^{(v)})^T X^{(v)} + I, C_2 = \sum_{v=1}^V (X^{(v)})^T \frac{Y_1^{(v)}}{\mu} + \frac{Y_2}{\mu} + J,$$

$$C_3 = \sum_{v=1}^V (X^{(v)})^T (X^{(v)} - X^{(v)} M^{(v)} - E^{(v)}).$$

4) 同理固定其他变量,分别更新  $M^{(v)}$  和  $E^{(v)}$

$$M^{(v)} = (M_1^{(v)})^{-1} (M_2^{(v)} + M_3^{(v)}) \quad (15)$$

$$\text{其中, } M_1^{(v)} = (X^{(v)})^T X^{(v)} + I, M_2^{(v)} = (X^{(v)})^T (X^{(v)} - X^{(v)} C - E^{(v)}), M_3^{(v)} = (X^{(v)})^T \frac{Y_1^{(v)}}{\mu} + \frac{Y_3^{(v)}}{\mu} + D^{(v)}.$$

$$E^{(v)} = \arg \min_{E^{(v)}} \|E^{(v)}\|_{2,1} + \Psi(Y_1^{(v)}, X^{(v)} - X^{(v)}(C + M^{(v)}) - E^{(v)})$$

$$= \arg \min_{E^{(v)}} \|E^{(v)}\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} \|E^{(v)} - (X^{(v)} - X^{(v)} C -$$

$$X^{(v)} M^{(v)} + \frac{Y_1^{(v)}}{\mu})\|_F^2 \quad (16)$$

5) 固定其他变量,更新  $D^{(v)}$

$$\begin{aligned} D^{(v)} = \arg \min_{D^{(v)}} \frac{\lambda_D}{2} \|D^{(v)}\|_2^2 + \lambda_G \sum_{v \neq w} \|D^{(v)} \odot D^{(w)}\|_1 + \\ \Psi(Y_3^{(v)}, D^{(v)} - M^{(v)}) \end{aligned} \quad (17)$$

得到式(17)的具体解为:

$$D^{(v)} = S_{\frac{\lambda_G \sum_{v \neq w} |D^{(w)}|}{\lambda_D + \mu}} \left( \frac{\mu M^{(v)} - Y_3^{(v)}}{\lambda_D + \mu} \right) \quad (18)$$

其中,  $S_\lambda(\cdot)$  代表软阈值算子。

最后,更新乘子和参数:

$$Y_1^{(v)} = Y_1^{(v)} + \mu (X^{(v)} - X^{(v)}(C + M^{(v)}) - E^{(v)}) \quad (19)$$

$$Y_2 = Y_2 + \mu (C - J) \quad (20)$$

$$Y_3^{(v)} = Y_3^{(v)} + \mu (D^{(v)} - M^{(v)}) \quad (21)$$

$$\mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max}) \quad (22)$$

在求得共享表示  $C$  和视角特定表示  $D^{(v)}$  后,将  $C$  对称并设置对角线元素为 0,即  $\hat{C} = C - \text{Diag}(\text{diag}(C))$ ,  $C = [(\hat{C} + (\hat{C})^T) / 2]_+$ 。接下来构造关于一致性和特异性的亲和矩阵:

$$S = \frac{|C| + |C|^T}{2} + \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V \frac{|D^{(v)}| + |D^{(v)}|^T}{2}$$

最后,对亲和矩阵应用谱聚类算法,得到最终的聚类结果。CBDE-MSc 的求解算法如算法 1 所示。

**算法 1** CBDE-MSc 的求解算法

输入:多视角数据  $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(V)}\}$ , 3 个超参数  $\lambda_C, \lambda_D, \lambda_G$ , 聚类数  $c$

输出:共享表示矩阵  $C$  和视角特定表示矩阵  $D^{(v)}$

初始化:矩阵  $C = J = W = M^{(v)} = E^{(v)} = Y_1^{(v)} = Y_2 = Y_3^{(v)} = 0, v \in \{1, 2, \dots, V\}$ , 根据文献[8]中的方法生成特定表示矩阵  $\{D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(V)}\}$ , 设置参数  $\mu = 10^{-4}, \mu_{\max} = 10^6, \rho = 1.2$ , 终止阈值  $\epsilon = 10^{-6}$  和最大迭代次数  $T = 150$

