

基于加权子空间投影的谱估计器分辨力研究

包建东 徐威利 胡伟伟 谢小敏

(南京理工大学机械工程学院 南京 210094)

摘要 针对常规子空间类算法在低信噪比、小快拍数情况下分辨力差的问题,分别对信号和噪声子空间提出加权投影算法来加以改善。对于信号子空间,采用主特征值与噪声功率之差的倒数对其特征向量加权;对于噪声子空间,将导向矢量在噪声子空间正交基各元素上的投影值作为权值,对正交基各元素加权。仿真实验表明,这两种算法能有效降低信源分辨的信噪比和快拍数门限,在低信噪比与小快拍条件下具有较好的分辨力和测量精度。

关键词 DOA 估计,子空间投影,加权算法,高分辨

中图分类号 TN911.7 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.9.016

Improving Resolution Ability of Spectral Estimator by Weighted Subspace Projection

BAO Jian-dong XU Wei-li HU Wei-wei XIE Xiao-min

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract In order to improve the decreasing resolution ability under the environments like low signal noise ratio and small number of snapshots, two weighted projection methods were proposed respectively to signal subspace and noise subspace. The weighted values of signal subspace are reciprocal of margins between principle eigenvalues and noise power, and respective eigenvectors are weighted with them. To noise subspace, the elements of orthonormal basis are weighted with projection values which are gained by projecting integral value of steering vector in field of view to each element of orthonormal basis. Simulation results show that the proposed methods can decrease signal noise ratio threshold and snapshots threshold, so they have better resolution ability and higher precision in deficient snapshot and low signal noise ratio scenario.

Keywords Direction of arrival estimation(DOA estimation), Subspace projection, Weighted algorithm, High resolution

1 引言

波达方向估计是阵列信号处理领域内的一个重要分支,在近年来得到迅速发展,已被用于雷达、通信、地震、声呐、生物医学工程等众多领域^[1,2]。目前主要的方法大致包括波束形成算法^[3]、基于子空间的高分辨算法^[4]、最大似然^[5]及子空间拟合算法^[6]。其中,子空间类算法由于具有高分辨和适中的计算量等优势,逐渐成为研究的热点。但是在应用过程中发现,该类算法在低信噪比、小快拍的条件下,不能准确估计方位相近的信源位置,针对这一问题,国内外学者开展了深入研究。McCloud^[7]等人提出的 SSMUSIC 算法通过对信号协方差矩阵广义逆进行投影搜索得到结果;Xavier Mestre^[8]等人提出的 G-estimation 算法采用分离特征值的方法提高子空间估计精度;王布宏^[9]等人提出的 LSP 算法是噪声子空间加权算法,权值是信源大致方位内导向矢量相关矩阵的主子空间在快拍数据噪声子空间上的投影值;游鸿^[10]等人提出的 SSM 算法采用信号子空间主特征值倒数对导向矢量在其上的投影加权得以实现;司伟建^[11]等人通过对空间谱函数求二阶导,搜索在波达方向上形成的尖锐负向谱峰来实现算法。

本文为解决这一问题,针对信号子空间和噪声子空间分别提出加权算法。对于信号子空间,由于导向矢量在最大特征值对应特征向量上的投影峰值在两信源中间,在次大特征值对应特征向量上的投影峰值在接近两信源的位置,因此需对信号子空间特征向量加权,加权系数为信号特征值与噪声特征值之差的倒数,这样一方面能有效降低噪声影响,另一方面可增强次大特征值对应特征向量的作用;对于噪声子空间,权值为导向矢量在可见域内的积分值在噪声子空间上的投影,因为在非信源位置,导向矢量不与噪声子空间正交,其在噪声子空间正交基各元素上的投影越大则对应的权值越大,这样可以有效压低非信源处的谱幅度,而在信源位置,导向矢量与噪声子空间正交,加权对其在噪声子空间上的投影影响很小,在信源处形成尖锐峰值。这两种方法在低信噪比与小快拍的情况下,保持了子空间处理方法的高分辨能力,提高了邻近信号的可分辨概率。

2 信号模型

假设空间有 P 个远场窄带信号入射到阵元数为 M 的均匀线阵,噪声为高斯白噪声,阵元在 t 时刻的接收数据为:

