计算机科学
COMPUTER SCIENCE

复杂网络下的概念认知学习与增量学习

秦海棋, 米据生

引用本文

秦海棋, 米据生. 复杂网络下的概念认知学习与增量学习[J]. 计算机科学, 2026, 53(4): 208-214.

QIN Haiqi, MI Jusheng. Concept-cognitive Learning and Incremental Learning in Complex Networks [J]. Computer Science, 2026, 53(4): 208-214.

---

http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.250600216

复杂网络下的概念认知学习与增量学习

秦海棋　　米据生
河北师范大学数学科学学院　石家庄 050024
河北省计算数学与应用重点实验室　石家庄 050024
(chinaqhq@163.com)

摘　要　数据分析中,从网络中进行概念认知学习是网络背景下的机器学习或人工智能领域的重要问题。将认知算子应用于复杂网络,提出了网络认知概念,通过邻接矩阵和节点度来量化网络特征。进而讨论了动态权重网络的概念,分析了节点连接强度随时间变化的情况,并提出了动态权重网络认知概念的定义。此外,还给出了面向对象、属性和混合更新的增量计算机制,以应对网络节点的动态扩展、边属性的演化以及复合更新等场景。在动态权重网络中,提出了一种局部更新的方法,即通过滑动窗口机制和触发式更新两种方法高效处理边权值的变化,以减轻计算负担并提高效率。总体而言,通过引入认知算子和动态权重网络的概念,提供了一种分析和更新复杂网络中节点影响力的新方法。

关键词:概念认知学习;复杂网络;增量学习;粒计算;动态网络
中图分类号　TP181

Concept-cognitive Learning and Incremental Learning in Complex Networks

QIN Haiqi and MI Jusheng
School of Mathematics Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China
Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang 050024, China

Abstract　In data analysis, concept-cognitive learning in networks is an important issue in the field of machine learning and artificial intelligence applied to network contexts. This paper applies the cognitive operator to complex networks, proposes the concept of network cognition, and quantifies network characteristics through the adjacency matrix and node degrees. This paper also discusses the concept of dynamic weighted networks, analyzes the situation where the connection strength of nodes changes over time, and proposes the definition of dynamic weighted network cognition. In addition, this paper proposes an incremental computation mechanism for object-oriented, attribute-oriented, and hybrid updates to cope with scenarios such as dynamic expansion of network nodes, evolution of edge attributes, and composite updates. In dynamic weighted networks, the paper proposes a method for local updates, which efficiently handles changes of edge weights through a sliding window mechanism and a trigger-based update method, reducing the computational burden and improving efficiency. Overall, by introducing the concepts of cognitive operators and dynamic weighted networks, this paper provides a new method for analyzing and updating the influence of nodes in complex networks.

Keywords　Concept-cognitive learning, Complex network, Incremental learning, Granular computing, Dynamic network

随着信息技术的快速发展,复杂网络已成为描述社会关系、生物系统、交通物流、信息传播等现实场景的重要建模工具。社交网络中的用户交互、城市交通中的动态流量、生物分子间的相互作用等,均可抽象为节点与边构成的网络结构。在这些网络中,节点的影响力分析是核心问题之一,直接关系到关键用户识别、交通瓶颈预测、疾病传播控制等实际应用。传统网络分析方法大部分基于静态拓扑结构,很难适应节点动态扩展、边属性演化以及连接强度实时变化等复杂场景。特别是在大数据环境下,网络规模呈指数级增长,动态性特征愈发显著,这对节点影响力分析的实时性和准确性提出了更高要求。

概念认知学习是一个新兴的交叉研究领域,它由形式概念分析、粒计算、认知计算等理论融合而来。Zhang 等[1]提出的基于粒计算的概念认知模型,使研究认知模型和概念学习更加方便快捷。Yao[2]从认知信息学和粒计算的角度出发,给出了概念学习的框架,并指出基于知识发现的概念学习系

到稿日期:2025-06-28　返修日期:2025-09-15
基金项目:国家自然科学基金(62476078);河北省自然科学基金重点项目(F2023205006)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (62476078) and Key Project of Natural Science Foundation of Hebei Province, China(F2023205006).
通信作者:米据生(mijsh@263.net)

统的研究应包括 3 个方面，即哲学层面、计算层面，以及应用层面。概念认知学习的基本思想是，通过特定的认知模型从给定的线索中学习概念，并揭示人脑中概念学习的系统性定律。在这种思想影响下，出现了一些认知概念学习模型和方法。Ding 等[3]提出了一个区间意图模糊概念再认知学习模型。Li 等[4]从认知观点出发，提出了粒概念学习模型。Guo 等[5]给出了用于概念建模和动态知识学习的模糊三支粒概念认知学习。Mi 等[6]解决了 CCL 算法不能直接处理连续数据和概念聚类方法主要关注属性信息而忽略了对象信息这两个问题。Hu 等[7]提出了区间值形式背景，并系统地研究了区间值概念学习的机制。Shivhare 等[8]引入了一种用于认知记忆功能的三支概念方法。Stumme[9]提出的 In-Close 算法，首次实现了概念格的增量维护。Saramäki 团队[10]通过事件触发机制，优化社区发现的局部更新效率。Xu 等[11]提出了一种用于动态数据更新的新型概念认知学习机制。Li 等[12]提出了一个可以将过去的经验整合到自身中以提高概念学习的灵活性的认知计算系统。

近年来，一些学者将概念认知学习与其他理论分别与复杂网络相结合，做了许多有意义的工作。如 Barabási 等[13]提出的无标度网络模型（BA 模型）揭示了网络增长的优先连接规律；而 Leskovec 等[14]构建的时序图模型（Temporal Graph）首次记录了节点交互的时间戳信息。针对节点影响力分析，Qiu 团队[15]提出带衰减因子的动态中心性指标，通过指数函数刻画历史影响的衰减过程。Lebon 等[16]证明当时间网络的图结构在每个时间段中保持不变，而（非零）边权重变化时，那么时间网络几乎总是完全可控的；同时，还提供了实现可控性所需时间段数量的上限。Caligiuri 等[17]引入了时态网络动力不稳定性的概念，并构造了一个测度来估计时态网络轨迹的网络最大李亚普诺夫指数。Yan 等[18]通过网络形式背景定义了全局网络 OE-概念与局部网络 OE-概念，随后研究了基于网络概念的知识发现，并进一步讨论了概念的动态更新。Liu 等[19]研究了模糊网络形式背景下的概念认知学习，提出了 3 种模糊网络弱化概念与 2 种属性约简方法，以保持概念格同构，并保持粒概念的外延集不变。

