第42卷 第11期
2015年11月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 42 No. 11
Nov 2015

对称逻辑公式在 L_4^* 逻辑度量空间中的分布

惠小静 赵玛瑙 高 姣
(延安大学数学与计算机科学学院 延安 716000)

摘 要 在四值逻辑系统 L_4^* 中引入了对称逻辑公式。运用 Matla 软件研究了对称逻辑公式在 L_4^* 逻辑度量空间中的计数问题,给出了 $3n$ 元、$3n+1$ 元、$3n+2$ 元对称逻辑公式的个数。证明了 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随 n 的增大而趋于零。

关键词 四值逻辑系统 L_4^*,对称逻辑公式,计数问题

中图法分类号 O159 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.11.027

Distribution of Symmetrical Logic Formulas in L_4^*-logic Metric Space

HUI Xiao-jing ZHAO Ma-nao GAO Jiao
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract In four-valued logic system L_4^*, the concept of symmetric logic formulas was given. The counting problem of the symmetrical logic formulas in the L_4^*-logic metric space was studied by using Matlab, and the numbers of symmetric logic formulas with $3n$, $3n+1$ and $3n+2$ atoms were given. It was proved that the ratio of the number of symmetric formulas with n atoms over the numbers of all formulas with n atoms converges to zero when n tends to infinite.

Keywords Four-valued logic system L_4^*, Symmetric logic formulas, Counting problem

1 引言

计量逻辑学从基本概念的程度化入手,将数值计算引入到数理逻辑中,使其具有了某种灵活性,从而扩大了其应用范围[1-5]。计量逻辑学又与概率逻辑学相结合,将随机化思想引入到了经典的推理模式中[6,7]。近年来,计量逻辑学与密码学相结合,取得了若干研究成果[8-10],如文献[8]将密码学中对称布尔函数引入计量逻辑学,给出了对称逻辑公式,研究了对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布。文献[9]将对称布尔函数的概念推广至三值函数,研究了三值逻辑中的对称逻辑公式,解决了对称逻辑公式在 L_3^* 逻辑度量空间中的计数问题。这些研究进一步丰富了计量逻辑学的研究内容。值得注意的是,除了个别结果外[8-10],对于逻辑度量空间自身构造的研究还远未开始。对于二值命题逻辑系统 L 而言,逻辑公式与布尔函数之间是相互决定的,所以密码学中的对称布尔函数可直接运用到经典逻辑系统中逻辑公式的对称性。从文献[10]的三值逻辑系统 L_3^* 中可以看出,逻辑公式与相应的多值函数已经不再有相互决定的关系了,并且对称三值函数的个数也有着相对于二值命题逻辑系统更为复杂的计数问题。因此,相对于更一般的四值逻辑系统而言,其对称四值函数的个数研究的复杂性不言而喻。因此,本文将文献[10]中的三值逻辑度量空间推广至更一般的四值逻辑度量空间,研究了四值逻辑度量空间中的对称逻辑公式。主要内容如下:引入对称四值函数,使用数学软件 Matlab 研究了其计数问题;通过建立模型,解决了对称逻辑公式在 L_4^* 逻辑度量空间中的计数问题;最后,证明了 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随着 n 的增大趋于零。

2 预备知识

定义 1[1] 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$, $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型自由代数,称 $F(S)$ 中的元为系统 L_4^* 中的公式(或命题),称 S 中的元为系统 L_4^* 中的原子公式(或原子命题)。

定义 2[1] 设 $v: F(S)\rightarrow\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 是映射,这里 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 是四值 R_0-代数,若 v 是 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型同态,即 $v(\neg A)=\neg v(A)$, $v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=\max\{v(A),v(B)\}$, $v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B)=R_0(v(A),v(B))$,则称 v 为 $F(S)$ 在四值 R_0-代数 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 中的赋值,简称 v 为赋值。$F(S)$ 中全体赋值之集记作 $\overline{\Omega}$。

