人工蜂群算法的几乎必然强收敛性：鞅方法

孔翔宇[1,2] 刘三阳[1] 王 贞[2]
（西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710071）[1] （北方民族大学数学与信息科学学院 银川 750021）[2]

摘 要 已有的人工蜂群算法的收敛性分析是基于算法的遍历性分析，在概率收敛意义下考虑的，这种收敛性分析不能确保算法在有限步内收敛到问题的全局最优解。首次尝试运用鞅论研究人工蜂群算法的几乎必然强收敛性，证明了人工蜂群算法确保能以概率 1 在有限步内达到全局最优解。这一结论为拓宽人工蜂群算法的应用范围奠定了理论基础，并为人工蜂群算法的改进及收敛性研究提供了新的理论工具。

关键词 人工蜂群算法，马尔可夫链，鞅，全局收敛，局部收敛
中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.9.047

Almost Sure Convergence of Artificial Bee Colony Algorithm: A Martingale Method

KONG Xiang-yu[1,2] LIU San-yang[1] WANG Zhen[2]
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)[1]
(School of Mathematics and Information Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China)[2]

Abstract The most convergence analysis on artificial bee colony(ABC) algorithm is based on ergodicity analysis and conducted in the sense of probabilistic convergence. Such analysis cannot infer in general that the ABC algorithm will be convergent to a global optimum in a finite number of evolution steps. In this paper, a martingale analysis method was proposed to study the almost sure convergence of ABC algorithm. It is shown that ABC algorithm can surely converge to a global optimum with probability 1 in a finite number of evolution steps. The obtained results underlie application of the ABC algorithm, and the suggested martingale analysis method provides a new technique for convergence analysis of ABC algorithm.

Keywords Artificial bee colony algorithm, Markov chain, Martingale, Global convergence, Local convergence

1 前言

人工蜂群算法（ABC）[1]是 2005 年由 Karaboga 提出的一种新兴智能优化算法，具有控制参数少、容易实现和计算简单等优点，现已引起了国内外学者的广泛关注。通过比较研究发现：ABC 算法较其他智能优化算法具有更好的优化性能，因此该算法已广泛应用于函数优化[2,3]和工程领域[4-8]等问题中。同时根据实际问题的特殊性，也有学者提出了一些改进算法[9-11]。在这些研究中，算法的有效性均通过仿真实验来说明，未能从理论上深入阐述。虽然 ABC 算法在实际应用中取得了很大的成功，但其数学理论基础还未能建立起来。与其他仿生智能优化算法[12-15]相比，ABC 算法的依概率收敛、几乎处处强收敛等一般收敛性分析研究还不够深入，在很大程度上限制了 ABC 算法的改进与发展。

近年来有学者给出了 ABC 算法的收敛性证明[16]，其主要结果依赖 Markov 链的数学模型分析，证明了算法是以概率 1 收敛，即算法迭代次数趋于无穷时，一定能收敛到最优解。本文首次在 ABC 算法的 Markov 链分析中引入鞅理论，取代 Markov 链的遍历性分析，讨论 ABC 算法的强收敛性。特别地，通过把 ABC 算法进化过程转化为下鞅，证明了算法的几乎必然强收敛性，即确保在有限步数内能以概率 1 收敛到问题的全局最优解。证明中所使用的鞅理论分析方法为 ABC 算法的收敛性分析提供了新的工具，从而为 ABC 算法的应用与发展奠定了坚实的理论基础。

2 人工蜂群算法

ABC 算法中，种群由雇佣蜂、跟随蜂和侦察蜂 3 类人工蜂组成，其中雇佣蜂和跟随蜂数量各占种群数量的一半。雇佣蜂搜索蜜源并将蜜源信息与其他蜜蜂分享，跟随蜂则根据雇佣蜂提供的蜜源信息选择蜜源进行开采，雇佣蜂和跟随蜂的采蜜过程也即寻找问题最优解的过程。当蜜源被放弃时，该蜜源所对应的雇佣蜂转变为侦察蜂，探索的新蜜源替代被放弃的蜜源，增加种群多样性，防止陷入局部最优解。与雇佣蜂对应的蜜源代表问题可行解集，蜜源质量代表解的优劣，用适应度值 fit_i 表示。在问题的可行域内，算法使用随机初始化生成初始种群，种群数量为 SN，问题维数为 d，d 维的向量