概念认知学习作为一种融合粒计算与形式概念分析的理论框架，为复杂网络的知识发现提供了新思路。其通过构建对象与属性之间的认知算子，形成层次化的概念结构，能够有效揭示数据内在的语义关联。已有研究尽管在概念认知与复杂网络分析领域取得了显著进展，但仍存在以下关键问题。

1）传统概念认知模型（如形式概念分析）主要处理静态对象与属性间的关系，其构建的概念格难以直接反映网络拓扑特征，且现有的方法通常将邻接矩阵视为普通属性进行处理，忽略了节点间的连接强度、路径依赖等网络特有属性。例如，社交网络中用户的影响力不仅取决于个人属性，更与其连接密度和社区结构密切相关，而现有模型缺乏对此类网络特征的显式建模能力。

2）面对网络节点扩展、边属性演化等动态场景，现有概念认知系统多采用全局重构策略。当网络规模达到百万节点级别时，其计算复杂度呈指数级增长。例如，在在线社交网络分析中，每日新增用户可达数万量级，传统方法重新计算全网概念格将十分消耗时间。

3）现有工作往往分开处理网络的结构属性（如节点度、中心性）与内涵属性（如用户标签、内容特征）。例如，在学术合作网络中，学者影响力既取决于合作网络中的中心位置，也与其研究领域的交叉性密切相关。当前方法缺乏同时考虑结构属性与内涵属性的数学模型，分析结果存在片面性。

针对上述挑战，本文提出融合认知算子与动态权重网络的增量学习框架，主要创新体现在以下 3 个方面。

1）节点度计算公式同时考虑连接强度与共有属性，实现结构属性与内涵属性的协同分析。由此构建的网络认知概念格可以同时分析网络节点的结构影响力与内涵影响力。

2）针对边权值随时间变化的特点，建立具有衰减机制的动态节点度模型。衰减系数用来控制历史权重的时效衰减速率，其值越大，则近期互动对当前影响力的贡献越显著。该模型通过指数衰减函数实现历史数据的自适应加权，既保留了长期演化趋势，又突出了近期行为的重要性。同时，设计了滑动窗口机制与触发式更新策略，前者通过固定时间窗聚合渐变式变化，后者在权值突变超过阈值时触发局部更新，兼顾计算效率与突发事件响应能力。

3）提出面向新增对象、新增属性及同时更新的统一增量框架。当新增节点或属性时，通过认知算子的扩展，实现概念格的局部更新而非全局重构。此外，建立粒概念集合的缓存机制，通过重用历史计算单元进一步优化性能。

本文的创新方法为复杂网络分析提供了新的理论工具：在网络认知层面，实现了拓扑结构特征与内涵属性的统一建模；在动态处理层面，提出带时效衰减的权重融合机制；在计算效率层面，设计复合增量更新框架。这些突破为社交网络分析、智能交通调度、生物网络挖掘等应用场景提供了更精准、更高效的解决方案，推动概念认知学习向动态化、网络化方向演进。未来研究可进一步探索异构网络中的多模态认知算子设计，以及分布式环境下的并行增量计算架构。

1 基于粒计算的认知概念格

首先介绍基于粒计算的认知概念格的相关知识，详细内容可参考文献[12]。

定义 1 设 U 是对象集，A 是属性集，U 和 A 的幂集分别表示为 2^U 和 2^A。两个集值映射 $L:2^U \to 2^A$ 和 $H:2^A \to 2^U$ 若满足对于任意 $X_1, X_2 \subseteq U$ 和 $B \subseteq A$：

1）$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow L(X_2) \subseteq L(X_1)$

2）$L(X_1 \cup X_2) \supseteq L(X_1) \cap L(X_2)$

3）$H(B)=\{x \in U \mid B \subseteq L(\{x\})\}$

则称 L 和 H 为概念形成的认知算子（简称认知算子）。

性质 1 设 L 和 H 是认知算子。对任意 $X \subseteq U$ 和 $B \subseteq A$，有：

$$L(X)=\bigcap_{x \in X} L(x)$$

$$H(B)=\bigcap_{a \in B} H(a)$$

性质 2 设 L 和 H 是认知算子。对任意 $X \subseteq U$ 和 $B \subseteq A$，有：

$$X \subseteq HL(X)$$

$$B \subseteq LH(B)$$

定义 2 设 L 和 H 是认知算子。对于 $X\subseteq U$ 和 $B\subseteq A$，若 $L(X)=B$ 且 $H(B)=X$，则称序对 (X,B) 是认知算子 L 和 H 下的概念(简称认知概念)，X 和 B 分别是认知概念 (X,B) 的外延和内涵。

在概念之间建立泛化和特化关系。具体地，对于认知算子 L 和 H 的两个认知概念 (X_1,B_1) 和 (X_2,B_2)，如果 $X_1\subseteq X_2$，那么称 (X_1,B_1) 是 (X_2,B_2) 的子概念，或称 (X_2,B_2) 是 (X_1,B_1) 的父概念，记为 $(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)$。所有的认知概念和偏序关系 $\leqslant$ 组成的集合构成一个完备格，称为认知概念格，记为 $\mathcal{B}(U,A,L,H)$。认知概念集 $\{(X_s,B_s)\mid s\in S\}$ (S 是指标集) 的下确界 ($\wedge$) 和上确界 ($\vee$) 分别定义为：

$$\bigwedge_{s\in S}(X_s,B_s)=\left(\bigcap_{s\in S}X_s, LH\left(\bigcap_{s\in S}B_s\right)\right)$$

$$\bigvee_{s\in S}(X_s,B_s)=\left(HL\left(\bigcap_{s\in S}X_s\right),\bigcap_{s\in S}B_s\right)$$