定义 3[1] 设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是含有 n 个原子命题的公式,它由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 通过逻辑连接词 $\neg$、$\vee$ 与 $\rightarrow$ 连接而成。设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取代 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 中的 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,并按 $\neg x_1=1-x_1$、$x_1\vee x_2=\max\{x_1,x_2\}$、$x_1\rightarrow x_2=R_0(x_1,x_2)$ 理解 $\neg$、$\vee$ 与 $\rightarrow$,则得一个 n 元函数,记作 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,叫作公式 A 诱导的四值 R_0 函数。

到稿日期:2014-07-12 返修日期:2014-11-17 本文受国家自然科学基金(11471007),陕西省自然科学基金(2014JM1020),陕西省高水平大学建设专项资金(2012SXTS07),延安大学研究生创新基金,陕西省大学生创新训练计划项目(1064)资助。

惠小静(1973-),女,博士,副教授,主要研究方向为不确定性推理,E-mail:xhmxiaojing@163.com;**赵玛瑙**(1987-),女,硕士生,主要研究方向为不确定性推理;**高 姣** 女,主要研究方向为不确定性推理。

定义 4[10] 若函数 $g:\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n \to \{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 可由 L_4^* 中的某个 n 元公式导出，则称 g 为 n 元四值 R_0 函数 $(n\in N)$。

3 对称逻辑公式在 L_4^* 逻辑度量空间中的计数问题

定义 5[9] 称映射 $g:\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n \to \{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 为 n 元四值函数。$\forall \alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 及 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 均有 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称 g 为 n 元对称四值函数。设 α,β 为 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 中的两个向量，如果 β 可由 α 通过调整分量的次序而得到，则称 α,β 为同类向量。

注 1：在定义 5 中，$\forall \alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称 $\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为向量 α 的重量。显然，同类向量的重量是相等的；反过来，如果 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 中的两个向量 α,β 重量相等，但 α,β 不一定是同类向量。例如 $\alpha=(1,0,0,0)$ 与 $\beta=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,0)$ 都是重量为 1 的向量，但是 α,β 不是同类向量。

定义 6 设 $A\in F(S)$，且 A 含有 n 个原子命题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，如果 A 所诱导的四值 R_0 函数是对称四值 R_0 函数，则称 A 为 n 元对称逻辑公式。

命题 1 g 为 n 元四值函数，如果 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 中的所有同类向量对应的函数值相等，则 g 为 n 元对称的四值函数。

证明：对于任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 以及 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，均有向量 $(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})\in\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n$ 且与向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为同类向量，由 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可知 g 为 n 元对称四值函数。

引理 1 $3n$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+1}}$（n 为偶数），其中 S_{9n+1} 为所有向量类的个数之和。

证明：$\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^{3n}$ 中的向量按重量可分为 $9n+1$ 组，其重量分别为：$0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,n-1,n-\frac{2}{3},n-\frac{1}{3},n,n+\frac{1}{3},n+\frac{2}{3},n+1,\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,2n+\frac{1}{3},2n+\frac{2}{3},2n+1,\cdots,3n-1,3n-\frac{2}{3},3n-\frac{1}{3},3n$。

重量相等的向量因为其中坐标为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 或 1 的个数不同，又可以分为不同的类。设 x 为某向量中坐标为 $\frac{1}{3}$ 的个数，y 为坐标为 $\frac{2}{3}$ 的个数，z 为坐标为 $\frac{3}{3}$（即 1）的个数。那么，求解 $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{3}{3}z=\frac{k}{3}$ 的整数解问题，就解决了向量类的个数问题。这里 $\frac{k}{3}$ 为重量，由于 $0\leqslant\frac{k}{3}\leqslant 3n$，因此 $0\leqslant k\leqslant 9n$。通过将等式两边同时乘以 3，求 $x+2y+3z=k$ 的整数解，解的个数分别代表着向量类的个数。运用 Matlab 可以计算出所有解的个数。具体运算思路如下。

因为最大重量为 $3n$，因此向量中 $\frac{1}{3}$ 的个数、$\frac{2}{3}$ 的个数、$\frac{3}{3}$（即 1）的个数之和不能超过 $3n$，即 $x+y+z\leqslant 3n$。如果解超出 $x+y+z\geqslant 3n$，则解无效，必须去除。