到稿日期：2014-09-19 返修日期：2014-12-09 本文受国家自然科学基金（61373174），宁夏自然科学基金（NZ13096），宁夏高等学校科研项目（NGY2013086），北方民族大学校级项目（2014XBZ01）资助。

孔翔宇（1982－），男，博士生，讲师，主要研究方向为智能计算、最优化理论与方法，E-mail：kxywz08@163.com；刘三阳（1959－），男，博士，教授，主要研究方向为最优化理论与方法；王 贞（1983－），女，博士生，讲师，主要研究方向为群智能算法、金融数学。

$x_i(i=1,2,\cdots SN)$表示初始种群中的一个解。之后，人工蜂群重复循环使用雇佣蜂、跟随蜂和侦察蜂的搜寻过程，直到达到算法的停止准则要求。

在搜索中雇佣蜂和跟随蜂按照下式产生一个新蜜源位置，即新解：

$$v_{ij}=x_{ij}+\varphi_{ij}(x_{ij}-x_{kj}) \tag{1}$$

其中，$k\in(1,2,\cdots SN)$，$j\in(1,2,\cdots d)$，且 $k\neq i$；φ_{ij} 为$[-1,1]$之间的随机数。按照贪婪法则在新蜜源和旧蜜源中进行选择，若新蜜源的适应值 fit_i 比旧蜜源好，则用新蜜源代替旧蜜源；反之则保留旧蜜源。当雇佣蜂完成搜寻过程后，用跳摇摆舞的方式在舞蹈区将蜜源质量和位置的相关信息传递给跟随蜂。跟随蜂根据式(2)计算选择蜜源的概率，用轮盘赌法则在所有蜜源中进行选择并使用式(1)进行蜜源更新：

$$p_i=fit_i/\sum_{k=1}^{SN}fit_k \tag{2}$$

若所有跟随蜂完成搜寻过程之后有蜜源通过有限次循环不能被更新，则该蜜源被放弃，与此对应的雇佣蜂变为侦察蜂，搜索新蜜源。新蜜源由式(3)产生：

$$x_{ij}=x_{\min j}+rand(0,1)(x_{\max j}-x_{\min j}) \tag{3}$$

其中，$j\in(1,2,\cdots D)$。然后返回雇佣蜂搜索过程，开始新一轮迭代。

对于优化问题，分两种情况考虑。设 $f(\cdot)$是优化问题的目标函数，若优化问题是最小值问题，适应值用式(4)进行计算：

$$fit(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+f(x_i)}, & f(x_i)>0\\ 1+\mathrm{abs}(f(x_i)), & f(x_i)\leqslant 0\end{cases} \tag{4}$$

若优化问题是最大值问题，则用目标函数值表示适应值。

ABC 算法进行贪婪选择按下式进行：

$$v_i=\begin{cases}v_i, & fit(v_i)>fit(x_i)\\ x_i, & fit(v_i)\leqslant fit(x_i)\end{cases} \tag{5}$$