定义 3 设 L 和 H 是认知算子。称 $L^{G}=\{\{x\}\mapsto L(x)\mid x\in U\}$ 和 $H^{G}=\{\{a\}\mapsto H(a)\mid a\in A\}$ 分别为 L 和 H 的信息粒；且信息粒 L^{G} 和 H^{G} 可分别形成算子 $L:P(U)\rightarrow P(U)$，$L(X)=\bigcap_{x\in X}L^{G}(x)$，以及 $H:P(A)\rightarrow P(A)$，$H(B)=\bigcap_{a\in B}H^{G}(a)$。

性质 3 设 L 和 H 是认知算子。对任意 $X\subseteq U$ 和 $B\subseteq A$，则 $(HL(X),L(X))$ 和 $(H(B),LH(B))$ 均为认知概念。

定义 4 设 L 和 H 是认知算子。对任意 $x\in U$ 和 $a\in A$，则 $(HL(x),L(x))$ 和 $(H(a),LH(a))$ 为粒概念。

性质 4 设 L 和 H 是认知算子，$\mathcal{B}(U,A,L,H)$ 是认知概念格，则对任意 $(X,B)\in\mathcal{B}(U,A,L,H)$，有：

$$(X,B)=\bigvee_{x\in X}(HL(x),L(x))=\bigwedge_{a\in B}(H(a),LH(a))$$

2 复杂网络

在概念认知系统中，之前的研究讨论了对象与属性之间的对应关系，但随着网络大数据时代的到来，对象与对象之间的关系也同样值得考虑。复杂网络分析的相关研究是从图论出发，以邻接矩阵与关联矩阵作为描述网络结构的数据基础。下面主要介绍复杂网络的相关知识。

定义 5 将复杂网络抽象成二元组 $N(U,E)$[20]，其中 U 为节点集，E 为边集，$e=\{p,q\}$ 表示节点 x_p 和 x_q 之间的边，$e\in E$。通过选择网络中的一部分节点及其之间的连接边所形成的子集被称为子网络，记为 $N'(X,E')$，其中 $X\subseteq U$，$E'\subseteq E$ (E' 为 X 节点间的边)。

将网络图的邻接矩阵记为 $\boldsymbol{M}=[m_{pq}]_{n\times n}$，$m_{pq}\in\{0,1\}$，其中 m_{pq} 表示节点 x_p 和 x_q 之间的关系，$m_{pq}=1$ 表示 x_p 和 x_q 之间存在一条边使其直接相连，$m_{pq}=0$ 表示 x_p 和 x_q 之间不存在一条直接相连的边，另外 $m_{pp}=0$。

定义 6 令 U 是对象集，A 是属性集，$x\in X$，$a\in B$。对于一个节点集 $X(X\subseteq U)$，节点 x_p 相对于 X 的度[20] (影响力) 定义为：

$$K_p=\sum_{x_q\in X}\left(m_{pq}+\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk}\right)$$

其中，a_{pqk} 表示节点 x_p 和 x_q 在属性 a_k 上的共现性，当对象 x_p 和 x_q 共同拥有属性 a_k 时，a_{pqk} 取值为 1，否则 a_{pqk} 取 0；$|A|$ 表示所有属性的个数。

在定义式中，$\sum_{x_q\in X}m_{pq}$ 表示子网络的结构影响力，体现了子网络的拓扑结构特征；$\sum_{x_q\in X}\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk}$ 表示子网络的内涵影响力，体现了其内涵属性。节点的度数越高，节点在网络中的重要性越大。网络的特征可以通过网络节点度进行数量化定义。

定义 7 节点集 $X(X\subseteq U)$ 的网络平均度 K_X[20] 与网络中心度 C_{D_X}[20] 为：

$$K_X=\frac{\sum_{x_p\in X}K_p}{(|X|-1)(|L|+1)}$$

$$C_{D_X}=\frac{\sum_{x_p\in X}(K_{p_{\max}}-K_p)}{(|X|-1)(|L|+1)}$$

其中，K_X 表示节点集 X 中节点的平均影响力，C_{D_X} 表示节点集 X 中的节点之间的影响力的差异，$K_{p_{\max}}$ 表示节点集 X 中最大的节点度，$|L|$ 表示节点集 X 中节点所具有的属性的个数。

传统邻接矩阵多为静态二值矩阵，反映了网络中节点的连接情况，且只有连接与不连接两种情况。但两个节点间有时不是简单的连接与不连接的关系，它有可能是一种动态变化的正实数值，这个实数值的大小反映了两个节点间的连接强度(如两个交通枢纽之间的交通流量，它是随时间在时刻变化的)。

将邻接矩阵 $\boldsymbol{M}=[m_{pq}]_{n\times n}$ 中的元素从 $m_{pq}\in\{0,1\}$ 扩展为 $m_{pq}(t)\in\mathbb{R}^{+}$，表示时刻 t 下节点 x_p 和 x_q 的连接强度，$m_{pq}(t)$ 的数值越大，则连接强度越大。邻接矩阵 $\boldsymbol{M}(t)=[m_{pq}(t)]_{n\times n}$，$t\in\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_T\}$。

因为近期互动比早期行为更能反映当前影响力(如过去 5 min的交通流量比 1 h 前的数据更具参考价值)，所以节点 x_p 在时间窗口 $[t_0,t_k]$ 内的结构影响力须结合权重衰减机制，内涵影响力须将节点间的连接强度与权重衰减机制结合在一起考虑。为此，给出如下定义。

定义 8 节点 x_p 在时间窗口 $[t_0,t_k]$ 内的度定义为：

$$\begin{aligned}K_p(t_k)&=\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}+\\&\quad\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}\sum_{k=1}^{|A|}(a_{pqk}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau})\\&=\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}\left(1+\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk}\right)\end{aligned}$$

其中，$\lambda(\lambda\in[0,1))$ 为衰减系数，控制历史权重的时效衰减速率，体现历史权重的时效性。

定义 9 在时刻 t 下，一个节点集 $X(X\subseteq U)$ 的动态权重网络平均度 $K_X(t_k)$ 与动态权重网络中心度 $C_{D_X}(t_k)$ 的定义为：

$$K_X(t_k)=\frac{\sum_{x_p\in X}K_p(t_k)}{(|X|-1)(|L|+1)}$$

$$C_{D_X}(t_k)=\frac{\sum_{x_p\in X}(K_{p_{\max}}(t_k)-K_p(t_k))}{(|X|-1)(|L|+1)}$$