当 $k=10$ 时，$x+2y+3z=10$ 的解共有 14 个，因此，有 14 个向量类重量为 $\frac{10}{3}$。当 $k=31$ 时，$x+2y+3z=31$ 的解共有 96 种，而其中 $x=31,y=0,z=0$ 这个根不满足 $x+y+z\leqslant 3n$，因此真正解的个数为 $96-1=95$ 种，即重量为 $\frac{31}{3}$ 的向量类共有 95 个。通过运算可得：

1）当 $0\leqslant k\leqslant 3n$（其中 n 为偶数）时，重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,n-1,n-\frac{2}{3},n-\frac{1}{3},\frac{3n}{3}$ 的向量类个数 v_k 满足

$$v_k=k+v_{k-6},k\geqslant 6,v_0=1,v_1=1,v_2=2,v_3=3,v_4=4,v_5=5 \tag{1}$$

2）当 $k=3n+a,1\leqslant a\leqslant 3n$，即当 $3n+1\leqslant k\leqslant 6n$ 时，重量分别为 $n+\frac{1}{3},n+\frac{2}{3},n+1,\cdots,2n-\frac{1}{3},2n$ 的向量类的个数 $v_k{}'$ 满足：

当 a 为奇数（$1\leqslant a\leqslant 3n-1$）时，

$$v'_{3n+a}=v_{3n+a}-(\frac{a+1}{2})^2 \tag{2}$$

当 a 为偶数（$2\leqslant a\leqslant 3n$）时，

$$v'_{3n+a}=v_{3n+a}-(\frac{a}{2})\times(\frac{a}{2}+1) \tag{3}$$

其中，

$$v_{3n+a}=3n+a+v_{3n+a-6} \tag{4}$$

可见式(4)需通过式(1)求解。

3）令 $k=6n+b,1\leqslant b\leqslant 3n$，即当 $6n+1\leqslant k\leqslant 9n$ 时，重量分别为 $2n+\frac{1}{3},2n+\frac{2}{3},2n+1,\cdots,3n-1,3n-\frac{2}{3},3n-\frac{1}{3},3n$ 的向量类个数与 1）中 $3n-1$ 到 0 时解的个数一样，满足：

$$v_{6n+b}=v_{3n-b}(n\geqslant 6),1\leqslant b\leqslant 3n \tag{5}$$

对 1），2），3）求和可得所有向量类的个数，记为 S_{9n}。由于不同的向量类对应的函数值有 4 个，因此 $3n$ 元的对称四值函数共 $4^{S_{9n}}$ 个。

注 2：本文用 S_{3n} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,n-1,n-\frac{2}{3},n-\frac{1}{3},n$ 的所有向量类的个数之和。

用 S_{6n} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-1,2n-\frac{2}{3},2n-\frac{1}{3},2n$ 的所有向量类的个数之和。

用 S_{9n} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,\cdots,3n-1,3n-\frac{2}{3},3n-\frac{1}{3},3n$ 的所有向量类的个数之和。

引理 2 若 $v_0=1,v_1=1,v_2=2,v_3=3,v_4=4,v_5=5$ 以及 $v_k=k+v_{k-6}(k\geqslant 6)$。令 $Q_{6n}=\sum_{i=0}^{6n}v_i$，则 $Q_{6n}=1+\sum_{i=0}^{n}(18i^2+3i+1)$。

证明：利用 $v_0=1,v_1=1,v_2=2,v_3=3,v_4=4,v_5=5$ 且 $v_k=k+v_{k-6}(k\geqslant 6)$，可得 $v_6=6+v_0,v_{12}=12+v_6,v_{18}=18+v_{12},\cdots,v_{6i}=6i+v_{6i-6}$，即 $v_{6i}=1+6+12+18+\cdots+6i$。