1. 根据式(14)和式(12)更新  $C$  和  $J$ ;

For  $v=1$  to  $V$  do

2. 根据式(9)、式(15)、式(16)和式(18)更新  $W, M^{(v)}, E^{(v)}$  和  $D^{(v)}$ ;

3. 根据式(19)一式(21)更新拉格朗日乘子  $Y_1^{(v)}, Y_2$  和  $Y_3^{(v)}$ ;

End for

4. 根据式(19)更新惩罚参数  $\mu$ 。

直至收敛或达到最大迭代次数。

**3.3 算法复杂性和收敛性分析**

该算法由  $3V+3$  个子问题组成,子问题的复杂性分析如下。由矩阵求和与求积推导出的更新  $C$  和  $M^{(v)}$  的复杂度为  $O(dVN^2 + N^3)$ , 其中  $d$  是所有视角中数据的最大维数,  $V$  为

视角数,  $N$  为样本数。由于矩阵求和, 更新子问题  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}^{(v)}$  和  $\mathbf{D}^{(v)}$  的复杂度分别为  $O(N^2)$ ,  $O(dN)$  和  $O(VN^2)$ 。对于由矩阵对角化得到的  $\mathbf{W}$  的更新, 其复杂度为  $O(N^3)$ 。综上, 每次迭代的复杂度是  $O(dVN + (dV^2 + V^2 + dV + 1)N^2 + (V + 2)N^3)$ , 考虑迭代次数, 总复杂度为  $O(TVN(d + dVN + N^2))$ , 其中  $T$  为迭代次数。

对于目标函数的优化, 采用交替方向乘法, 即每一次固定其他变量为常数, 将其视作单变量的优化问题并使用增广拉格朗日方法求解。但约束中包含一个非线性、非光滑并且凸的半正定约束, 使得整体优化问题是非光滑且凸的, 导致其收敛性难以证明。我们通过在 4 个真实世界数据集 (Yale, YaleB, 3Sources 和 Caltech101-20) 上的大量实验来证明收敛性。该算法在 4 个数据集上的收敛曲线如图 2—图 5 所示, 图中以矩阵的  $F$  范数的平方计算迭代误差, 当迭代误差小于设置的终止阈值后, 停止迭代。由图 2—图 5 可知, 该方法在迭代 25~40 次左右时, 迭代误差急速下降, 随后逐渐接近并最后小于给定的终止阈值, 迭代终止。结果表明, 该方法具有较快的收敛速度和较强的收敛能力。