其中，$K_X(t_k)$ 表示动态权重节点集 X 中节点的平均影响力，$C_{D_X}(t_k)$ 表示动态权重节点集 X 中的节点之间影响力的差异，$K_{p_{\max}}(t_k)$ 表示动态权重节点集 X 中最大的节点度，L 表示节点集 X 中节点所具有的属性的个数。

3 网络认知概念

本章将认知算子应用于复杂网络，提出网络认知概念。

令 U 是对象集，A 是属性集。认知算子 $L:2^U\to 2^A$ 和 $H:2^A\to 2^U$，$\boldsymbol{M}=(m_{pq})_{n\times n}$ 为邻接矩阵，对任意对象子集 $X\subseteq U$，X 的网络平均度为 K_X，X 的网络中心度为C_{D_X}。

定义 10 对于 $X\subseteq U$ 和 $B\subseteq A$，若 $L(X)=B$ 且 $H(B)=X$，则称序对 $(\{K_X,C_{D_X}\},X,B)$ 是认知算子 L 和 H 下的网络认知概念。简洁起见，将$\{K_X,C_{D_X}\}$ 缩写为 M_X，表示网络概念的网络特征参数。通过 M_X 获取网络中的影响力和影响力差异，X 和 B 分别是网络认知概念(M_X,X,B)的外延和内涵。

定义 11 在网络认知系统中，任取 $X\subseteq U,B\subseteq A$。

1)若 $H(L(X))=X$，则称$(M_X,X,L(X))$为对象强概念。若 $H(L(X))\supset X$，则称$(M_X,X,L(X))$为对象弱概念。

2)若 $L(H(B))=B$，则称$(M_{H(B)},H(B),B)$为属性强概念。若 $L(H(B))\supset B$，则称$(M_{H(B)},H(B),B)$为属性弱概念。

定义 12 网络概念之间也存在泛化和特化关系，具体地，设邻接矩阵为 $\boldsymbol{M}$，对于认知算子 L 和 H 的两个网络认知概念 (M_{X_1},X_1,B_1)和(M_{X_2},X_2,B_2)，如果 $X_1\subseteq X_2$，那么称(M_{X_1},X_1,B_1)是 (M_{X_2},X_2,B_2)的子概念，或称 (M_{X_2},X_2,B_2)是(M_{X_1},X_1,B_1) 的父概念，记为$(M_{X_1},X_1,B_1)\leqslant(M_{X_2},X_2,B_2)$。

所有的网络认知概念和偏序关系 $\leqslant$ 组成的集合构成一个完备格，称为网络认知概念格，记为$\mathcal{B}(U,M,A,L,H)$。认知概念集 $\{(M_t,X_t,B_t)\mid t\in T\}$($T$ 是指标集)的下确界($\wedge$)和上确界($\vee$)分别定义为：

$$\bigwedge_{t\in T}(M_t,X_t,B_t)=(M_t,\bigcap\nolimits_{t\in T}X_t,LH(\bigcap_{t\in T}B_t))$$
$$\bigvee_{t\in T}(M_t,X_t,B_t)=(M_t,HL(\bigcap_{t\in T}X_t),\bigcap_{t\in T}B_t)$$

基于上述定义，本节提出一种网络认知概念生成算法，如算法 1 所示。

算法 1 网络认知概念生成算法

输入：对象集 U，属性集 A，邻接矩阵 **M**

输出：网络认知概念集合 NC

1.由定义 1 构建认知算子 L 和 H；
2.由定义 2 利用认知算子 L 和 H 生成基础认知概念(X,B)；
3.由定义 6 对(X,B)中的每个节点计算节点度$\mathrm{K_p}$；
4.由定义 7 生成节点集 X 的网络平均度$\mathrm{K_X}$；
5.由定义 7 生成节点集 X 的网络中心度$\mathrm{C_{D_X}}$；
6.输出网络认知概念 $\mathrm{NC}=(\{\mathrm{K_X},\mathrm{C_{D_X}}\},\mathrm{X},\mathrm{B})$。

对算法 1 的时间复杂度进行分析，其中$|U|$代表对象数量，$|A|$代表属性的数量，$|X|$代表节点数量，C 为概念数量。步骤 1 的时间复杂度为 $O(|U||A|)$，步骤 2 的时间复杂度为 $O(|U|^2|A|)$，步骤 3 的时间复杂度为 $O(|X|^2)$，步骤 4 与步骤 5 的时间复杂度为 $O(|X|)$。因此，该算法的总体时间复杂度为 $O(|U|^2|A|+C|X|^2)$。

定义 13 令 U 是对象集，A 是属性集。认知算子 $L:2^U\to 2^A$ 和 $H:2^A\to 2^U$，$\boldsymbol{M}(t)=(m_{pq}(t))_{n\times n}$；$\boldsymbol{t}\in\{t_0,t_1,\cdots,t_T\}$ 为权重矩阵，用以表示时刻 t 下两个节点之间的连接强度。取任意节点集 $X\subseteq U$，X 的动态权重网络平均度为 $K_X(t)$，X 的动态权重网络中心度为 $C_{D_X}(t)$。

对于 $X\subseteq U$ 和 $B\subseteq A$，若 $L(X)=B$ 且 $H(B)=X$，则称序对 $(\{K_X(t),C_{D_X}(t)\},X,B)$ 是时刻 t 下认知算子 L 和 H 下的动态权重网络认知概念。简洁起见，将$\{K_X(t),C_{D_X}(t)\}$ 缩写为$M_X(t)$。通过 $M_X(t)$获取动态权重子网络的平均度和中心度，X 和 B 分别是动态权重网络认知概念$(M_X(t),X,B)$的外延和内涵。