可以看出，从第二项开始是首项为 6、公差为 6 的等差数

列，则

$$v_{6i}=1+6+12+18+\cdots+6i=3i^2+3i+1 \tag{6}$$

同理 $v_{6i-5}=1+7+13+\cdots+6i-5$。可以看出，从第一项开始是首项为 1、公差为 6 的等差数列，则

$$v_{6i-5}=1+7+13+\cdots+6i-5=3i^2-2i \tag{7}$$

同理

$$v_{6i-4}=2+8+14+\cdots+6i-4=3i^2-i \tag{8}$$

$$v_{6i-3}=3+9+15+\cdots+6i-3=3i^2 \tag{9}$$

$$v_{6i-2}=4+10+16+\cdots+6i-2=3i^2+i \tag{10}$$

$$v_{6i-1}=5+11+17+\cdots+6i-1=3i^2+2i \tag{11}$$

由此可见，当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，式(6)－式(11)给出了 $v_1,v_2,v_3,v_4,\cdots,v_{6n-5},v_{6n-4},v_{6n-3},v_{6n-2},v_{6n-1},v_{6n}$ 对应的表达式。由于 $v_0=1$，因此，

$$\begin{aligned}Q_{6n}&=v_0+\sum_{i=1}^{n}v_{6i-5}+\sum_{i=1}^{n}v_{6i-4}+\sum_{i=1}^{n}v_{6i-3}+\sum_{i=1}^{n}v_{6i-2}+\sum_{i=1}^{n}v_{6i-1}+\\&\quad\sum_{i=1}^{n}v_{6i}\\&=1+\sum_{i=1}^{n}(3i^2-2i)+\sum_{i=1}^{n}(3i^2-i)+\sum_{i=1}^{n}3i^2+\sum_{i=1}^{n}(3i^2+i)+\\&\quad\sum_{i=1}^{n}(3i^2+2i)+\sum_{i=1}^{n}(3i^2+3i+1)\\&=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)\end{aligned} \tag{12}$$

由引理 2 容易得出下列命题，该命题给出 n 分别为奇数、偶数时 S_{3n},v_{3n},v_{3n+1} 的表达式。

命题 2 $v_k=k+v_{k-6}(k\geqslant 6)$。$v_0=1,v_1=1,v_2=2,v_3=3,v_4=4,v_5=5$。

(1)当 $n=2m(m=1,2,3,\cdots)$ 时，则 $m=\frac{n}{2}$，

$$S_{3n}=S_{6m}=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)=1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(18i^2+3i+1) \tag{13}$$

由式(6)、式(7)可知

$$v_{3n}=v_{6m}=3m^2+3m+1=3(\frac{n}{2})^2+3(\frac{n}{2})+1 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}v_{3n+1}&=v_{6m+1}=v_{6(m+1)-5}=3(m+1)^2-2(m+1)\\&=3(\frac{n+2}{2})^2-2(\frac{n+2}{2})\end{aligned} \tag{15}$$

(2)当 $n=2m-1(m=1,2,3,\cdots)$ 时，则 $m=\frac{n+1}{2}$，

$$\begin{aligned}S_{3n}&=S_{6m-3}=S_{6m}-v_{6m-2}-v_{6m-1}-v_{6m}\\&=1+\sum_{i=1}^{m}(18i^2+3i+1)-v_{6m-2}-v_{6m-1}-v_{6m}\end{aligned}$$

由式(6)、式(10)、式(11)可知

$$\begin{aligned}S_{3n}&=1+\sum_{i=1}^{m}(18i^2+3i+1)-(3m^2+m)-(3m^2+2m)-\\&\quad(3m^2+3m+1)\\&=1+\sum_{i=1}^{m}(18i^2+3i+1)-(9m^2+6m+1)\\&=1+\sum_{i=1}^{m}(18i^2+3i+1)-(9(\frac{n+1}{2})^2+6(\frac{n+1}{2})+1)\\&=\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}(18i^2+3i+1)-9(\frac{n+1}{2})^2-6(\frac{n+1}{2})\end{aligned} \tag{16}$$