到稿日期:2014-09-27 返修日期:2014-12-20 本文受江苏省高校研究生创新平台基金(cx12-0190)资助。

包建东(1979-),男,博士,讲师,主要研究方向为阵列信号处理、空间谱估计,E-mail: xwl1021253967@163.com;徐威利(1988-),女,硕士生,主要研究方向为信号处理;胡伟伟(1986-),男,博士生,主要研究方向为阵列信号处理;谢小敏(1987-),女,博士生,主要研究方向为模式识别技术、信号处理。

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\odot) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 为阵列接收数据矩阵;

$\mathbf{A}(\odot) = [\boldsymbol{\alpha}(\theta_1), \boldsymbol{\alpha}(\theta_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}(\theta_P)]$ 是阵列流型矩阵;

$$\boldsymbol{\alpha}(\theta_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi d \sin \theta_i / \lambda} \\ \dots \\ e^{-j2\pi(M-1)d \sin \theta_i / \lambda} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, P) \text{ 是导向矢量};$$

$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T$ 是源信号向量;

$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 是加性高斯白噪声, 其期望为 0, 功率为 σ^2 。

定义阵列的协方差矩阵 \mathbf{R} , 表达式为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

其中, \mathbf{R}_s 是源信号协方差矩阵, \mathbf{I} 是 M 阶单位阵。

3 子空间投影类算法

实际工程应用中, \mathbf{R} 通常由有限次快拍数据来估计, 即

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t) \quad (3)$$

对 $\hat{\mathbf{R}}$ 特征分解, 特征值与特征向量分别为 $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_i$ ($i=1, 2, \dots, M$), 把 $\hat{\lambda}_i$ 按照非递增顺序排列, 即 $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_P \geq \hat{\lambda}_{P+1} \approx \hat{\lambda}_{P+2} \approx \dots \approx \hat{\lambda}_M$, 则可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^M \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i^H = \sum_{i=1}^P \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i^H + \sum_{i=P+1}^M \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i^H \\ &= \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s$ 是由 $\hat{\lambda}_i$ ($i=1, 2, \dots, P$) 构成的对角阵; $\hat{\mathbf{U}}_s$ 为对应的特征向量构成的矩阵, 其列向量张成的空间为信号子空间的估计; $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n$ 是由 $\hat{\lambda}_i$ ($i=P+1, P+2, \dots, M$) 构成的对角阵; $\hat{\mathbf{U}}_n$ 为对应的特征向量构成的矩阵, 其列向量张成的空间为噪声子空间的估计。

信号子空间与 $\mathbf{A}(\odot)$ 列向量张成的空间是同一空间, 即满足 $\text{span}(\mathbf{U}_s) = \text{span}(\mathbf{A})$, 其与噪声子空间正交, 即满足 $\text{span}(\mathbf{U}_s) \perp \text{span}(\mathbf{U}_n)$, 因此 $\mathbf{A}(\odot)$ 列向量张成的空间与噪声子空间也正交, 即 $\text{span}(\mathbf{A}) \perp \text{span}(\mathbf{U}_n)$ 。

信号子空间的投影算法利用 $\text{span}(\mathbf{U}_s) = \text{span}(\mathbf{A})$, 信源处的导向矢量投影在信号子空间上是一个较大值, 非信源处的导向矢量在信号子空间的投影是一个较小值, 根据这一思想, 可以得到信号子空间投影法 EWPS:

$$\hat{P}_{EWPS} = \sum_{i=1}^P \hat{\lambda}_i |\boldsymbol{\alpha}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2 \quad (5)$$

式(5)是 CBF 算法的降维表示形式, 它利用了子空间划分区间中的有效部分即信号子空间, 通过主特征值加权投影值得到谱估计器, 通过最大值搜索得到信源方向。

但是在低信噪比和小快拍条件下, 邻近信源不可通过此方法估计。因为此情况下, 在最大特征值对应特征向量上最大投影的导向矢量在两信源之间, 导致两信源不可分辨, 再以最大特征值对其加权, 使得在信源间的谱峰值更尖锐。

噪声子空间投影算法利用 $\text{span}(\mathbf{A}) \perp \text{span}(\mathbf{U}_n)$, 在信源处的导向矢量与噪声子空间正交, 非信源处的导向矢量在噪声子空间上的投影不为零, 根据这一思想可以得到噪声子空