以后若无特殊说明，都按优化最小值问题进行研究。

3 人工蜂群算法的 Markov 链模型

首先给出一些数学描述和定义，来阐述 ABC 算法的 Markov 链模型。

定义 1 设 X 表示一个集合，其序数为$|X|$，依人工蜂群算法的术语，包含有限个元素的集合 s 中的元素称为个体，用字母 $i,j,k,\cdots$，表示，设 m 为正整数，则所考虑的 Markov 链的状态空间取为 $S=s\times s\times\cdots\times s$，其元素被称为种群，用字母 $x,y,z,\cdots$表示，即：

$$S=\{(x_1,x_2,\cdots x_m)\mid x_k\in s,1\leqslant k\leqslant m\}$$

其中，m 称为种群规模。

定义 2 称 E 上定义的任何非负实值函数 f 是一个适应性函数，则可定义全局最优适应值 $f^*=\max\{f(i)\mid i\in s\}$，全局最优个体集 $B^*=\{i\in s\mid f(i)=f^*\}$，每个个体都是全局最优个体的种群 $F^*=\{x\in S\mid x_k\in B^*,1\leqslant k\leqslant m\}$。

定义 3 人工蜂群算法迭代过程中，对于任意两个状态 $X_i\in s$，$X_j\in s$，人工蜂由 X_i 一步转移至 X_j，记为 $T_s(X_i)=X_j$。

定理 1 人工蜂群算法迭代过程中，人工蜂由状态 X_i 转移至状态 X_j 的一步转移概率 $p(T_s(X_i)=X_j)$可由式(6)来计算：

$$p(T_s(X_i)=X_j)$$
$$=\begin{cases}p_e(T_s(X_i)=X_j), & \text{由雇佣蜂实现}\\ p_o(T_s(X_i)=X_j), & \text{由跟随蜂实现}\\ p_s(T_s(X_i)=X_j), & \text{由侦察蜂实现}\\ p_e(T_s(X_i)=X_j)\times p_o(T_s(X_i)=X_j), & \\ \quad\text{由雇佣蜂和跟随蜂共同实现} & \end{cases} \tag{6}$$

证明：证明过程详见文献[16]。

ABC 算法是人工蜂群通过雇佣蜂、跟随蜂、侦察蜂不同角色之间的交流转换来实现的，所以由雇佣蜂、跟随蜂、侦察蜂的一步转移概率共同决定人工蜂的一步转移概率 $p(T_s(X_i)=X_j)$。

定义 4 在算法迭代过程中，对于人工蜂群的任意两个状态 $s_i\in S$，$s_j\in S$，从 s_i 一步转移至 s_j 记为 $T_S(s_i)=s_j$。则人工蜂群从 s_i 转移至 s_j 的一步转移概率为：

$$p(T_S(s_i)=s_j)=\prod_{m=1}^{SN}p(T_s(X_{im})=X_{jm})$$

即：人工蜂群从状态 s_i 转移至 s_j 的一步转移概率为蜂群 s_i 内所有的人工蜂状态同时变成蜂群 s_j 内所有的人工蜂状态的概率。

4 收敛性分析

本节将运用鞅收敛定理来考察人工蜂群算法的几乎必然强收敛性。为了比较，将首先引进如下定义。

4.1 依概率收敛

定义 5[17] 如果$\lim\limits_{n\to\infty}p([X^n\cap F^*]\neq\varnothing)=1$，则称人工蜂群算法$\{X^n\}$为依概率弱收敛到全局最优；若$\lim\limits_{n\to\infty}p([X^n\subset F^*])=1$，则称人工蜂群算法$\{X^n\}$为依概率强收敛到全局最优。

定义 6[17] 若 $p(\lim\limits_{n\to\infty}[X^n\cap F^*\neq\varnothing])=1$，则称人工蜂群算法$\{X^n\}$为几乎必然弱收敛到全局最优；若 $p(\lim\limits_{n\to\infty}[X^n\subset F^*])=1$，则称人工蜂群算法$\{X^n\}$为几乎必然强收敛到全局最优。

定理 2 人工蜂群算法种群状态序列$\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$是有限齐次马尔可夫链。

证明：(1)搜索空间对任何优化算法来说都是有限的，人工蜂群算法中任意人工蜂群状态中的 X_i 也都是有限的。单个个体的状态空间有限且离散。一个种群具有 SN 个个体，SN 为有限正整数，而空间的状态 $s=(X_1,X_2,\cdots X_{SN})$由 SN 个个体状态组成，所以种群状态空间 S 是有限的。