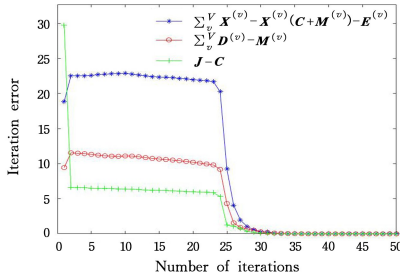


图 2 在 Yale 数据集上的迭代误差曲线

Fig. 2 Iteration error curve on Yale dataset

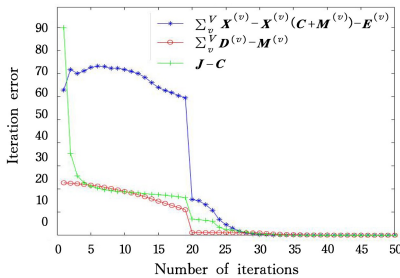


图 3 在 YaleB 数据集上的迭代误差曲线

Fig. 3 Iteration error curve on YaleB dataset

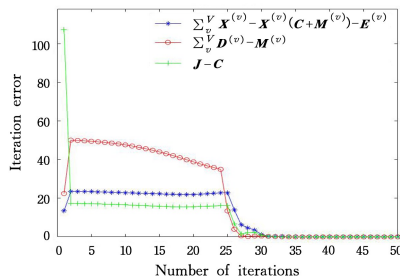


图 4 在 3Sources 数据集上的迭代误差曲线

Fig. 4 Iteration error curve on 3Sources dataset

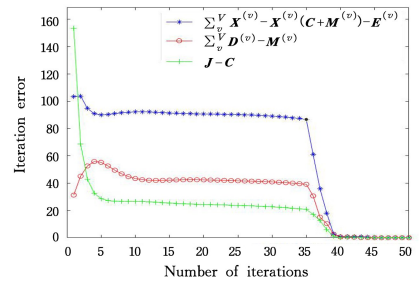


图 5 在 Caltech101-20 数据集上的迭代误差曲线

Fig. 5 Iteration error curve on Caltech101-20 dataset

## 4 实验结果

### 4.1 实验所用数据集

实验采用 4 个多视角公共基准数据集来评估算法的聚类效果。

1) Yale<sup>1)</sup> 是一个人脸数据集, 它包含了 15 个人的 165 张灰度图像, 每个人有 11 张不同的面部表情和配置。提取 LBP、Gabor 和强度特征作为 3 个视角, 每个视角的维度是 4096, 3304 和 6750。

2) 3Sources<sup>2)</sup> 是一个新闻数据集, 包含 6 类共 416 篇文章, 其中 169 篇文章同时被 BBC, Guardian 和 Reuters 这 3 家媒体报道。与文献[27]类似, 实验将 3 家媒体的 169 篇文章与 3 个视角相关联, 通过术语频率-逆文档频率(TF-IDF)进行描述, 每个视角的维度分别是 3560, 3068 和 3631。

3) Extended YaleB<sup>3)</sup> 包含了 38 个人的 2414 张人脸图像, 每个人都有 64 张正面的照片, 这些照片涵盖了不同的光线和姿势情况。从中提取 LBP、Gabor 和强度作为 3 个视角, 并选择前 10 个类别共 640 张正面人脸图片作为数据集。

4) Caltech101-20<sup>4)</sup> 是一个包含了 101 个图像类别的对象识别数据集。从中选择 20 个类别的 2386 张图像作为最终的数据集, 并提取 HOG、GIST 和 LBP 特征作为 3 个视角, 每个视图的维度分别是 1984, 512 和 928。

### 4.2 对比方法

将所提方法与经典算法和最新算法进行比较, 其中包括 3 种单视角方法和 7 种多视角方法。

首先介绍这 3 种经典的单视角聚类方法。

1) SSC<sup>[15]</sup>: 稀疏子空间聚类。从数据中寻求稀疏表示。

2) LRR<sup>[16]</sup>: 基于低秩表示的鲁棒子空间分割。利用核范数找到数据的低秩表示结构。

3) S3C<sup>[17]</sup>: 结构化稀疏子空间聚类。利用亲和度和分割度之间的依赖关系, 得到亲和矩阵和聚类结果。

对于以上 3 种单视角聚类方法, 只记录所有视角中的最佳聚类结果。接下来简要介绍多视角聚类方法。

1) RMSC<sup>[28]</sup>: 低秩和稀疏分解的鲁棒多视角谱聚类。它使用马尔可夫链对多视角低秩转移概率矩阵进行聚类。

2) DiMSC<sup>[8]</sup>: 多样性诱导的多视角子空间聚类。引入 HSIC 来增强不同视角之间的多样性。

<sup>1)</sup> <http://cvc.yale.edu/projects/yalefaces/yalefaces.html>

<sup>2)</sup> <http://mlg.ucd.ie/datasets/3sources.html>

<sup>3)</sup> <http://cvc.yale.edu/projects/yalefacesB/yalefacesB.html>

<sup>4)</sup> <http://www.vision.caltech.edu/ImageDatasets/Caltech101>

3) LMSC<sup>[19]</sup>: 潜在多视角子空间聚类。从多个角度探索潜在的一致信息。

4) CSMSC<sup>[20]</sup>: 一致和特定的多视角子空间聚类。分别利用核范数和  $L_2$  范数约束一致性表示和特定表示, 挖掘多视角数据的一致性和互补性。