算法 2 给出了动态权重网络认知概念生成算法的具体步骤。

算法 2 动态权重网络认知概念生成算法

输入：对象集 U，属性集 A，时刻$\mathrm{t_k}$，邻接矩阵 $\mathbf{M}(\mathrm{t_k})$

输出：动态权重网络认知概念集合 NC′

1.由定义 1 构建认知算子 L 和 H；
2.由定义 2 利用认知算子 L 和 H 生成基础认知概念(X,B)；
3.由定义 9 对(X,B)中的每个节点计算节点度 $\mathrm{K_p(t_k)}$；
4.由定义 10 生成节点集 X 在时刻$\mathrm{t_k}$下的网络平均度$\mathrm{K_X(t_k)}$；
5.由定义 10 生成节点集 X 在时刻$\mathrm{t_k}$下的网络中心度$\mathrm{C_{D_X}(t_k)}$；
6.输出动态权重网络认知概念 $\mathrm{NC'}=(\{\mathrm{K_X(t_k)},\mathrm{C_{D_X}(t_k)}\},\mathrm{X},\mathrm{B})$。

对算法 2 的时间复杂度进行分析，其中$|U|$代表对象数量，$|A|$代表属性的数量，$|X|$代表节点数量，C 代表概念数量，T 代表时间窗口数量。步骤 1 的时间复杂度为 $O(|U||A|)$，步骤 2 的时间复杂度为 $O(|U|^2|A|)$，步骤 3 的时间复杂度为 $O(T|X|^2)$，步骤 4 与步骤 5 的时间复杂度为 $O(|X|)$。因此，该算法的总体时间复杂度为 $O(|U|^2|A|+TC|X|^2)$。

算法通过动态权重网络构建认知概念，结合对象集、属性集与邻接矩阵，生成了具有动态特性的网络认知概念集合。其优势在于可以通过时刻t_k的邻接矩阵实时更新权重，还通过将网络拓扑特征与认知概念结合，增强了模型的可解释性。

4 动态权重网络概念认知系统的增量设计

4.1 网络概念认知系统的增量设计

在复杂网络且邻接矩阵为传统静态二值的情况下，研究在网络概念认知系统中增加对象或属性时，认知系统中概念的变化。

网络的邻接矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{pq})_{n\times m}$，$m_{pq}\in\{0,1\}$，设$U_{i-1}$，$U_i$为$\{U_t\}^\uparrow$ 的两个对象集，其中$\{U_t\}^\uparrow$ 表示非降对象集序列 $U_1,U_2,\cdots,U_n(U_1\subseteq U_2\subseteq\cdots\subseteq U_n)$，设$A_{i-1}$和$A_i$为$\{A_t\}^\uparrow$ 的两个属性集，其中$\{A_t\}^\uparrow$ 表示非降属性集序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n(A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n)$。记 $\Delta U_{i-1}=U_i-U_{i-1}$，$\triangle A_{i-1}=A_i-A_{i-1}$。

设认知算子：

1)$L_{i-1}:2^{U_{i-1}}\to 2^{A_{i-1}}$，$H_{i-1}:2^{A_{i-1}}\to 2^{U_{i-1}}$

2)$L_{\Delta U_{i-1}}:2^{\Delta U_{i-1}}\to 2^{A_{i-1}}$，$H_{\Delta U_{i-1}}:2^{A_{i-1}}\to 2^{\Delta U_{i-1}}$

3)$L_{\Delta A_{i-1}}:2^{U_{i-1}}\to 2^{\Delta A_{i-1}}$，$H_{\Delta A_{i-1}}:2^{\Delta A_{i-1}}\to 2^{U_i}$

4)$L_i:2^{U_i}\to 2^{A_i}$，$H_i:2^{A_i}\to 2^{U_i}$

它们的信息粒L^{G}_{i-1}，H^{G}_{i-1}，$L^{\mathrm{G}}_{\Delta U_{i-1}}$，$H^{\mathrm{G}}_{\Delta U_{i-1}}$，$L^{\mathrm{G}}_{\Delta A_{i-1}}$，$H^{\mathrm{G}}_{\Delta A_{i-1}}$，$L^{\mathrm{G}}_i$，$H^{\mathrm{G}}_i$满足下列性质：

$$L^{\mathrm{G}}_i(x)=\begin{cases}L^{\mathrm{G}}_{i-1}(x)\cup L^{\mathrm{G}}_{\Delta A_{i-1}}(x), & 若① \\ L^{\mathrm{G}}_{i-1}(x)\cap L^{\mathrm{G}}_{\Delta A_{i-1}}(x), & 若② \\ L^{\mathrm{G}}_{i-1}(x)\cap L^{\mathrm{G}}_{\Delta U_{i-1}}(x)\cup L^{\mathrm{G}}_{\Delta A_{i-1}}(x), & 若③\end{cases}$$

$$H_i^{\mathrm{G}}(x)=\begin{cases}H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a), & 若①\\ H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cup H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a), & 若②\\ H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)\cup H_{\Delta U_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a), & 若③\end{cases}$$

其中，① 为 $\Delta U_{i-1}=\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}\neq\varnothing$；② 为 $\Delta U_{i-1}\neq\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}=\varnothing$；③ 为 $\Delta U_{i-1}\neq\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}\neq\varnothing$。

当 $\Delta U_{i-1}=\varnothing$ 时，$L_{\Delta U_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x)$ 和 $H_{\Delta U_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)$ 为空；当 $\Delta A_{i-1}=\varnothing$ 时，$L_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x)$ 和 $H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)$ 为空。L_i 和 H_i 是 L_{i-1} 和 H_{i-1} 的扩展认知算子。对于每个认知状态，用 (X_i, B_i) 表示每个状态下的认知概念。

随着新信息 $L_{\Delta U_{i-1}}$，$H_{\Delta U_{i-1}}$，$L_{\Delta A_{i-1}}$ 和 $H_{\Delta A_{i-1}}$ 的输入，网络结构发生变化，即对象和属性信息更新，网络中增加节点，节点的边也会更新，则网络认知概念发生相应变化，此时在认知状态 i 下的网络认知概念为 $(\{K_{X_i}, C_{D_{X_i}}\}, X_i, B_i)=(M_{X_i}, X_i, B_i)$。

