

# 一种改进 Borda 分值的决策方法

秦 杰 贺毅辉 赖 俊

(解放军理工大学指挥信息系统学院 南京 210007)

**摘 要** 针对传统的 Borda 法存在无法反映方案之间优劣程度和容易被操纵的缺陷,设计了一种 Borda 分修正算法。该算法充分考虑了全局成员和单个成员两方面的利益,借鉴模糊 Borda 法变换得分值和 SPAN 法中成员相互作用的全局思想,对 Borda 分矩阵进行修正;根据加权和公式集结方案的综合值进行方案排序;最后,通过一个算例验证了该算法的可行性与准确性。

**关键词** Borda, SPAN, 决策, 加权和

**中图分类号** F222.3 **文献标识码** A

## Improved Decision Method of Borda Score

QIN Jie HE Yi-hui LAI Jun

(College of Command Information System, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

**Abstract** To solve the problems of the poor reflection of plans and being easy to be controlled in traditional Borda method, an algorithm to improve Borda score was proposed. The algorithm puts the integer and individual into consideration, takes the idea of improving score in fuzzy Borda method and interactions among members in SPAN method, and improves Borda score matrix. The method calculates the integrated value with formulas in weight, and sorts the plans by integrated value. At last, the accuracy and reasonableness of the algorithm were verified.

**Keywords** Borda, SPAN, Decision, Weighted sums

Borda 法<sup>[1]</sup>由法国数学家 C. de Borda 在 1784 年提出,是解决社会投票选举问题的常用方法。其基本思想是:根据投票人对  $m$  个候选对象评价的优序关系,将  $0 \sim m-1$  共  $m$  个整数(即 Borda 分值)分别赋给相应对象,序数越小, Borda 分越高,最后综合各方案的 Borda 总分,进行对象排序。

Borda 法是一种简单、有效的群决策方法,但其存在以下两个缺陷:一是 Borda 分只能反映定性差异,不能定量表示方案之间的优劣程度;二是 Borda 法的防操纵性<sup>[2]</sup>差,投票结果容易受到个别人的操纵。

针对第一个问题,文献[3]提出了要综合考虑 Borda 分(序关系)和定量结果(评价值)的思想,并对 Borda 法进行了改进,其称为模糊 Borda 法。模糊 Borda 法的本质就是通过计算“隶属度”(即加权因子)对 Borda 分进行线性变换,使所有的输出值范围都落到  $[0, 1]$ 。然而,文献[4]指出模糊 Borda 法同样存在两个问题:一是 Borda 加权变换增加了结果的不确定性;二是对具有不同凹凸性的评价结果集成与“加权”变换初衷相背。

对于第二个问题,文献[5]对防操纵的条件进行了论证,但是对于怎样处理现成的优序关系数据以及降低 Borda 法被操纵的可能性,没有给出解决方法。

本文以决策成员对备选对象给出的优序关系矩阵为基础,充分考虑 Borda 法存在的两个缺陷,借鉴模糊 Borda 法变换次序为值的思想和 SPAN(集体参与分配网)<sup>[6]</sup>的全局理念,设计了新的算法来处理优序关系矩阵,其一定程度上克服

了 Borda 法不能定量反映方案优劣和容易被操纵的缺陷。

## 1 问题描述

假设有  $n$  个成员,对  $m$  个方案进行序数评价,评价的准则有  $p$  种,每个成员评价的准则相同。成员  $i(i=1, 2, \dots, n)$  对各备选方案的评价记为:

$$A^i = [a_{jl}^{(i)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1p}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} & \cdots & a_{2p}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(i)} & a_{m2}^{(i)} & \cdots & a_{mp}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

定义如下记号:

$A_j^i = [a_{j1}^{(i)}, a_{j2}^{(i)}, \dots, a_{jp}^{(i)}]$ : 成员  $i$  根据准则  $l(l=1, 2, \dots, p)$  对方案  $j$  的评价;

$A_{li}^i = [a_{li}^{(i)}, a_{2l}^{(i)}, \dots, a_{ml}^{(i)}]$ : 成员  $i$  根据准则  $l$  对方案  $j(j=1, 2, \dots, m)$  的评价。

准则的权重向量为  $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)^T$ ,  $\sum_{i=1}^p \omega_i = 1, \omega_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )。

问题:根据成员对方案的评价矩阵和已知的准则权重向量得到方案的最终优序关系。

## 2 原理与方法

### 2.1 Borda 法

Borda 法中,将方案对应的序数转换为 Borda 分时用到

了 Borda 函数<sup>[6]</sup>:

$$B(x) = \sum_{x_j \in A \setminus \{x_i\}} N(x_i > x_j) \cdot \quad (2)$$

式中,  $B(x)$  表示方案  $x_i$  ( $x_i \in A$ ) 与其他方案  $x_j$  ( $x_j \in A, x_i \neq x_j$ ) 逐一比较时,  $m-1$  次比较中所有得分的总和。