5) DSS-MSM<sup>[29]</sup>: 对偶共享特定的多视角子空间聚类。通过对偶学习框架学习共享的特定信息。

6) BWSC<sup>[30]</sup>: 基于混合粒子群优化的双层加权多视图聚类。使用裸粒子群优化来搜索聚类质心。

7) TM2vC<sup>[31]</sup>: 基于 Schatten-p 范数的张量多线性多视图聚类。使用三阶张量来捕捉多元数据之间的高阶关系, 并使用加权 Schatten-p 范数来区分不同的奇异值。

### 4.3 评价准则

为了验证算法的有效性, 采用归一化互信息 (Normalized Mutual Information, NMI)、正确率 (Accuracy, ACC)、调整兰德指数 (Adjusted Rand index, AR) 和 F 分数 (F-score) 这 4 个指标进行综合评价。这些评价指标的值越大, 代表模型的聚类结果越好。

使用 NMI 评估聚类结果与真实数据标签的一致性。用变量  $U$  和  $V$  分别表示聚类结果和真实标签, 则 NMI 定义为:

$$NMI(U, V) = \frac{2 \times I(U, V)}{H(U) + H(V)}$$

其中,  $H(U)$  和  $H(V)$  分别是变量  $U$  和  $V$  的熵,  $I(U, V)$  是变量  $U$  和  $V$  之间的互信息。NMI 的取值范围为 0~1。

使用 ACC 评估样本被正确分类的准确度, 定义为:

$$ACC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{g}_i, \text{map}(\mathbf{c}_i))$$

其中,  $n$  是样本总数;  $\mathbf{g}_i$  和  $\mathbf{c}_i$  分别代表实际的样本标签和聚类的样本标签;  $\delta(\cdot)$  是一个判别函数。map 是一个映射函数, 将聚类之后得到的标签映射到实际标签空间中。如果  $\mathbf{g}_i = \text{map}(\mathbf{c}_i)$ , 则值为 1, 否则为 0。ACC 的取值范围为 0~1。

ARI 来自于兰德指数 RI。用变量  $U$  和  $V$  分别表示聚类结果和真实标签;  $a$  表示在  $U$  和  $V$  中都是同类别的元素对数;  $b$  表示在  $U$  和  $V$  中都是不同类别的元素的个数,  $n$  表示样本个数;  $C_n^2$  是组合数, 表示从样本中不重复取两个样本的总对数。RI 表示为:

$$RI = \frac{a+b}{C_n^2}$$

根据 RI, AR 评估样本对是否被正确分类到同一类别, 定义为:

$$AR = \frac{RI - E(RI)}{\max(RI) - E(RI)}$$

AR 的取值范围为 -1~1。

F-score 来自于精确率 (Precision, P) 和召回率 (Recall, R)。P 表示在聚类结果中样本符合真实标签的概率, R 表示在真实标签中样本符合聚类结果的概率。根据 P 和 R, F-score 定义为:

$$F_\alpha = (1 + \alpha^2) \frac{P+R}{\alpha^2 * P + R}$$

本文中使用的  $F_1$ -score, 取值范围为 0~1。

在 CBDE-MSM 中, 有 3 个参数来平衡目标函数。  $\lambda_c, \lambda_D, \lambda_G$  分别用于调整一致性约束项、特定视角光滑项和限定性约束项。对于参数的调整, 首先采用网格搜索策略在 {0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10} 范围内选择参数, 然后通过实验结果缩小参数范围并继续该策略, 最后手动微调参数获得最佳性能。在比较算法的过程中, 使用相应论文的结果或根据经验调整参数达到最优结果。将 CBDE-MSM 和被比较算法运行 30 次, 然后记录这 30 次结果的平均值。本文的实验环境为 Microsoft Windows 11, 处理器为 AMD R5-5600H, 内存容量 16GB, 所有算法采用 MATLAB R2018b 编程实现。