由式(9)、式(10)可知

$$v_{3n}=v_{6m-3}=3m^2=3(\frac{n+1}{2})^2 \tag{17}$$

$$v_{3n+1}=v_{6m-2}=3m^2+m=3(\frac{n+1}{2})^2+(\frac{n+1}{2}) \tag{18}$$

引理 3 (1)设 $M=1^2+2^2+3^2+\cdots+(\frac{a+1}{2})^2$，则 $M=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$。

(2)设 $N=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(\frac{a}{2})\times(\frac{a}{2}+1)$，则 $N=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$。

证明：(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(\frac{a+1}{2})^2=\frac{(\frac{a}{2})(\frac{a+1}{2})(a+2)}{6}=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$。

(2)$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(\frac{a}{2})\times(\frac{a}{2}+1)$ 的通项为 $(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})$，对其分别求和可得

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(\frac{a}{2})\times(\frac{a}{2}+1)=\frac{\frac{a}{2}(\frac{a}{2}+1)(a+1)}{6}+\frac{\frac{a}{2}(\frac{a}{2}+1)}{2}=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$$

由引理 1 的 1)、2)与引理 2、引理 3 可知

$$S_{6n}=Q_{6n}-M-N \tag{19}$$

根据引理 1 的 3)可知当 $6n+1\leqslant k\leqslant 9n$ 时，所有重量分别为 $2n+\frac{1}{3},2n+\frac{2}{3},2n+1,\cdots,3n-1,3n-\frac{2}{3},3n-\frac{1}{3},3n$ 的向量类的个数之和为

$$S_{3n}-v_{3n} \tag{20}$$

定理 1 当 n 为偶数时，$3n$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n}}$ 个，其中 $S_{9n}=\frac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}$。

证明：根据引理 1 及式(19)、式(20)可知

$$S_{9n}=S_{6n}+S_{3n}-v_{3n}=Q_{6n}-M-N+S_{3n}-v_{3n}$$

因 n 为偶数，故 $3n$ 为偶数，$3n-1$ 为奇数，根据引理 1 中 2)与引理 3 可知 $M=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$，其中，$a=3n-1$；$N=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$，其中，$a=3n$。

由式(12)知 $Q_{6n}=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)$，根据式(13)可得 $S_{3n}=1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(18i^2+3i+1)$，由式(14)知 $v_{3n}=3(\frac{n}{2})^2+3(\frac{n}{2})+1$，代入可得 $S_{9n}=\frac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}$。由于向量类所对应的函数值有 4 个，因此 $3n$ 元的对称四值函数的个数为 $4^{S_{9n}}$。

下面例 1、例 2 针对 $n=10$ 的情形，分别用不同的方法进行了计算，例 1 用的是直接计算法，例 2 用的是定理 1 的结论。

例 1 求 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$（其中 $n=10$）的对称四值函数的个数。

解：利用引理 1 的步骤可有如下结果

1)当 $0\leqslant k\leqslant 3n$ 时，通过式(1)可求得重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2,\frac{7}{3},\cdots,\frac{28}{3},\frac{29}{3},10$ 所对应的向量类的个数为 $1,1,2,3,4,5,7,8,10,12,\cdots,80,85,91$。

2)令 $k=3n+a$（其中 $1\leqslant a\leqslant 3n$），通过式(2)－式(4)可求得重量分别为 $\frac{31}{3},\frac{32}{3},11,\frac{34}{3},\cdots,\frac{59}{3},20$ 所对应的向量类的个数为 $96-1\times1,102-1\times2,108-2\times2,114-2\times3,\cdots,320-$

15×15,331−15×16,即 95,100,104,108,…,95,91。

3)令 $k=6n+b$,当 $6n+1\leqslant k\leqslant 9n$ 时,其与 $3n-1$ 到 0 时解的个数一样。通过式(5)可求得重量分别为 $\frac{61}{3},\frac{62}{3},21,\cdots,\frac{88}{3},\frac{89}{3},30$ 所对应的向量类的个数为 85,80,75,…,2,1,1。

对 1),2),3)求和则有

$$\underbrace{1+1+2+3+\cdots+80+85+91}_{0\sim 3n}+\underbrace{95+100+\cdots+95+91}_{3n+1\sim 6n}+\underbrace{85+80+75+\cdots+2+1+1}_{6n+1\sim 9n}=5456$$