间投影算法 MUSIC:

$$\hat{P}_{MUSIC} = \frac{1}{\sum_{i=P+1}^M |\boldsymbol{\alpha}^H(\theta) \hat{\mathbf{v}}_i|^2} \quad (6)$$

式(6)选取了噪声子空间全部正交基矢量作为导向矢量的投影向量组, 消除了空间谱曲线中的伪峰, 它通过最小化搜索可得到信源方位信息。

在低信噪比和小快拍条件下, MUSIC 算法同样也存在不可分辨邻近目标的问题。因为在此情况下, 信源之间某非信源处的导向矢量在噪声子空间的投影值要小于信源处在噪声子空间上的投影, 这源于低信噪比和小快拍时对噪声子空间的不准确估计。

4 改进空间谱估计算法

4.1 信号子空间加权算法

因为导向矢量在最大特征值对应特征向量上的投影峰值在两信源中间, 在次大特征值对应特征向量上的投影峰值在接近两信源的位置, 可以考虑降低最大特征值对应特征向量的作用, 提高次大特征值对应特征向量的影响, 采用对信号子空间正交基元素加权的方式来实现:

$$\hat{P}_{IWPS-MUSIC} = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\boldsymbol{\Lambda}}\|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_n\|^2} \quad (7)$$

式中,

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = [1/(\hat{\lambda}_1 - \sigma^2), 1/(\hat{\lambda}_2 - \sigma^2), \dots, 1/(\hat{\lambda}_P - \sigma^2)]^T$$

其中, $\sigma^2 = \frac{1}{M-P} \sum_{i=P+1}^M \hat{\lambda}_i$ 为噪声特征值的估计; $\hat{\mathbf{U}}_i$ 为信号子空间估计, 其列向量按对应特征值从大到小排列。

可以看出, 权值取的是信号子空间特征向量对应特征值与噪声功率差值的倒数, 这样一方面可以降低噪声干扰, 另一方面可以有效减少最大特征值对应特征向量的影响, 使得谱函数的峰值处于信源附近并且可分辨。

式(7)由两部分构成, 分子是信号子空间加权算法, 分母是 MUSIC 算法。之所以把两者结合使用, 一方面是因为分子部分的谱函数伪峰较多、较高, 需要 MUSIC 算法去除伪峰; 另一方面, 信号子空间加权算法鲁棒性高但是精度低, 噪声子空间鲁棒性低但是精度高, 把两者结合使用可以同时保证鲁棒性和精度要求。

4.2 噪声子空间加权算法

噪声子空间算法空间谱曲线的尖锐程度由空间方位对应导向矢量到噪声子空间正交基各元素的投影的值大小决定。基于这个思想, 提出一种噪声子空间加权算法。

该算法在可见区域内对导向矢量作定积分, 把得到的积分矢量投影到噪声子空间的正交基各元素上, 投影值即为各元素的权值。

谱函数估计表达式如下:

$$\hat{P}_{IWPN-MUSIC} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_n \boldsymbol{\Psi}\|^2} \quad (8)$$

式中, $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{U}_n^H \cdot \mathbf{K}$, 其中 $\mathbf{K} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{\alpha}(\theta) d\theta$ 。

因为积分矢量是可见区域内所有导向矢量之和, 它与噪声子空间正交基既保持了信源处导向矢量的正交性, 又保持了非信源处导向矢量的相关性, 并且非信源处导向矢量与其

相关性越大,则该基底元素的权值就大。因此可以通过权值来加大与非信源处相关性大的噪声子空间基底元素的影响,有效地压低非信源处的谱函数值,而加权对信源处谱函数没有影响,在信源处仍可以形成峰值,因而此方法可以达到提高分辨力的目的。

该方法也存在伪峰的问题,因此如果与 IWPS-MUSIC 算法结合使用,虽然可以大限度地降低信源中间处的谱函数值,但是叠加的伪峰幅值较高,特别在低信噪比情况下有可能超过信源处的谱函数值,造成误估计,故这两种方法不可以结合使用。