### 4.4 聚类结果分析

使用 4 个评价指标将实验结果与所选择的聚类算法的结果进行比较。表 1~表 4 记录了 4 个数据集上的聚类性能, 其中加粗的值代表最佳结果。

表 1 不同算法在 Yale 数据集的聚类结果

Table 1 Clustering results of different algorithms on Yale

Method	NMI	ACC	AR	F-score
SSC best	0.711	0.673	0.477	0.511
LRR best	0.722	0.706	0.540	0.569
S3C best	0.716	0.679	0.492	0.525
RMSC	0.684	0.642	0.485	0.517
DiMSC	0.727	0.709	0.535	0.564
LMSC	0.754	0.768	0.659	0.649
CSMSC	0.784	0.752	0.615	0.640
DSS-MSM	0.779	0.782	0.601	0.613
BWSC	0.672	0.676	0.519	0.521
TM2vC	<b>0.790</b>	0.787	<b>0.661</b>	0.650
Ours	0.782	<b>0.789</b>	0.650	<b>0.652</b>

表 2 不同算法在 YaleB 数据集的聚类结果

Table 2 Clustering results of different algorithms on YaleB

Method	NMI	ACC	AR	F-score
SSC best	0.534	0.587	0.430	0.487
LRR best	0.625	0.615	0.451	0.508
S3C best	0.542	0.391	0.415	0.492
RMSC	0.157	0.210	0.060	0.155
DiMSC	0.635	0.615	0.453	0.504
LMSC	0.715	0.736	0.578	0.618
CSMSC	0.629	0.615	0.441	0.500
DSS-MSM	0.526	0.527	0.259	0.345
BWSC	0.612	0.632	0.474	0.513
TM2vC	<b>0.732</b>	0.733	0.577	0.617
Ours	0.717	<b>0.742</b>	<b>0.586</b>	<b>0.622</b>

表 3 不同算法在 3Sources 数据集的聚类结果

Table 3 Clustering results of different algorithms on 3Sources

Method	NMI	ACC	AR	F-score
SSC best	0.471	0.550	0.328	0.481
LRR best	0.531	0.562	0.463	0.583
S3C best	0.618	0.669	0.508	0.620
RMSC	0.521	0.564	0.331	0.531
DiMSC	0.728	0.792	0.669	0.750
LMSC	0.676	0.734	0.579	0.669
CSMSC	0.723	0.793	0.662	0.742
DSS-MSM	0.648	0.733	0.631	0.719
BWSC	0.622	0.620	0.597	0.653
TM2vC	0.728	0.788	0.705	0.764
Ours	<b>0.735</b>	<b>0.797</b>	<b>0.712</b>	<b>0.777</b>

表4 不同算法在 Caltech101-20 数据集的聚类结果

Table 4 Clustering results of different algorithms on Caltech101-20

Method	NMI	ACC	AR	F-score
SSC best	0.592	0.530	0.424	0.490
LRR best	0.602	0.487	0.382	0.449
S3C best	0.544	0.466	0.374	0.417
RMSC	0.580	0.412	0.300	0.357
DiMSC	0.557	0.381	0.279	0.338
LMSC	0.651	0.457	0.328	0.386
CSMSC	0.663	0.458	0.345	0.401
DSS-MSC	0.676	0.563	0.464	0.521
BWSC	0.578	0.461	0.364	0.423
TM2vC	0.685	0.569	0.472	0.528
Ours	<b>0.697</b>	<b>0.579</b>	<b>0.478</b>	<b>0.533</b>

由表1中的数据可以看出,在Yale数据集上,CBDE-MSC的结果与TM2vC的结果相当;与CSMSC相比,CBDE-MSC的NMI略低,但ACC,AR和F-score这3个指标比分别提升了0.037,0.035和0.012。表2的数据显示出在YaleB数据集上,CBDE-MSC与TM2vC各有优劣;相比于CSMSC,CBDE-MSC的NMI,ACC,AR和F-score分别提升了0.088,0.127,0.145和0.122。表3列出了CBDE-MSC和其他对比方法在3Sources数据集上的聚类结果。CBDE-MSC的结果略好于TM2vC;相比于CSMSC,CBDE-MSC的NMI,ACC,AR和F-score指标分别提升了0.012,0.004,0.05和0.035;与启发式方法BWSC相比,CBDE-MSC的NMI,ACC,AR和F-score分别提升了0.113,0.177,0.115和0.124。表4显示出在Caltech101-20这个数据集上,CBDE-MSC的聚类结果比TM2vC方法有优势;相比于TM2vC,CBDE-MSC的NMI,ACC,AR和F-score分别提升了0.012,0.010,0.006和0.005。