下列表述成立：

1）当 $\Delta U_{i-1}=\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}\neq\varnothing$ 时，$(X_i,B_i)=(H_iL_i(X), L_i(X))=(\bigcap_{a\in L_{i-1}^{\mathrm{G}}(x)\cap L_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x)}(H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta U_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)), L_{i-1}(X)\cap L_{\Delta U_{i-1}}(X))$，此时网络概念为 (M_{X_i}, X_i, B_i)；$(X_i, B_i)=(H_i(B), H_i(B))=(H_{i-1}(B)\cup H_{\Delta A_{i-1}}(B), \bigcap_{x\in H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)}(L_{i-1}^{\mathrm{G}}(x)\cap L_{\Delta U_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x)))$，此时网络概念为 (M_{X_i}, X_i, B_i)。

2）当 $\Delta U_{i-1}\neq\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}=\varnothing$ 时，$(X_i,B_i)=(H_iL_i(X), L_i(X))=(\bigcap_{a\in L_{i-1}^{\mathrm{G}}(x)\cup L_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x)}H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a), L_{i-1}(X)\cap L_{\Delta A_{i-1}}(X))$，此时网络概念为 (M_{X_i}, X_i, B_i)；$(X_i, B_i)=(H_i(a), L_iH_i(a))=(H_{i-1}(B)\cup H_{\Delta A_{i-1}}(B), \bigcap_{x\in H_{i-1}^{\mathrm{G}}(a)\cap H_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(a)}L_{i-1}^{\mathrm{G}}(x)\cup L_{\Delta A_{i-1}}^{\mathrm{G}}(x))$，此时网络概念为 (M_{X_i}, X_i, B_i)。

其中：

$$M_{X_i}=\{K_{X_i}, C_{D_{X_i}}\}$$

$$K_{X_i}=\frac{\sum_{x_p\in U_i}K_{pi}}{(|X_i|-1)(|L_i|+1)}$$

$$C_{D_{X_i}}=\frac{\sum_{x_p\in U_i}(K_{pi_{\max}}-K_{pi})}{(|X_i|-1)(|L_i|+1)}$$

$$K_{pi}=\sum_{x_p\in U_i}(m_{pq}+\sum_{k=1}^{|A_i|}a_{pqk})$$

3）当 $\Delta U_{i-1}\neq\varnothing$ 且 $\Delta A_{i-1}\neq\varnothing$ 时，可以将学习过程分解为面向对象和面向属性的概念认知学习过程来进行学习。

4.2 动态权重网络概念的增量设计

动态网络中，节点间的连接权重会随时间变化（如交通流量的波动）。若每次权重变化都要重新计算网络中所有节点的度，则计算成本较高。因此，需要设计一个高效的连接权重增量更新机制，仅对受影响的局部区域进行更新。

在动态权重网络中，边权值是随时间在变化的，当边权值的变化幅度 $\Delta m_{pq}=|m_{pq}(t_k)-m_{pq}(t_{k-1})|<\epsilon$（$\epsilon$ 为突变阈值，根据场景进行设定），即边权值处于一种随时间小幅度连续性变化时（如社交网络互动用户的活跃时段会随昼夜周期同时变化），采取滑动窗口机制。

在动态权重网络下，网络的权重矩阵为：

$$\boldsymbol{M}(t)=(m_{pq}(t))_{n\times n}, m_{pq}\in\mathbb{R}^+, \boldsymbol{t}\in\{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_T\}$$

首先需将滑动窗口初始化，设定窗口大小为 $\Delta t=t_k-t_{k-1}$（如 1 h）。随后获取滑动窗口 Δt 内节点 p 与所有邻居 q 的权重 $m_{pq}(\tau)$。获得权重后，累加滑动窗口 Δt 内各时刻与各节点的衰减权重与内涵影响力：

$$\begin{aligned}\Delta K_p(t_k)&=K_p(t_k)-K_p(t_{k-1})\\&=\sum_{\tau=t_{k-1}}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}(1+\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk})\end{aligned}$$

其中，$K_p(t_{k-1})$ 表示 t_{k-1} 时刻节点的度，$K_p(t_k)$ 表示 t_k 时刻节点的度，$(1-\lambda)^{t_k-\tau}$ 为对窗口内每个时刻 τ 的权重进行衰减。

随后便可以更新节点度，将增量 $\Delta K_p(t_k)$ 叠加到历史累计值 $K_p(t_{k-1})$ 上，即 $K_p(t_k)=\Delta K_p(t_k)+K_p(t_{k-1})$。

最后，将节点集 $X(X\subseteq U)$ 中所有节点的度进行更新，得到更新后的动态权重网络平均度 $K_X(t_k)$ 与动态权重网络中心度 $C_{D_X}(t_k)$，从而得到更新后的动态权重网络认知概念 $(\{K_X(t_k), C_{D_X}(t_k)\}, X, B)$。

采取滑动窗口机制的好处在于该机制周期性地更新一个固定时间范围内的数据，而不是实时响应每次的变化，从而降低计算压力；同时，滑动窗口机制通过丢弃窗口外的旧数据，减少了旧时刻的数据对当前时刻数据的影响（如近期社交网络的互动比早期行为更能反映当前影响力），并且聚合窗口内的数据可使短期波动更平滑，从而输出更稳定的数据结果。

当边权值的变化幅度 $\Delta m_{pq}=|m_{pq}(t_k)-m_{pq}(t_{k-1})|\geqslant\epsilon$，即边权值处于一种随时间大幅度变化时（如在社交网络互动中因某一热点话题用户的活跃度突然暴涨），采取触发式更新，不再采取滑动窗口机制去计算，而是寻找发生突变的边，从而找到所有依赖该边权值的节点或概念进行更新。

当权重突变时，首先要快速定位受影响的节点，而受影响的节点又分为直接受影响节点与间接受影响节点。直接受影响节点即为突变边 e_{pq} 的两端节点 x_p 和 x_q。间接受影响节点（Ⅱ类节点）作为直接受影响节点（Ⅰ类节点）的拓扑邻接点，其状态演化受Ⅰ类节点度中心性变化量的传导机制支配。