(2)由定义 4 得到种群状态序列$\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$中任意两个种群的状态 $s(t-1)=(X_{1,(t-1)},X_{2,(t-1)},\cdots X_{SN,(t-1)})$，$s(t)=(X_{1,t},X_{2,t},\cdots X_{SN,t})$，它们之间的转移概率表示为：

$$p(T_S(s(t-1))=s(t))=\prod_{m=1}^{SN}p(T_s(X_{(t-1),m})=X_{t,m})$$

由定理 1 可知，蜂群内任一人工蜂的转移状态 $p(T_s(X(t-1))=X(t))$仅与 $t-1$ 时刻的状态 $X(t-1)$、随机可行解 X_k、随机参数 φ_{ij} 和优化问题有关，所以一步状态转移概率 $p(T_S(s(t-1))=s(t))$也仅与 $t-1$ 时刻的状态相关，即人工蜂群状态序列$\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$具有马尔可夫性。又因状态空间为可列集，故人工蜂群状态序列构成一个有限马尔可夫链。

(3)由定理 1 可知，一步状态转移概率 $p(T_s(X(t-1))=X(t))$仅与 $t-1$ 时刻的状态 $X(t-1)$有关，而与 $t-1$ 无关，因此人工蜂群算法种群状态序列$\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$是有限齐次马尔可夫链。

证毕。

定理 3 人工蜂群算法能以概率 1 收敛到全局最优。

证明：证明过程详见参考文献[16]。

4.2 几乎必然强收敛

根据上述讨论，可以发现几乎必然收敛性明显强于依概率收敛性。人工蜂群算法收敛性已有的证明结果属于依概率收敛，是弱大数律范畴。为了得到更强的收敛性结论，下面将证明人工蜂群算法的几乎必然强收敛性。为了阐述这一结论，先引入如下定义。

定义 7[17] 若对 $\forall i\in C$，有 $\sum\limits_{j\in C}p_{ij}=1$，即自 C 内任意一点出发，始终不能达到 C 外的任意状态，则称状态空间 C 为闭集。

定义 8[17] 若闭集 C 无真闭子集，则称 C 为不可约的，否则称 C 为可约的。

定义 9[17] 设 $\{Y_k,k\geqslant 0\}$ 与 $\{Z_k,k\geqslant 0\}$ 是两个随机过程，称 $\{Y_k,k\geqslant 0\}$ 关于 $\{Z_k,k\geqslant 0\}$ 是一个上（或下）鞅，如果：

(1)$E|Y_k|<\infty$；

(2)$E(Y_{k+1}|Z_0,Z_1,\cdots,Z_k)\leqslant Y_k$（或 $E(Y_{k+1}|Z_0,Z_1,\cdots,Z_k)\geqslant Y_k$）；

(3)$\{Y_k,k\geqslant 0\}$ 是 $Z_0,Z_1,\cdots,Z_k$ 的函数。

Doob 证明了下鞅收敛定理[17,18]，为了方便分析，给出其结论。

定理 4 设 $\{Y_k,k\geqslant 0\}$ 是一个下鞅，$\sup\limits_k E|Y_k|<\infty$，则存在一个随机变量 $Y^*\in\{Y_k,k\geqslant 0\}$，使得 $E|Y^*|<\infty$，且 $Y_k\xrightarrow{a.s.}Y^*$，即 $p\{\lim\limits_{k\to\infty}Y_k=Y^*\}=1$。

从直观上来说，人工蜂群算法的目的是找到一个最优状态 $S(t)$，所以可以把目标函数转换成适应值函数，写成 $F(S_t)$，从而可以利用 $S(t)$ 的 Markov 过程相关结论。下面设法把人工蜂群算法的随机过程 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 转变成为一个下鞅来考察 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 的收敛性。