综合表1—表4,相比于单视角方法,多视角方法由于提取了多视角信息,极大地提高了聚类效果;同时考虑多视角数据的一致性和互补性的方法CSMSC和CBDE-MSC与其他方法的比较表明,保留多个视角的一致信息和互补信息,能够提高子空间学习中表示矩阵的聚类表现;与CSMSC相比,CBDE-MSC 4个指标的结果总体有较大提升。这表明块对角正则项的引入和系数矩阵的近似块对角能够更好地发掘表示矩阵的块对角结构,使表示矩阵更自然地与聚类类别相对应;额外添加的限制性约束也提高了特定项的差异性,从而提高了算法的聚类效果。

除了测试不同算法在不同数据集上的聚类结果之外,还研究了多视角数据的视角数目与聚类结果之间的关系。由于单视角情况下,限制性约束不合理,因此只对不同视角的组合进行了对比实验。以3Sources数据集为例,4种组合的结果如表5所列。可以看到,不同视角的组合的聚类结果均不及3个视角整体的聚类结果,这反映了多视角数据集的互补性,每个视角提供必要的信息,不同的视角相互补充,从多个视角获取数据能够得到更好的聚类结果。

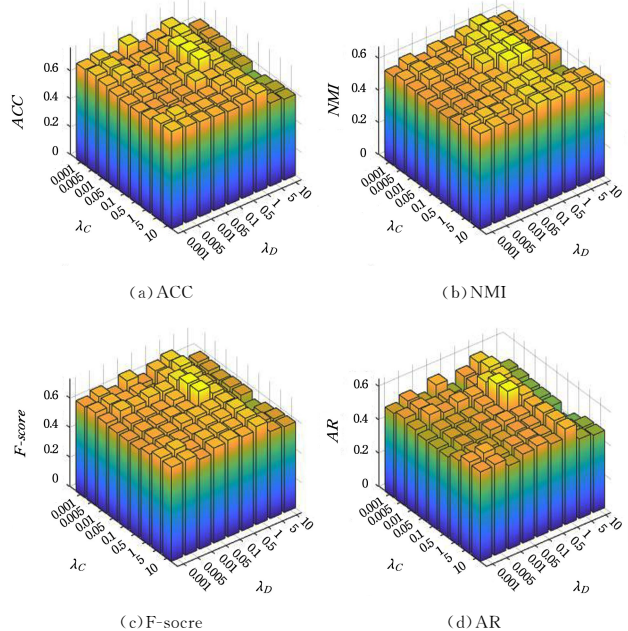
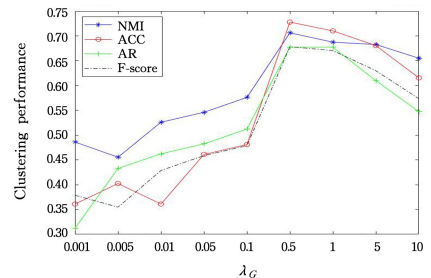
表5 在3Sources数据集上比较多视角聚类的性能

Table 5 Multiple views clustering results on 3Sources

View	NMI	ACC	AR	F-score
View1+View2	0.556	0.673	0.513	0.630
View2+View3	0.531	0.608	0.431	0.568
View1+View3	0.631	0.707	0.535	0.636
All Views	0.735	0.797	0.712	0.777

## 4.5 灵敏度分析

在3Sources数据集上记录了不同参数的运行结果,每个结果为算法运行30次结果的平均值,图6和图7分析了3个参数对聚类性能的影响。给定 $\lambda_C$ , $\lambda_D$ 和 $\lambda_G$ 的调整范围为 $\{0.001,0.005,0.01,0.05,0.1,0.5,1,5,10\}$ 。在图6中,固定 $\lambda_G=3$ ,记录 $\lambda_C$ 和 $\lambda_D$ 的变化对聚类结果的影响。对于参数 $\lambda_D$ ,较小或较大的参数值都不会带来较好的结果,当 $\lambda_D$ 处于0.5左右时结果较好。当 $\lambda_D=0.5$ ,参数 $\lambda_C$ 在0.01~0.1范围时,聚类结果达到了峰值。无论是固定参数 $\lambda_C$ 还是参数 $\lambda_D$ ,聚类结果都有比较大的浮动,这表示对于多视角聚类,挖掘多视角数据中的一致信息和互补信息都是非常重要的。在图7中,固定 $\lambda_C=0.07$ 和 $\lambda_D=0.5$ ,记录 $\lambda_G$ 的变化对聚类结果的影响。可以看到, $\lambda_G$ 在0.5附近时,聚类结果最好。在缩小3个参数的范围后,继续在此范围内做同样的实验,最后得到最好结果。