根据上文中成员  $i$  决策矩阵  $A^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 计算相应的 Borda 分, 将序数决策矩阵转换为 Borda 分决策矩阵  $B^i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 并根据各准则  $l$  ( $l=1, 2, \dots, p$ ) 对各成员进行排序, 得到矩阵  $B_l^i$ :

$$B_l^i = \begin{bmatrix} b_{l1}^{(i)} & b_{l2}^{(i)} & \dots & b_{lm}^{(i)} \\ b_{2l}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \dots & b_{2m}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{ml}^{(i)} & b_{m2}^{(i)} & \dots & b_{mm}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

列向量  $B_{\cdot l}^i = (b_{l1}^{(i)}, b_{l2}^{(i)}, \dots, b_{lm}^{(i)})^T$  表示成员  $i$  根据准则  $l$  对方案  $j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 的 Borda 分。

## 2.2 SPAN 法

集体参与分配网 (Social Participatory Allocation Network, SPAN)<sup>[6]</sup> 是一种利用计算机辅助计算的评价方法。其基本思想是承认成员对评价对象的判断能力存在差异, 让每个成员可以将自己的评价权转让一部分给他人, 并指定相应的接收对象。最后, 通过计算机编程计算成员的评价值, 直到所有得分之和收敛。

SPAN 法的具体步骤如下:

1. 每个决策成员  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 将 100 点分成两份, 一份是其他人代理的比例, 另一份是自己评价的比例;
2. 每个成员  $i$  为其余  $n-1$  个成员分配 100 点;
3. 每个成员  $i$  对各方案  $j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 进行评价, 根据优劣分配 100 点给各方案;
4. 编程计算各方案获得的总点数 (计算过程要多次循环, 直到所有方案得分之和接近  $100n$ )。

SPAN 方法是采集专家意见和投票决策的好方法。方法充分考虑了群体的优势, 通过交叉赋权, 较好地实现了决策成员意见的广泛集中。其主要的弱点有两个: 一是该算法要求成员之间有比较深的了解; 二是个别成员可能滥用赋权, 操控结果, 得到权值越多的人操控结果的能力越大。

## 2.3 Borda 分修正算法

### 2.3.1 定义与公式

假设  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  为一组 Borda 分,  $j=1, 2, \dots, m$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , 定义如下记号和公式:

**定义 1** (邻接 Borda 分)  $\langle a_j, a_k \rangle: \langle a_j, a_k \rangle = \{\langle a_j, a_k \rangle | a_k = a_j + 1\}$ ; 则称  $\langle a_j, a_k \rangle$  为邻接 Borda 分。

**定义 2** (父辈 Borda 分)  $father(a_k): father(a_k) = \{a_j | a_j > a_k\}$ ; 则称  $a_k$  为  $a_j$  的父辈 Borda 分。

公式 1 Borda 分差即  $\Delta(a_k, a_j)$ :

$$\Delta(a_k, a_j) = \{x | x = a_k - a_j\}$$

公式 2 计数器即  $a++$ :

$$a++ = \{x | x = a + 1\}$$

公式 3 累加和求  $a(+b)$ :

$$a(+b) = \{x | x = a + b\}$$

### 2.3.2 算法描述

借鉴 SPAN 法中交叉赋权的思想设计 Borda 分修正算法。

具体思路是: 依次修正邻接 Borda 分。在对成员  $i$  关于

方案  $j$  的 Borda 分进行变换时, 不采用模糊 Borda 法中用到的“加权因子”, 而是参考其他成员  $i^*$  ( $i^*=1, 2, \dots, n$  且  $i^* \neq i$ ) 的 Borda 分。

例如: 关于准则  $l$ , 成员  $i$  对方案  $j$  的 Borda 分为  $b_{jl}^{(i)}$ , 对方案  $j^*$  评分为  $b_{jl}^{(i)} - 1$  (即:  $j$  和  $j^*$  为邻接 Borda 分); 同时, 其他成员  $i^*$  ( $i^*=1, 2, \dots, n$  且  $i^* \neq i$ ) 中, 共有  $count$  个成员给出方案  $j$  的 Borda 分高于  $j^*$ , 且高出 Borda 分的总和为  $SUM$ , 则将  $b_{jl}^{(i)}$  修正为  $b_{jl}^{(i)} + SUM/count - 1$ , 并将  $B_{\cdot l}^i$  中高于原  $b_{jl}^{(i)}$  值的 Borda 分依次更新。