命题 1 状态空间 S 是一个可约闭集。

证明：由定理 3 和定义 7 可知，F^* 为有限闭集，又因 $F^*\subset S$，由定义 8 知 S 为可约的。由定理 2 可知 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 为一离散空间上的有限齐次马尔可夫过程，则由马尔可夫过程的性质，有 $\forall i\in S$，$\sum\limits_{j\in S}p_{ij}=1$，再由定义 7 可知 S 为一个闭集。

由马尔可夫过程的状态空间分解定理，若 S 是可约闭集，则可以把闭集 S 分解成为两块，一块是 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 的收敛空间 Q，另一块是 $S-Q$，其中 $Q=\{S_{t+1}|F(S_{t+1})\geqslant F(S_t)\}$。

命题 2 Q 为收敛空间的一个闭集。

证明：由集合 Q 的定义，所有满足 $F(S_{t+1})\geqslant F(S_t)$ 的状态全被限制在集合 Q 中，而所有满足 $F(S_{t+1})<F(S_t)$ 的状态全被限制在集合 $S-Q$ 中。因此，在集合 Q 中不能找到满足条件 $F(S_{t+1})<F(S_t)$ 的状态，即集合 Q 中任意一个状态的后继状态只能在集合 Q 中，而不能在集合 Q 外，即 $\forall i\in Q$，$\sum\limits_{j\in S-Q}p_{ij}=0$，所以有 $\forall i\in Q$，$\sum\limits_{j\in Q}p_{ij}=1$，即集合 Q 是一个闭集，且 $Q\in S$。

上述做法的目的是将 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 构成的有限齐次马尔可夫过程限制在其全状态空间 S 的闭子集 Q 中，即：集合 Q 外的任意状态构成状态空间的反射壁，将其他所有满足 $F(S_{t+1})\geqslant F(S_t)$ 的状态约束在其内，由随机过程相关理论可知，这等同于状态的限制运动边界，与桶的边缘类似。

命题 3 随机过程 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 是一个非负有界下鞅，即对 $\forall k\geqslant 0$，有 $E(F(S_{t+1})|S_0,S_1,\cdots,S_t)\geqslant F(S_t)$。

证明：显然 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 是非负有界，根据定理 2 的马尔可夫性，可得 $E(F(S_{t+1})|S_0,S_1,\cdots,S_t)=E(F(S_{t+1})|S_t)$，故只需要证明对 $\forall x\in S$ 有：

$$E(F(S_{t+1})|S_t=x)\geqslant F(x),t\geqslant 0 \tag{7}$$

又根据随机过程相关理论，有 $E(F(S_{t+1})|S_t=x|)=\sum\limits_{y\in S}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)$。根据定理 2 的证明，我们得出人工蜂群算法所限定的状态就为反射壁，将其他状态约束与条件 $F(x_{t+1})\geqslant F(x_t)$ 限定在状态内，故有：

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in S}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\\&=\sum_{y\in Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)+\\&\quad\sum_{y\in S-Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\\&=\sum_{y\in Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)+\sum_{y\in S-Q}F(y)\cdot 0\\&=\sum_{y\in Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\end{aligned}$$

因为状态 x 的任意后继状态 y 满足对 $\forall y\in Q$，有 $F(S_{t+1}=y)\geqslant F(S_t=x)$，所以：

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\\&\geqslant\sum_{y\in Q}F(x)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\\&=F(x)\sum_{y\in Q}p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\end{aligned}$$

又因 Q 是闭集，所以有 $\sum\limits_{y\in Q}p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)=1$。从而得到 $\sum\limits_{y\in Q}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\geqslant F(x)$，即 $\sum\limits_{y\in S}F(y)p_t(S_{t+1}=y|S_t=x)\geqslant F(x)$，所以有 $E(F(S_{t+1})|S_t=x)\geqslant F(x)$，所以式(7)得证，即 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{S_t,t\geqslant 0\}$ 为一个非负有界下鞅。