现比较所提算法及传统 MUSIC 算法的计算量,为简化分析,比较时都摒除特征分解的计算损耗。从计算过程可看出,本文所提算法与传统 MUSIC 算法相比计算量有所增加,但是提高了邻近信源的分辨力,即以牺牲计算量为代价提高算法的估计精度。若设 MUSIC 算法的搜索步长为 0.1° ,完成一次 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 范围内的经典空间谱搜索需要 $\frac{180}{0.1}M(M-P)$ 次乘法运算;而 IWPS-MUSIC 算法分子是信号子空间加权算法,分母是 MUSIC 算法,因此其完成 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 范围内的空间谱搜索需要 $\frac{180}{0.1}M(M+1)$ 次乘法运算;噪声子空间加权算法 IWPN-MUSIC 对噪声子空间加权,权值为导向矢量在可见区域内的积分矢量在噪声子空间正交基各元素上的投影值,即权值的计算为一积分过程,设积分间距为 0.1° ,则单次积分的计算需要 $\frac{180}{0.1}M$ 次乘法运算,整个算法完成 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 范围内的空间谱搜索需要 $\frac{180}{0.1}[\frac{180}{0.1}M+(2M+1)(M-P)]$ 次乘法运算。

从以上分析来看,所提算法相比传统算法计算量损耗较大,可以考虑采用如下办法减小计算量:先利用 MUSIC 算法估算出信源大致所处方位,然后在该特定区域内执行所提算法以达到精估计的目的。设特定区域为 Θ ,这种情况下 IWPS-MUSIC 算法计算量为 $\frac{\Theta}{0.1}M(M+1)+\frac{180}{0.1}M(M-P)$,而 IWPN-MUSIC 算法计算量为 $\frac{\Theta}{0.1}[\frac{\Theta}{0.1}M+(2M+1)(M-P)]+\frac{180}{0.1}M(M-P)$,在特定区域范围足够小的情况下,所提算法的计算量增长并不明显。

5 性能分析

5.1 扰动参数分析

令 $\hat{U}_S = U_S + \tilde{U}_S$, $\hat{U}_N = U_N + \tilde{U}_N$, $\hat{A} = A + \tilde{A}$, $\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \tilde{\lambda}_i$, $\hat{R} = R + \tilde{R}$,其中带有上标“ $\hat{\cdot}$ ”的代表该参数的测量值,不带上标的代表理论值,带有“ $\tilde{\cdot}$ ”上标的代表扰动。

根据导向矢量与噪声子空间正交性得

$$\begin{aligned} \hat{U}_N^H \hat{A} &= (U_N + \tilde{U}_N)^H (A + \tilde{A}) = 0 \\ \Rightarrow U_N^H A + \tilde{U}_N^H A + U_N^H \tilde{A} + \tilde{U}_N^H \tilde{A} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

忽略式(9)中的误差高阶项,可得

$$\tilde{U}_N^H A + U_N^H \tilde{A} = 0 \Rightarrow \tilde{U}_N = -A(A^H A)^{-1} \tilde{A}^H U_N \quad (10)$$

根据噪声子空间与信号子空间的正交性可得

$$\begin{aligned} \hat{U}_N^H \hat{U}_S &= (U_N + \tilde{U}_N)^H (U_S + \tilde{U}_S) = 0 \\ \Rightarrow \tilde{U}_N^H U_S + U_N^H \tilde{U}_S + \tilde{U}_N^H \tilde{U}_S &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)代入式(11),得

$$[U_N^H - U_N^H \tilde{A} (A^H A)^{-1} A^H] \tilde{U}_S = -\tilde{U}_N^H U_S \quad (12)$$

令 $M = \tilde{A} (A^H A)^{-1} A^H$,则式(12)可表示为

$$U_N^H (I - M) \tilde{U}_S = -\tilde{U}_N^H U_S \quad (13)$$

将等式(13)两边左乘 U_N ,可得

$$\tilde{U}_S = -(I - M)^{-1} (U_N U_N^H)^+ U_N \tilde{U}_N^H U_S \quad (14)$$

其中,上标“+”表示取其伪逆。

因 $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$, $(U_N U_N^H)^+ = U_N U_N^H$,代入 M 和 \tilde{U}_N ,利用 $A^H U_N = 0$,则式(14)可表示为

$$\tilde{U}_S = U_N U_N^H \tilde{A} (A^H A)^{-1} A^H U_S \quad (15)$$

令 $\hat{U} = [\hat{U}_S \ \hat{U}_N]$, $\hat{\Lambda} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_M)$,根据 $\hat{R} \hat{U} = \hat{U} \hat{\Lambda}$,得

$$(R + \tilde{R})(U + \tilde{U}) = (U + \tilde{U})(\Lambda + \tilde{\Lambda}) \quad (16)$$