Borda 分修正算法主要有 6 大步骤:

1. 复制 Borda 分矩阵。构造矩阵  $C_l^i$ , 使得  $C_l^i = B_l^i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )。
2. 选取邻接 Borda 分 (如:  $\langle a_j, a_k \rangle$ )。对式 (3) 中的评分矩阵  $B_{\cdot l}^i = (b_{l1}^{(i)}, b_{l2}^{(i)}, \dots, b_{lm}^{(i)})^T$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 依次考查  $\langle b_{jl}^{(i)}, b_{kl}^{(i)} \rangle$ , 其中邻接 Borda 分  $\langle b_{jl}^{(i)}, b_{kl}^{(i)} \rangle \in \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots, \langle m-2, m-1 \rangle\}$ 。
3. 检测判断邻接 Borda 分。对于选取的  $\langle b_{jl}^{(i)}, b_{kl}^{(i)} \rangle$ , 若  $\forall b_{*l}^{(i)} \in B_{\cdot l}^i$ , 都有  $b_{kl}^{(i)} \geq b_{*l}^{(i)}$ , 结束算法, 返回修正分矩阵  $C_l^i$ ; 否则, 设置变量  $count = 0, \Delta S = 0$ 。
4. 计算修正参数。考查成员  $u$  ( $u=1, 2, \dots, n$ ) 关于方案  $j$  和  $k$  的 Borda 分  $b_{jl}^{(u)}$  和  $b_{kl}^{(u)}$ , 若  $b_{kl}^{(u)} \in father(b_{jl}^{(u)})$ , 则计算  $\Delta S (+\Delta(b_{kl}^{(u)}, b_{jl}^{(u)}))$  和  $count++$ ; 修正参数即为:  $\Delta = \Delta S / count - 1$ 。
5. 修正更新 Borda 分。若  $b_{jl}^{(i)} \in father(b_{kl}^{(i)})$ ,  $f=1, 2, \dots, m$ , 则计算  $c_{fl}^{(i)} (+\Delta)$ 。
6. 返回步骤 2。

### 2.3.3 算法特点

算法在进行 Borda 分修正时, 最大限度地考虑了全体成员的评价, 最大限度地支持了个体成员的评价。算法采取利用一致 Borda 分的办法, 隐性地运用了 SPAN 法交叉赋权的思想, 同时避开了 SPAN 法因显性指定受权成员而引起结果受操控的问题。下面对修正算法执行中的数据处理特点进行说明:

1. 通过依次考查邻接 Borda 分, 能够从小到大扫描到全部分值。
2. 采纳与当前邻接 Borda 分一致的其余成员评分, 集中了更全面的意见, 能够更真实反映方案的优劣。
3. 修正当前得分时, 计算一致 Borda 分累计值的平均数作为修正参数, 其能够控制因只采纳一致 Borda 分而引起的 Borda 分大幅增长。
4. 依次更新父辈 Borda 分, 保证了不影响还未修正的父辈 Borda 分。

## 2.4 综合值计算

根据修正 Borda 分矩阵  $C_l^i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) 和准则权重向量  $W = (w_1, w_2, \dots, w_p)^T$ , 可以通过加权求和的方法计算出各方案的综合值并择优排序。

$$G_j = \sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^n w_l c_{jl}^{(i)}, j=1, 2, \dots, m \quad (4)$$

## 3 案例分析

美国宇航局对航天飞机进行科学实验, 可以进行的实验有<sup>[6]</sup>:

$a_2$ : 地球观测;  $a_3$ : 物理和化学实验;  $a_4$ : 微生物学实验;  $a_5$ : 构建与系统的检测;  $a_6$ : 飞船调节系统的效果。

(下转第 15 页)

- [10] Wiener N. Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1948
- [11] 邱均平. 文献计量学[M]. 北京: 科技文献出版社, 1988
- [12] 吴国恩. 情报信息熵研究[J]. 情报理论与实践, 1993(1): 4
- [13] 吴国恩. 情报信息的测度[J]. 情报学刊, 1993(5): 343
- [14] 陈颖. 以信息论为基础的文献计量方法[J]. 河北大学学报(自然科学版), 1994(4): 106
- [15] 康凯, 苏建旭, 张会云. 技术创新扩散场——技术创新空间扩散研究的一种新方法[J]. 河北工业大学学报, 2000(2): 27-31
- [16] 邓忆瑞. 基于场论的信息扩散研究[J]. 情报杂志, 2008(8): 31-34
- [17] 邓忆瑞. 网络环境下信息扩散的模式研究[J]. 图书情报工作,