命题 4 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 几乎处处强收敛到全局最优解集 F^*。

证明：由定理 3 可知，$\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 以概率 1 收敛到全局最优解集 F^*，又由命题 3 可知 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 为一个非负有界下鞅，根据定理 4，$\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 几乎处处强收敛到全局最优解集 F^*。

结束语 由本文的命题 4 可知，$S_k\xrightarrow{a.s.}F^*$，且 $|S|$ 仅包含有限个不同点，根据 Egoroff[18] 定理可以推导出 $\{F(S_t),t\geqslant 0\}$ 具有潜在的一致收敛性，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$。如果 $k\geqslant N(\varepsilon)$，则 $\forall X\in F^*$，$|X_k-X|<\varepsilon$，即 $X_k(\varepsilon)\subset F^*$，说明 ABC 算法确保能够以概率 1 在有限步内（$N(\varepsilon)$）收敛到问题的全局最优解，即 $p\{\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=N}^{\infty}(X_k\subset F^*)\}=1$。

已有文献证明了算法是以概率 1 收敛的，即算法迭代次数趋于无穷时，一定能收敛到最优解。本文引入鞅理论对人工蜂群算法的收敛性进行了分析研究。通过将人工蜂群算法所形成的状态序列转化为鞅过程进行分析，得出人工蜂群算法几乎必然强收敛到全局最优解集。与已有结论相比，得到了算法更强的收敛性证明结果。对人工蜂群算法改进形式的收敛性研究将作为后续的主要研究工作。

参 考 文 献

[1] Karaboga D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization[R]. Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005

[2] Dervis K, Bahriye A. A comparative study of artificial bee colony algorithm[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 214(1): 108-132

（下转第 277 页）

on Gaussian mixture model [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum electronics, 2013, 20(2)

[10] Kafieh R, Rabbani H, Abramoff M D, et al. Intra-retinal layer segmentation of 3D optical coherence tomography using coarse grained diffusion map [J]. Medical Image Analysis, 2013, 17 (8): 907-928

[11] Wu X D, Chen D Z. Optimal Net Surface Problems with Applications [C]// Proceedings of the 29th Int'l Colloquium Automata, Languages and Programming (ICALP). Berlin Heidelberg, German: Springer-Verlag, 2002: 1029-1042

[12] Chiu S J, Li X T, Nicholas P, et al. Automatic segmentation of seven retinal layers in SDOCT images congruent with expert manual segmentation [J]. Optics Express, 2010, 18(18): 19413-19428

[13] Chiu S J, Izatt J A, O'Connel R V, et al. Validated Automatic Segmentation of AMD Pathology including Drusen and Geographic Atrophy in SDOCT Image [J]. Investigative ophthalmology & visual science, 2012, 53(1): 53-61

[14] Abràmoff M D, Lee K, Niemeijer M, et al. Automated segmentation of the cup and rim from spectral domain OCT of the optic nerve head [J]. Investigative Ophthalmology & Visual Science, 2009, 50: 5778-5784

[15] Lee K, Niemeijer M, Garvin M K, et al. Segmentation of the optic disc in 3-D OCT scans of the optic nerve head [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2010, 29(1): 159-168

[16] Quellec G, Lee K, Dolejsi M, et al. Three-dimensional analysis of retinal layer texture: identification of fluid-filled regions in SD-OCT of the macula [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2010, 29(6), 1321-1330

[17] Haeker M, Abràmoff M D, Wu X, et al. Use of varying constraints in optimal 3-D graph search for segmentation of macular optical coherence tomography images [C]// Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention. 2007: 244-251

[18] Garvin M K, Abràmoff M D, Wu X, et al. Automated 3-D intraretinal layer segmentation of macular spectral-domain optical coherence tomography images [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009, 28(9): 1436-1447

[19] Dufour P A, Ceklic L, Abdillahi H, et al . Graph-Based Multi-Surface Segmentation of OCT Data Using Trained Hard and Soft Constraints [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2013, 32(3): 531-543