即 $S_{9n}=5456$,而不同的向量类所对应的函数值有 4 个,所以,$\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 的对称四值函数有 4^{5456} 个。

例 2 求 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$(其中 $n=10$)的对称四值函数的个数。

解:运用定理 1 的公式可得

$$S_{9n}=\frac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}=\frac{9\times10^3+18\times10^2+11\times10+2}{2}=5456$$

而不同的向量类所对应的函数值有 4 个,所以,$\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 的对称四值函数有 4^{5456} 个。

例 2 与例 1 计算的结果一致,可见定理 1 的可行性以及简洁性。

定理 2 当 n 为奇数时,$3n$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n}}$ 个,其中 $S_{9n}=\frac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}$。

证明:由定理 1 可知 $S_{9n}=S_{6n}+S_{3n}-v_{3n}=Q_{6n}-M-N+S_{3n}-v_{3n}$,若 n 为奇数,那么 $3n$ 为奇数,$3n-1$ 为偶数。根据引理 1 的 2)与引理 3 可知,$M=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$,其中 $a=3n$;$N=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$,其中 $a=3n-1$。

由式(12)知 $Q_{6n}=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)$。

根据式(16)、式(17),得 $S_{3n}=\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}(18i^2+3i+1)-9(\frac{n+1}{2})^2-6(\frac{n+1}{2})$,$v_{3n}=3(\frac{n+1}{2})^2$

代入可得 $S_{9n}=\frac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}$。

而向量类所对应的函数值有 4 个,所以,$3n$ 元的对称四值函数的个数为 $4^{S_{9n}}$。

注 3:由定理 1、定理 2 可看出,无论 n 为奇数还是偶数,$3n$ 元的对称四值函数的个数都为 $4^{S_{9n}}$,其中 S_{9n} 的值是一样的。论证的不同之处在于:

(a)命题 2 中 S_{3n} 的不同,即式(13)、式(16)的取法不同;

(b)引理 3 中 M、N 的取法不同。但是其求和结果却是相同的。

采用类似于定理 1 的方法可以求出 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 的对称四值函数的个数,不妨设:

用 S_{9n+3} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,2n+\frac{1}{3},\cdots,3n,3n+\frac{1}{3},3n+\frac{2}{3},3n+1$ 的所有向量类的个数之和。

用 S_{6n+2} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,2n+\frac{1}{3},2n+\frac{2}{3}$ 的所有向量类的个数之和。

定理 3 当 n 为偶数时,$3n+1$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+3}}$ 个,其中 $S_{9n+3}=\frac{9n^3+27n^2+26n+8}{2}$。

证明:根据引理 1 可知 $S_{9n+3}=S_{6n+2}+S_{3n}=Q_{6n}+v_{6n+1}+v_{6n+2}-M-N+S_{3n}$,由式(12)可知 $Q_{6n}=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)$,由于 n 为偶数,则 $3n+1$ 为奇数,$3n$ 为偶数,根据引理 1 的 2)与引理 3 可知 $M=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$,其中 $a=3n+1$;$N=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$,其中 $a=3n$。

由式(13)可知 $S_{3n}=1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(18i^2+3i+1)$。

根据式(7)、式(8),$v_{6n+1}=v_{6(n+1)-5}=3(n+1)^2-2(n+1)$,$v_{6n+2}=v_{6(n+1)-4}=3(n+1)^2-(n+1)$,代入可得 $S_{9n+3}=\frac{9n^3+27n^2+26n+8}{2}$。而不同的向量类所对应的函数值有 4 个,所以,$3n+1$ 元的对称四值函数的个数为 $4^{S_{9n+3}}$。

当 n 为奇数时,有以下结论成立。

定理 4 当 n 为奇数时,$3n+1$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+3}}$ 个,其中 $S_{9n+3}=\frac{9n^3+27n^2+26n+8}{2}$。