将式(16)展开,并忽略误差高阶项,得

$$\tilde{\Lambda} = U^H (\tilde{R} U + R \tilde{U} - \tilde{U} \Lambda) \quad (17)$$

5.2 分辨力分析

谱估计器 \hat{P} 是关于 \tilde{U}_S , \tilde{U}_N , $\tilde{\lambda}_i$ 和 θ 等参量的函数,由式(10)、式(14)、式(17)可知, \tilde{U}_S , \tilde{U}_N 为 \tilde{A} 的函数, $\tilde{\lambda}_i$ 为 \tilde{R} 的函数,又因为扰动参量 $\tilde{\lambda}_i$ 对谱估计器影响较小,忽略其影响,故 \hat{P} 可视为 \tilde{A} 和 θ 的函数。

现有两目标分别位于 θ_1 和 θ_2 ,令 $\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 。当成功分辨两目标时, $\frac{\partial^2 \hat{P}(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} > 0$; 当两目标不可分辨时,

$\frac{\partial^2 \hat{P}(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0$ 。故分辨的临界点为 $\frac{\partial^2 \hat{P}(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0$ 。

由于扰动的存在,信源处的导向矢量与噪声子空间不严格正交,非信源处的导向矢量与信号子空间也不严格正交,所以,为了简化分析,可以对空间谱函数取对数。

令 $Q = \ln \hat{P} = \ln \frac{B}{C}$,其中 \hat{P} 是谱估计函数, B 是 \hat{P} 的分子,

C 是 \hat{P} 的分母。由可分辨的临界条件得

$$\frac{\partial^2 Q(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (18)$$

利用一阶 Taylor 级数将式(18)在 $\tilde{A} = 0$ 处展开,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} &= \frac{\partial^2 Q(0, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} + \\ & \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial^2 Q(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)}{\partial (\text{vec}(\tilde{A}))} \Big|_{\tilde{A}=0} \right)^T \cdot \text{vec}(\tilde{A}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\text{vec}(\tilde{A})$ 表示对 \tilde{A} 向量化,可表示为

$$\text{vec}(\tilde{A}) = \|\text{vec}(\tilde{A})\| u \quad (20)$$

其中, $\|\text{vec}(\tilde{A})\|$ 表示取 $\text{vec}(\tilde{A})$ 的 2 范数, u 表示 $\text{vec}(\tilde{A})$ 方向的单位向量。

显然,当 $\frac{\partial \left(\frac{\partial^2 Q(\tilde{A}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)}{\partial (\text{vec}(\tilde{A}))} \Big|_{\tilde{A}=0}$ 与 u 共线时, $\|\text{vec}(\tilde{A})\|$

最小,此时为可分辨两信源的最大扰动,即

$$\| \text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}) \| = \frac{\left| \frac{\partial^2 Q(0, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right|}{\left\| \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 Q(\tilde{\mathbf{A}}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)}{\partial (\text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}))} \Big|_{\tilde{\mathbf{A}}=0} \right\|^T} \quad (21)$$

$$\text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}) = \frac{\frac{\partial^2 Q(0, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 Q(\tilde{\mathbf{A}}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)}{\partial (\text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}))} \Big|_{\tilde{\mathbf{A}}=0}}{\left\| \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 Q(\tilde{\mathbf{A}}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)}{\partial (\text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}))} \Big|_{\tilde{\mathbf{A}}=0} \right\|^2} \quad (22)$$