图6 不同 $\lambda_C$ 和 $\lambda_D$ 在3Sources数据集上的聚类性能Fig. 6 Clustering performance of different  $\lambda_C$  and  $\lambda_D$  on 3Sources dataset图7 不同 $\lambda_G$ 在3Sources数据集上的聚类性能Fig. 7 Clustering performance of different  $\lambda_G$  on 3Sources dataset

## 4.6 消融分析

为了评估CBDE-MSC中各个约束对聚类结果的影响,依次移除其中的一个参数。 $\lambda_C$ , $\lambda_D$ , $\lambda_G$ 分别是块对角约束项、光滑项和限制性约束项。实验记录在去除每个参数后聚类结果

的变化情况,确定这些约束是否能够提升聚类效果。在3Sources数据集上进行消融实验的结果如表6所列。

表6 在3Sources数据集上的消融实验结果

Table 6 Ablation experiment result on 3Sources dataset

Parameters	NMI	ACC	AR	F-score
$\lambda_C, \lambda_D$	0.680	0.753	0.668	0.745
$\lambda_C, \lambda_G$	0.632	0.758	0.576	0.675
$\lambda_D, \lambda_G$	0.560	0.707	0.519	0.623
All parameters	0.735	0.797	0.712	0.777

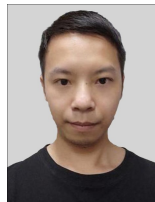
表6结果显示出缺失了 $\lambda_C$ ,聚类结果下降明显,这表示应该充分挖掘多视角数据的一致信息,而且块对角约束的添加极大地改善了聚类结果。如果缺少了 $\lambda_D$ 所在的光滑项,结果也有所下降,说明光滑项在目标函数中也是起作用的。限定性约束的引入,也能比较好地提升聚类结果,这表示挖掘互补信息是有效的,同时限定性约束能够使得各视角互补。

**结束语** 为了使表示矩阵直接服从块对角结构,本文提出了CBDE-MSc算法。将子空间表示矩阵分解为一致自表示矩阵和特定自表示矩阵,探索数据的一致性和互补性;通过块对角约束使一致自表示矩阵具有近似的块对角结构;在视角特定自表示矩阵上施加限定性约束和矩阵F范数约束,挖掘不同视角之间的共享信息并且防止过拟合。在表示矩阵的求解优化过程中,采用交替方向乘法(ADMM)优化目标函数。与3种单视角方法和7种多视角方法的比较实验,验证了该算法的有效性。