注 4:定理 3 与定理 4 论证过程的差异类似于注 3。

同理可以求出 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}^n\to\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ 的对称四值函数的个数,不妨用 S_{9n+6} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,2n+\frac{1}{3},\cdots,3n+2-\frac{2}{3},3n+2-\frac{1}{3},3n+2$ 的所有向量类的个数之和。

用 S_{6n+4} 表示重量分别为 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\cdots,2n-\frac{1}{3},2n,2n+\frac{1}{3},2n+\frac{2}{3},2n+1,2n+\frac{4}{3}$ 的所有向量类的个数之和。

定理 5 当 n 为偶数时,$3n+2$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+6}}$ 个,其中 $S_{9n+6}=\frac{9n^3+36n^2+47n+20}{2}$。

证明:根据引理 1 可知

$$\begin{aligned}S_{9n+6}&=S_{6n+4}+S_{3n}+v_{3n+1}\\&=Q_{6n}+v_{6n+1}+v_{6n+2}+v_{6n+3}+v_{6n+4}-M-N+S_{3n}+v_{3n+1}\end{aligned}$$

由式(12)可知 $Q_{6n}=1+\sum_{i=1}^{n}(18i^2+3i+1)$,由于 n 为偶数,则 $3n+1$ 为奇数,$3n+2$ 为偶数,根据引理 1 的 2)与引理 3 可知 $M=\frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$,其中 $a=3n+1$;$N=\frac{a(a+2)(a+4)}{24}$,其中 $a=3n+2$。

由式(13)可知 $S_{3n}=1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(18i^2+3i+1)$;根据式(15) $v_{3n+1}=3(\frac{n+2}{2})^2-2(\frac{n+2}{2})$;由式(7)−式(10)可知 $v_{6n+1}=$

(下转第 148 页)

Lu Qiang, He Xiong-xiong, Feng Yuan-jing, et al. Clustering Routing Protocol Based on Competition Mechanism for Wireless Sensor Network[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2010, 23(2): 245-250

[8] Bajaber F, Awan I. Energy efficient clustering protocol to enhance lifetime of wireless sensor network[J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2010, 1(4): 239-248

[9] 周冬鑫,金文光,容志能. 基于分层的无线传感网络多跳分簇路由算法[J]. 传感技术学报,2011,24(1):73-78
Zhou Dong-xin, Jin Wen-guang, Rong Zhi-neng. Layer Based Mult-iHop Clustering Routing Algorithm for Wireless Sensor Networks[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2011, 24(1): 73-78

[10] 任智,王青明,郭晓金. 无线传感器网络中基于最小跳数路由的节点休眠算法[J]. 计算机应用,2011,31(1):194-197,201
Ren Zhi, Wang Qing-ming, Guo Xiao-jin. Node Sleeping Algorithm for Wireless Sensor Networks based on Minimal hop Routing Protocol[J]. Journal of Computer Applications, 2011, 31(1): 194-197, 201

[11] 蒋鹏,陈峰. 基于冗余节点休眠和分阶段唤醒策略的传感器网络三维覆盖控制方法[J]. 电子与信息学报,2009,31(12):2807-2812
Jiang Peng, Chen Feng. 3D Coverage Scheme Based on Hibernation of Redundant Nodes and Phased Waking-up Strategy for Wireless Sensor Networks[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2009, 31(12): 2807-2812

[12] 李涵,吴秋新,王小妮. 基于分簇的无线传感器网络多跳路由算法[J]. 计算机科学,2014,41(6):252-254
Li Han, Wu Qiu-xin, Wang Xiao-ni. Multi-hop Routing Algorithm Based on Clustering in WSN[J]. Computer Science, 2014, 41(6): 252-254

[13] Oliveira L B, Ferreira A, Vilaça M A, et al. SecLEACH—On the security of clustered sensor networks[J]. Signal Processing, 2007, 87(12): 2882-2895

(上接第 133 页)