找到受影响节点后，便需更新受影响节点的度。在更新时需综合考虑历史权重的指数衰减累计叠加及其内涵影响力的协同效应。

$$\begin{aligned}K_p(t_k)=&\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}+\\&\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}\sum_{k=1}^{|A|}(a_{pqk}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau})\\=&\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}(1+\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk})\end{aligned}$$

对于时刻 t_k 后的所有时刻，在计算节点度时以突变时刻 t_k 为初始时刻。

计算得到更新后节点的度，便可同步更新子网络的平均度 $K_X(t_k)$ 与中心度 $C_{D_X}(t_k)$，从而更新动态权重网络认知概念 $(\{K_X(t_k), C_{D_X}(t_k)\}, X, B)$。

算法 3 给出了动态权重网络概念增量设计的具体步骤。

算法 3 动态权重网络概念的增量设计

输入：时刻 t，权重矩阵 $\mathbf{M}(t)$，更新前的动态权重网络概念 $(\{K_X(t_{k-1}), C_{D_X}(t_{k-1})\}, X, B)$

输出：更新后的动态权重网络概念 $(\{K_X(t_k), C_{D_X}(t_k)\}, XB)$

1. 若 $\Delta m_{pq}=|m_{pq}(t_k)-m_{pq}(t_{k-1})|<\epsilon$；
2. 设定窗口大小 $\Delta t=t_k-t_{k-1}$；
3. 获取窗口内节点 p 与所有邻居 q 的权重 $m_{pq}(\tau)$；

4. 累加窗口内各时刻的衰减权重 $\Delta K_p(t_k)=K_p(t_k)-K_p(t_{k-1})$;
5. 将增量叠加到历史累计值 $K_p(t_k)=\Delta K_p(t_k)+K_p(t_{k-1})$;
6. 将 X ($X\subseteq U$)中所有节点的度进行更新,得到$K_X(t_k)$与$C_{D_X}(t_k)$,从而得到更新后的动态权重网络认知概念($\{K_X(t_k),C_{D_X}(t_k)\},X,B$);
7. 若 $\Delta m_{pq}=|m_{pq}(t_k)-m_{pq}(t_{k-1})|\geqslant\epsilon$;
8. 确定受影响节点,突变边 e_{pq}的两端节点 x_p和 x_q;
9. 若直接受影响节点的度会传播到其他与其相邻的节点,则需扩展至其相邻节点;
10. 更新受影响节点的度:

$$K_p(t_k)=\sum_{\tau=t_0}^{t_k}\sum_{x_q\in X}m_{pq}(t)(1-\lambda)^{t_k-\tau}(1+\sum_{k=1}^{|A|}a_{pqk})$$

11. 对于时刻t_k后的所有时刻,在计算节点度时以突变时刻t_k为初始时刻;
12. 同步更新子网络的平均度$K_X(t_k)$与中心度$C_{D_X}(t_k)$,从而更新动态权重网络认知概念($\{K_X(t_k),C_{D_X}(t_k)\},X,B$)。

对算法 3 的时间复杂度进行分析,其中$|E|$代表边集数量,$|E_w|$代表窗口内活跃边集的数量,$|V_a|$代表活跃节点数量,C_a代表受影响的概念数量,$d_{\max}$代表最大节点度,$|V_d|$代表直接受影响的节点数量,C_d代表概念数量。滑动窗口时间复杂度为 $O(|E_w|+|V_a|+C_a)$,触发式更新的时间复杂度为 $O(T|V_d|+C_d)$。

算法 3 建立了动态权重网络概念的增量更新机制,其核心在于根据网络权重的变化幅度选择不同的更新策略,实现对节点度的动态调整,最终更新整个网络的认知概念。

4.3 实验及结果分析

4.3.1 实验设置

为了验证算法 3 的可行性、有效性及应用价值,将其与全局更新、固定窗口更新和静态网络模型进行对比。实验计算完全在个人计算机上,使用 Python 进行,计算机规格为 Intel(R) Core(TM) i7-10700K CPU @ 3.80GHz 和 32GB 内存。

选取 2025 年 1 月 1 日 00:00 至 2025 年 1 月 2 日 00:00 的纽约出租车行程记录用于实验。将 PULocationID(上车点)与 DOLocationID(下车点)作为网络节点。以 *total_amount*(总费用)作为边的动态权重,权重随时间窗口更新。将 *tpep_pickup_datetime* 按 1h 为时间间隔划分时间窗口。构建邻接矩阵 $\boldsymbol{M}(t)$,其中$m_{pq}(t)$表示时间窗口 t 内从地点 p 到 q 的总费用之和。

统计初始时间窗口的权重矩阵 $\boldsymbol{M}(t_0)$,计算初始节点度 $K_p(t_0)$。随后,判断时间窗口内边的权重变化,若权重变化小于阈值,则采用滑动窗口法计算衰减后的增量并更新节点度;若权重变化大于阈值,则采用触发式更新法更新节点度。最后,计算更新后的平均度与中心度,生成动态权重网络认知概念。

4.3.2 参数分析

在实验中,算法 3 中滑动窗口 $\Delta t=1$h,衰减系数 $\lambda=0.1$,突变阈值$\epsilon=20$。

滑动窗口大小 $\Delta t=1$h 的选择综合考虑了城市交通流的周期性与数据采集粒度,该设定可在保持时间分辨率的同时避免高频波动干扰。衰减系数 $\lambda=0.1$ 是通过网格搜索在区间[0.05,0.3]内确定的,采用 $k(k=5)$折交叉验证评估不同 λ 对节点度预测均方误差(MSE)的影响,最终选择使验证集误差最小的值。突变检测阈值 $\Delta=20$ 的设定,依据了训练集(2024 年 12 月数据)权重变化的统计特性。

4.3.3 对比实验

算法 3 与其他算法的耗时与内存占用对比如表 1 所列。可以看出,算法 3 通过局部更新,与全局更新相比减少了 59%的时间开销,触发式更新在突变场景下节省了 68%的局部计算量,内存占比相较于之前降低了 51.4%。

表 1 各方法耗时与内存占用的对比

Table 1 Comparison of time cost and memory consumption of each method

方法	总时间/s	单窗口平均时间/s	相对效率	峰值内存/MB
全局更新	218.7	9.11	1.0	1842
固定窗口($\Delta t=2$)	142.3	5.93	1.5	1215
滑动窗口与触发式更新	89.5	3.73	2.6	896