## 参考文献

- [1] TAN X, TRIGGS B. Fusing Gabor and LBP feature sets for kernel-based face recognition [C] // International Workshop on Analysis and Modeling of Faces and Gestures, Berlin: Springer, 2007:235-249.
- [2] WANG X, HAN T X, YAN S. An HOP-LBP human detector with partial occlusion handling [C] // 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision, IEEE, 2009:32-39.
- [3] KUMAR A, DAUMÉ H. A co-training approach for multi-view spectral clustering [C] // Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning, Madison, WI: Omnipress, 2011:393-400.
- [4] YU S, KRISHNAPURAM B, ROSALES R, et al. Bayesian co-training [J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12(3):2649-2680.
- [5] WANG W, ZHOU Z H. A new analysis of co-training [C] // Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning, Madison, WI: Omnipress, 2010:2-3.
- [6] GÖNEN M, ALPAYDIN E. Multiple kernel learning algorithms [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2011, 12(4):2211-2268.
- [7] KANG Z, SHI G, HUANG S D, et al. Multi-graph fusion for multi-view spectral clustering [J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 189(2):105102.
- [8] CAO X C, ZHANG C Q, FU H Z, et al. Diversity-induced multi-view subspace clustering [C] // Proceedings of the 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2015:586-594.
- [9] NG A Y, JORDAN M I, WEISS Y. On spectral clustering: analysis and an algorithm [C] // Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems, Cambridge: MIT Press, 2002:849-856.
- [10] LIU G C, YAN S C. Latent low-Rank representation for subspace segmentation and feature extraction [C] // 2011 IEEE 13th International Conference on Computer Vision, IEEE, 2011:1615-1622.
- [11] LIU G C, LIN Z C, YU Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation [C] // Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning, Haifa: OMNI Press, 2010:663-670.
- [12] XIA G Y, SUN H J, FENG L, et al. Human motion segmentation via robust kernel sparse subspace clustering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(1):135-105.
- [13] JI P, ZHONG Y R, LI H D, et al. Null space clustering with applications to motion segmentation and face clustering [C] // Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Image Processing, Piscataway: IEEE, 2014:283-287.
- [14] MA Y, DERKSEN H, HONG W, et al. Segmentation of multivariate mixed data via lossy data coding and compression [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(9):1546-1562.
- [15] ELHAMIFAR E, VIDAL R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(11):2765-2781.
- [16] LIU G C, LIN Z C, YAN S C, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1):171-184.
- [17] LI C G, VIDAL R. Structured sparse subspace clustering: a unified optimization framework [C] // Proceedings of the 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Piscataway: IEEE, 2015:277-286.
- [18] LU C Y, FENG J S, LIN Z C, et al. Subspace clustering by block diagonal representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41(2):287-501.
- [19] ZHANG C Q, HU Q H, FU H Z, et al. Latent multi-view subspace clustering [C] // Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Piscataway: IEEE, 2017:4279-4287.
- [20] LUO S R, ZHANG C Q, ZHANG W, et al. Consistent and specific multi-view subspace clustering [C] // Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence, Menlo Park, CA: AAAI Press, 2018:3730-3737.
- [21] WANG X, GUO X, LEI Z, et al. Exclusivity-consistency regularized multi-view subspace clustering [C] // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Piscataway: IEEE, 2017:923-931.
- [22] HAN T H, NIU S J, GAO X Z, et al. Deep low-rank graph convolutional subspace clustering for hyperspectral image [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60:1-13.

- [23] LI S, LIU L, LIU J, et al. SC-GAN: Subspace clustering based GAN for automatic expression manipulation[J]. *Pattern Recognition*, 2023, 134: 109072.
- [24] YANG X J, YAN J C, CHENG Y, et al. Learning Deep Generative Clustering via Mutual Information Maximization[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(9): 6263-6275.
- [25] LV J C, KANG Z, LU X, et al. Pseudo-supervised deep subspace clustering[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2021, 30: 5252-5263.
- [26] Convex optimization & Euclidean distance geometry[EB/OL]. <https://www.convexoptimization.com/TOOLS/0976401304.pdf>.
- [27] SI X M, YIN Q Y, ZHAO X J, et al. Consistent and diverse multi-View subspace clustering with structure constraint[J]. *Pattern Recognition*, 2022, 121: 108196.
- [28] XIA R K, PAN Y, DU L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition[C]// *Proceedings of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Palo Alto, CA: AAAI, 2014: 2149-2155.
- [29] ZHOU T, ZHANG C Q, PENG X, et al. Dual shared-specific multi-view subspace clustering [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3517-3530.
- [30] JIANG B, QIU F Y, WANG L P, et al. Bi-level weighted multi-view clustering via hybrid particle swarm optimization [J]. *Information Processing & Management*, 2016, 52(3): 387-398.
- [31] LIU W Z, JIANG L, LIU D, et al. Tensorial Multi-Linear Multi-View Clustering via Schatten-p Norm[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 11132-11142.



**WU Jie**, born in 1999, postgraduate. His main research interests include machine learning and pattern recognition.



**WAN Yuan**, born in 1976, Ph.D, professor. Her main research interests include data mining, pattern recognition, manifold learning, and machine learning.

(责任编辑:柯颖)