将 $\hat{P}_{\text{IWPS-MUSIC}}$ 代入式(22)中, 可得

$$\text{vec}_{\text{IWPS}}(\tilde{\mathbf{A}}) = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}}{\| \mathbf{D} \|^2} \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \frac{K_1}{K_2} - \frac{K_3}{K_2} + \frac{K_5}{K_4} - \frac{K_6}{K_4}$$

$$\mathbf{D} = \text{vec} \left\{ \frac{\text{RE}(4\mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_4^T + 2\mathbf{A}_5^T \mathbf{A}_2^T + 2\mathbf{A}_7^T \mathbf{A}_6^T)}{K_2} - \frac{\text{RE}(2K_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T + 2\mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2^T + 2\mathbf{A}_7^T \mathbf{A}_4^T)}{K_2^2} + \frac{\text{RE}(4K_3 \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2^T) - \text{RE}(4K_5 \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_7^T)}{K_2^2} + \frac{\text{RE}(2\mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_7^T + 2\mathbf{A}_7^T \mathbf{A}_8^T + 2K_6 \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_7^T)}{K_4^2} - \frac{\text{RE}(4\mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_8^T + 2\mathbf{A}_5^T \mathbf{A}_7^T + 2\mathbf{A}_7^T \mathbf{A}_3^T)}{K_4} \right\}$$

其中 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 式中的各参量定义如下:

$$K_1 = 2\text{RE}\langle \mathbf{d}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \mathbf{d} \rangle + 2\text{RE}\langle \mathbf{e}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

$$K_2 = \mathbf{a}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \boldsymbol{\alpha}$$

$$K_3 = 2\text{RE}\langle \mathbf{d}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

$$K_4 = \mathbf{a}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \boldsymbol{\alpha}$$

$$K_5 = 2\text{RE}\langle \mathbf{d}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

$$K_6 = 2\text{RE}\langle \mathbf{d}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{d} \rangle + 2\text{RE}\langle \mathbf{e}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{a}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$$

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{d}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$$

$$\mathbf{A}_4 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \mathbf{d}$$

$$\mathbf{A}_5 = \mathbf{e}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$$

$$\mathbf{A}_6 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_s \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{U}_s^H \mathbf{e}$$

$$\mathbf{A}_7 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{A}_8 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{d}$$

$$\mathbf{A}_9 = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{e}$$

$$\mathbf{d} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \theta}, \mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \theta}$$

IWPN-MUSIC 处理方法与其一致, 在此不再赘述。

6 仿真分析

本文使用 10 元均匀线阵, 阵元间距为 0.5 倍波长, 阵列所在平面上有两个等功率非相干信源, 分别位于 -1.5° 和 1.5° 。

实验 1 在 $\text{SNR} = 5$, 快拍数 = 300 的条件下, 分别对 IWPS-MUSIC, SSMUSIC, SSM, IWPN-MUSIC, MUSIC 这 5 种算法做 5 次仿真, 得到空间谱结果, 如图 1 所示。可以看出, 传统的 MUSIC 算法已经无法分辨这两个信源; 而 IWPS-MUSIC 算法具有最高的分辨率, 在信源处的谱峰值比信源中

间空间谱值高 12dB 左右, 且鲁棒性较好; SSM 算法与 SS-MUSIC 算法性能相差不大, 在信源处的谱峰值比信源中间空间谱值高 5dB 左右; IWPN-MUSIC 信源处的谱峰值比信源中间空间谱值高 8dB 左右, 并且伪峰较低, 但是鲁棒性稍差。

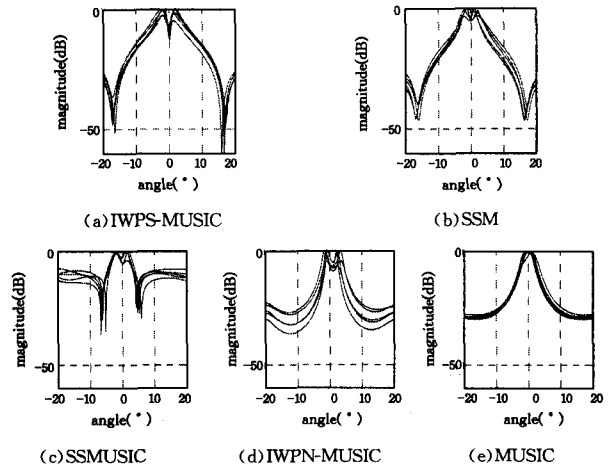


图 1 各种子空间算法空间谱曲线

实验 2 针对信号子空间类算法, SNR 从 -5dB 以 1dB 为间隔增加至 13dB , 快拍数为 200, 进行 100 次蒙特卡罗实验, 统计得到分辨成功概率曲线和 1.5° 信源处估计均方根误差曲线, 分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示。从图中可以看出, 与其它两种方法相比, IWPS-MUSIC 算法的 SNR 门限从 9dB 降到 0dB , 并且相同 SNR 下信源方位均方根误差更低。