算法 3 在不同时段的更新粒度如表 2 所列。可以看出,算法 3 能够根据交通流量变化自动调整更新范围,在高峰时段更新更多节点,而在低流量时段仅更新少量节点。

表 2 不同时段下的更新粒度

Table 2 Update granularity over time

时间段	更新节点数/(个/h)	受影响节点比例/%
00:00-06:00	15.2	3.2
06:00-09:00	42.7	8.9
09:00-16:00	28.3	5.9
16:00-19:00	51.4	10.7
19:00-24:00	22.6	4.7

以全局更新为精准度的基准,采用相对误差评估算法 3 的节点度计算精度。如表 3 所列,算法 3 在 92.9%的时间窗口内保持节点度误差小于 1%。

表 3 误差分布

Table 3 Error distribution

误差区间	节点比例/%	典型场景
<0.5%	68.2	非高峰时段的普通节点
0.5%~1%	24.7	中等活跃度的枢纽节点
1%~2%	5.3	高峰时段的中心节点
>2%	1.8	突变边连接的临界节点

4.3.4 实验结论

算法 3 通过滑动窗口和触发式更新机制,有效平衡了计算效率和准确性,相比全局更新提高了 2.44 倍的计算速度。算法能够自适应交通流量的变化,在高峰时段自动扩大更新范围,在低流量时段减少不必要的计算。与固定窗口更新相比,算法 3 通过权重变化幅度判断更新策略,避免了固定间隔带来的计算浪费。

结束语 本文探讨了认知算子在复杂网络中的应用,特别是在动态权重网络环境下的概念认知学习。通过定义认知算子及其性质,建立了网络认知概念的泛化和特化关系,并构建了概念格,形成了一个完整的网络概念认知系统。这一系统不仅能够有效地描述网络中对象与属性之间的关系,还能通过邻接矩阵和节点度来量化网络特征。

进一步将认知算子应用于动态权重网络,提出了动态权

重网络认知概念,分析了节点连接强度随时间变化的情况。为了应对网络中节点和边的动态变化,设计了面向对象、属性和混合更新的增量计算机制。在动态权重网络中,本文提出了滑动窗口机制和触发式两种局部更新方法,提高了计算效率和准确性。

总体而言,本文通过引入认知算子和动态权重网络的概念,提供了一种分析和更新复杂网络中节点影响力的方法和框架。这些方法有助于理解网络结构的动态变化,还为网络管理和优化提供了理论支持。未来研究可以在此基础上进一步扩展,以适应更复杂的网络环境和应用场景。

参 考 文 献

[1] ZHANG W X,XU W H. A cognitive model based on granular computing[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007,24(6):957-971.

[2] YAO Y Y. Interpreting concept learning in cognitive informatics and granular computing [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics,2009,39(4):855-866.

[3] DING Y,XU W H,DING W P,et al. IFCRL:Interval-Intent Fuzzy Concept Re-Cognition Learning Model [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2024,32(6):3581-3593.

[4] LI J H,MEI C L,XU W H,et al. Concept learning via granular computing: A cognitive viewpoint [J]. Information Sciences, 2015,298(1):447-467.

[5] GUO D D,XU W H,QIAN Y H,et al. Fuzzy-granular concept-cognitive learning via three-way decision: Performance evaluation on dynamic knowledge discovery[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2024,32(3):1-12.

[6] MI Y L,SHI Y,LI J H,et al. Fuzzy-based concept learning method:Exploiting data with fuzzy conceptual clustering[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2022,52(1):582-593.

[7] HU M,TSANG E C C,GUO Y T,et al. A novel approach to concept-cognitive learning in interval-valued formal contexts: A granular computing viewpoint[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2022,13(4):1049-1064.

[8] SHIVHARE R,CHERUKURI A K. Three-way conceptual approach for cognitive memory functionalities[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 21-34.

[9] STUMME G. Efficient Data Mining Based on Formal Concept Analysis[C]// Database and Expert Systems Applications. Heidelberg:Springer-Verlag,2002.

[10] SARAMÄKI J,LEICHT E A,LÓPEZ E,et al. Persistence of social signatures in human communication[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,2014,111(3):942-947.

[11] XU W H,GUO D D,QIAN Y H,et al. Two-way concept-cognitive learning method: A fuzzy-based progressive learning[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2023,31(6):1885-1899.

[12] LI J H,MEI C L,XU W H,et al. Concept learning via granular computing: A cognitive viewpoint [J]. Information Sciences, 2015,298(1):447-467.

[13] BARABÁSI A L,ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science,1999,286(5439):509-512.

[14] LESKOVEC J,KLEINBERG J,FALOUTSOS C. Graphs over time:densification laws,shrinking diameters and possible explanations[C]// Proceedings of the 11th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York:ACM,2005.

[15] QIU Z Y,HU W B,WU J,et al. Temporal Network Embedding with High-Order Nonlinear Information[C]// Proceedings of the 34th AAAI Conference on Artificial Intelligence. New York: AAAI,2020.

[16] LEBON L C G,IUDICE F L,ALTAFINI C. On controllability of temporal networks[J]. European Journal of Control,20 24, 80(Part A):101046.

[17] CALIGIURI A,EGUÍLUZ V M,GAETANO L D,et al. Lyapunov exponents for temporal networks[J]. Physical Review E, 2023,107(4):044305.

[18] YAN M Y,LI J H. Knowledge discovery and updating under the evolution of network formal contexts based on three-way decision[J]. Information Sciences,2022,601:18-38.

[19] LIU M,ZHU P. Fuzzy object-induced network three-way concept lattice and its attribute reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2024,173,109251.

[20] MA N,FAN M,LI J H. Concept-cognitive learning under complex network[J]. Journal of Nanjing University(Natural Sciences),2019,55(4):609-623.

QIN Haiqi, born in 2001, master. His main research interests include concept-cognitive learning,complex network and so on.

MI Jusheng, born in 1966,Ph.D,professor,Ph.D supervisor. His main research interests include rough set,concept lattice, granular computing, approximate reasoning and so on.

(责任编辑:柯颖)