- [18] 许智宏, 高静静, 胡浩. 蚁群算法在技术创新扩散模型中的应用研究[J]. 河北工业大学学报, 2012(1): 9-13
- [19] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006
- [20] Jakob M. Heat transfer [M]. New York: John Wiley & Sons, 1949
- [21] Eckert E R G, Goldstein R J. Measurements in heat transfer [M]. Washington D C: Hemisphere Publishing Corp, 1976
- [22] Howard D W. Authors as citers over time [J]. Journal of the American Society for Information Science and Technology, 2001, 52(2): 87-108
- [23] 张青. 我国管理学期刊引用网络分析[J]. 西南民族大学学报(人文社科版), 2010, 31(11): 274-276

(上接第 6 页)

所选评价准则是:

$c_1$ : 使用的需要;  $c_2$ : 分析研究;  $c_3$ : 新仪器和新技术的开发。

6 个专家对 5 个实验、3 个指标进行的判断排序矩阵如下:

$$A^1 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^3 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^4 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^5 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^6 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(1) 根据准则  $c_1$  可以得出 Borda 分矩阵  $B_1'$ :

$$B_1' = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(2) 根据算法修正  $B_1'$ , 得到修正的 Borda 分  $C_1'$ :

$$C_1' = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3.06 & 3.06 & 2.25 & 2 & 5.23 \\ 4.83 & 5.26 & 6.46 & 5.08 & 6.16 & 3.23 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.4 & 1.4 & 3.25 & 3 & 1.4 \\ 5.83 & 6.26 & 5.46 & 6.08 & 5.16 & 4.23 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

同理可以得到  $C_2'$  和  $C_3'$ 。

(3) 根据  $W = (0.28, 0.32, 0.4)$ , 计算得出各方案的综合值:

$$G = [G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]$$

$$= [12.37, 32.62, 3.96, 14.22, 28.89]$$

所以, 最终各方案之间的优序关系为  $a_3 > a_6 > a_5 > a_2 > a_4$ 。

将修正算法计算结果与模糊 Borda 法计算结果进行对比, 如表 1 所列。可以发现方案  $a_2$  和  $a_5$  的次序颠倒。需要说明的是, 模糊 Borda 法综合值一栏不等式中的前一个数表示方案作为当前排序的比重, 后一个数表示第二个可能排当前序的方案比重。所以模糊 Borda 中  $a_2$  和  $a_5$  的次序都是不够占绝对优势的, 特别是  $a_5$  的次序 (0.44), 这可能是模糊 Borda 法进行线性变换导致的。所以, 本文给出的结果应更为合理。

表 1 方法结果对比

| 次序 | 模糊 Borda 法 |               | 本文算法  |       |
|----|------------|---------------|-------|-------|
|    | 方案         | 综合值           | 方案    | 综合值   |
| 1  | $a_3$      | $0.72 > 0.28$ | $a_3$ | 32.62 |
| 2  | $a_6$      | $0.72 > 0.28$ | $a_6$ | 28.89 |
| 3  | $a_2$      | $0.6 > 0.4$   | $a_5$ | 14.22 |
| 4  | $a_5$      | $0.44 > 0.4$  | $a_2$ | 12.37 |
| 5  | $a_4$      | $0.84 > 0.16$ | $a_4$ | 3.96  |

**结束语** 本文在传统 Borda 法的基础上, 设计了一种 Borda 分修正算法。算法借鉴 SPAN 算法思想, 在修正成员关于方案的 Borda 分矩阵时, 参考其余成员的一致的评价意见; 修正后的 Borda 分矩阵能够反映出方案之间的优劣程度, 且方法具有一定的防操纵性; 采用加权和方法集结方案的综合值并排序择优, 通过算例将本文方法与模糊 Borda 法进行了对比, 凸显了本文算法的准确性与合理性。

## 参考文献

- [1] Banks J S. Sophisticated Voting Outcomes and Agenda Control [J]. Social Choice and Welfare, 1986, 1(4): 295-306
- [2] Arrow K J. Social choice and individual values (2nd edition) [M]. New York: Wiley, 1963
- [3] 杨季美, 史本山. 群体评价中的并和方法[J]. 系统工程理论与实践, 1992(1): 49-53
- [4] 苏为华, 陈骥. 模糊 Borda 法的缺陷分析及其改进思路[J]. 统计研究, 2007, 24(7): 58-64
- [5] 许晓东, 吴松, 路小刚. 简单多数票法和 Borda 法的防策略性分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2005, 33(11): 86-89
- [6] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003