[20] Song Qi, Bai Jun-jie, Garvin M K, et al. Optimal multiple Surface Segmentation with Shape and Context Priors [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2013, 32(2): 376-386

[21] Götzinger E, Pircher M, Geitzenauer W, et al. Retinal pigment epithelium segmentation by polarization sensitive optical coherence tomography [J]. Opt Express, 2008, 16(21): 16410-16422

[22] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images[C] // Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Computer Vision. Bombay, India, 1998: 839-846

(上接第 248 页)

[3] Zhu Guo-pu, Sam K. Gbest-guided artificial bee colony algorithm for numerical function optimization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(7): 3166-3173

[4] Xu C, Duan H, Liu F. Chaotic artificial bee colony approach to uninhabited combat air vehicle(ucav) path planning[J]. Aerospace Science and Technology, 2010, 14(8): 525-541

[5] Szeto W Y, Wu Yong-zhong, Ho S C. An artificial bee colony algorithm for the capacitated vehicle routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2011, 215(1): 126-135

[6] Omkar S N, Senthilnath J, Rahul Khandelwal, et al. Artificial bee colony (ABC) for multi-objective design optimization of composite structures[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(1): 489-499

[7] Akdagli A, Toktas A. A novel expression in calculating resonant frequency of h-shaped compact microstrip antennas obtained by using artificial bee colony algorithm[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 2010, 24(14/15): 2049-2061

[8] Karaboga D, Ozturk C. A novel clustering approach: artificial bee colony(ABC) algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(1): 652-657

[9] Gao W, Liu S. Improved artificial bee colony algorithm for global optimization [J]. Information Processing Letters, 2011, 111 (17): 871-882

[10] 罗钧,李研.具有混沌搜索策略的蜂群优化算法[J].控制与决策,2010,25(12):1913-1916
Luo J, Li Y. Artificial bee colony algorithm with chaoticsearch strategy[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1913-1916

[11] Gao Wei-feng, Liu San-yang. A modified artificial bee colony algorithm[J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(3): 687-697

[12] 徐宗本,聂赞坎,张文修.遗传算法的几乎必然强收敛性—鞅方法[J].计算机学报,2002,25(8):785-793
Xu Zong-ben, Nie Zan-kan, Zhang Wen-xiu. Almost Stile convergence of genetic algorithms: a martingale approach[J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(8): 785-793

[13] 王霞,周国标.整体退火遗传算法的几乎处处强收敛性[J].应用数学,2003,16(3):1-7
Wang Xia, Zhou Guo-biao. Strong convergence(a. s.) of global annealing genetic algorithm[J]. Mathenatica Applicata, 2003, 16 (3): 1-7

[14] 罗小平,韦巍.生物免疫遗传算法的几乎处处强收敛性分析及收敛速度估计[J].电子学报,2005,33(10):1803-1807
Luo Xiao-ping, Wei Wei. The analysis on strong convergence(a. s.) and convergence rate estimate ofinlnlune genetic algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(10): 1803-1807

[15] 苏兆品,蒋建国,梁昌勇,等.蚁群算法的几乎处处强收敛性分析[J].电子学报,2009,37(8):1646-650
Su Zhao-pin, Jiang Jian-guo, Liang Chang-yong, et al. An Almost Everywhere Strong Convergence Proof for a Class of Ant Colony Algorithms[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(8): 1646-1650

[16] 宁爱平,张雪英.人工蜂群算法的收敛性分析[J].控制与决策,2013,28(10):1554-1558
Ning A P, Zhang X Y. Convergence analysis of artificial bee colony algorithm[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1554-1558

[17] 张波,张景肖.应用随机过程[M].北京:清华大学出版社,2004
Zhang Bo, Zhang Jing-xiao. Applied Stochastic Processes[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004

[18] Edward P C K. An Introduction to Stochastic Processes [M]. Belmont, Calif. : Duxbury Press, 1997