$v_{6(n+1)-5}=3(n+1)^2-2(n+1)$,$v_{6n+2}=v_{6(n+1)-4}=3(n+1)^2-(n+1)$,$v_{6n+3}=v_{6(n+1)-3}=3(n+1)^2$,$v_{6n+4}=v_{6(n+1)-2}=3(n+1)^2+(n+1)$;代入可得 $S_{9n+6}=\dfrac{9n^3+36n^2+47n+20}{2}$。而向量类所对应的函数值有 4 个,所以,$3n+2$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+6}}$ 个。

当 n 为奇数时,有以下结论成立。

定理 6 当 n 为奇数时,$3n+2$ 元的对称四值函数共有 $4^{S_{9n+6}}$ 个,其中 $S_{9n+6}=\dfrac{9n^3+36n^2+47n+20}{2}$。

注 5:定理 5 与定理 6 论证的不同之处同理类似于注 3。

4 对称逻辑公式在逻辑度量空间中的分布

定理 7 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随着 n 的增大而趋向于 0。

证明:由定理 1—定理 6 可知不同的 n 元对称逻辑公式至多有 $4^{S_{9n}}$ 个,以定理 1 为例,$S_{9n}=\dfrac{9n^3+18n^2+11n+2}{2}$,而全体 n 元四值 R_0 函数至少有 4^{4^n} 个,显然 $4^{S_{9n}}$ 与 4^{4^n} 之比随着 n 的增大趋向于 0。

同理,定理 2—定理 6 也满足:n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随着 n 的增大而趋向于 0。

结束语 本文将对称函数的概念引入到逻辑系统 L_4^*,运用 Matlab 研究了对称逻辑公式的计数问题,得出了 $3n$ 元、$3n+1$ 元、$3n+2$ 元对称逻辑公式的个数;证明了 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随着 n 的增大而趋向于 0。关于 L_4^* 中对称逻辑公式的真度之集在[0,1]中的稠密性及相关性质,将四值 R_0 函数推广至更一般的 n 值 R_0 函数,是否可以继续使用 Matlab 来实现其计数问题,笔者将在另文中讨论。

参考文献

[1] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京:科学出版社,2006
Wang Guo-jun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle (2nd Edition)[M]. Beijing: Science in China Press, 2006

[2] 王国俊,傅丽,宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学(A 辑),2001,31(11):998-1008
Wang Guo-jun, Fu Li, Song Jian-she. Theory of truth degrees of propositions in two-valued propositional logic[J]. Science in China(ser. A), 2001, 31(11): 998-1008

[3] Wang Guo-jun, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(1): 71-91

[4] Ying Ming-sheng. A logic for approximate reasoning [J]. Journal of Symbolic Logic, 1994, 59: 830-837

[5] Pei Dao-wu, Wang G J. The extensions L_n^* of formal systems L_n^* and their completeness [J]. Information Sciences, 2003, 152: 155-166

[6] 王国俊,惠小静. 概率逻辑学基本定理的推广[J]. 电子学报,2007,35(7):1333-1340
Wang Guo-jun, Hui Xiao-jing. Generalization of fundamental theorem of probability logic and its application[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(7): 1333-1340

[7] 惠小静,王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学(E 辑)2007,37(6):801-812
Hui Xiao-jing, Wang Guo-jun. Randomization of classical inference patterns and its application[J]. Science in China(ser. E), 2007, 37(6): 801-810

[8] 胡明娣,王国俊. 对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布[J]. 电子学报,2011,39(2):419-423
Hu Ming-di, Wang Guo-jun. Distribution of the symmetrical logic formulas in the classical logic metric space[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 419-423

[9] 王庆平,王国俊. 对称逻辑公式在 L_3^* 逻辑度量空间中的分布[J]. 计算机学报,2011,34(1):105-114
Wang Qing-ping, Wang Guo-jun. Distribution of the symmetrical logic formulas in the L_3^*-logic metric space[J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(1): 105-114

[10] 王庆平. L_3^* 中逻辑公式的范式表示及对称逻辑公式的构造方法[J]. 计算机学报,2013,36(4):851-861
Wang Qing-ping. The normal form of logic formulae and construction method of symmetrical logic formulae in L_3^* [J]. Chinese Journal of Computers, 2013, 36(4): 851-861