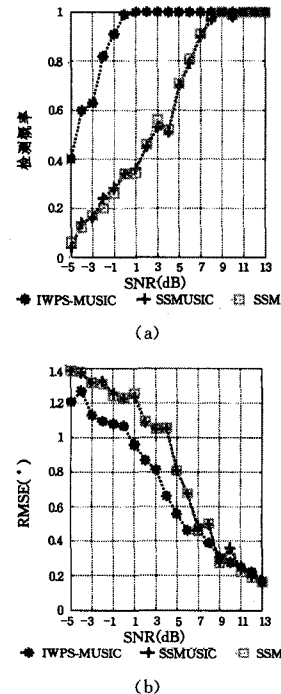


图 2 信号子空间类算法随 SNR 变化性能曲线

实验 3 针对信号子空间类算法, SNR 为 0, 快拍数从 100 以 250 为间隔增加至 4600, 进行 100 次蒙特卡罗实验, 统计得到分辨成功概率曲线和 1.5° 信源处估计均方根误差曲线, 如图 3(a) 和图 3(b) 所示。从图中可以看出, IWPS-MUSIC 算法与其它两种方法相比, 快拍数门限从 2600 降到 600, 并且相同快拍数下信源方位均方根误差更低, 说明 IWPS-MUSIC 算法在小快拍情况下具有高分辨的优势。

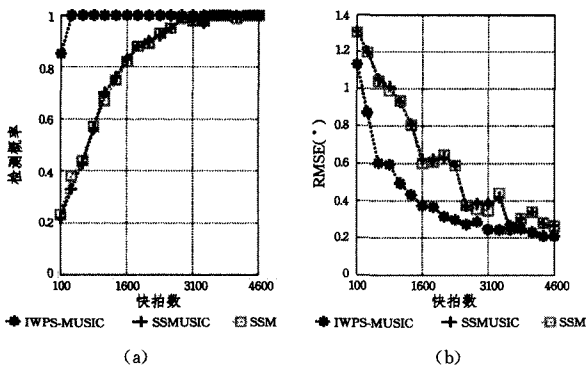


图3 信号子空间类算法随快拍数变化性能曲线

实验4 针对噪声子空间类算法, SNR从0dB以1dB为间隔增加至16dB, 快拍数为200, 进行100次蒙特卡罗实验, 统计得到分辨成功概率曲线和1.5°信源处估计均方根误差曲线, 如图4(a)和图4(b)所示。从图中可以看出, IWPN-MUSIC算法在低信噪比情况下具有较高的分辨概率, 把SNR门限从12dB降到7dB, 并且相同SNR条件下信源方位均方根误差较MUSIC算法低。

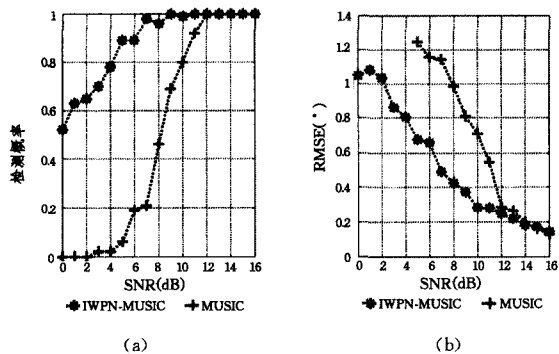


图4 噪声子空间类算法随SNR变化性能曲线

实验5 针对噪声子空间类算法, SNR为0, 快拍数从100以350为间隔增加至4600, 进行100次蒙特卡罗实验, 统计得到分辨成功概率曲线和1.5°信源处估计均方根误差曲线, 如图5(a)和图5(b)所示。可以看出, 与MUSIC算法相比, IWPN-MUSIC算法把快拍数门限从6400降至1600, 在相同快拍数情况下信源方位均方根误差也更低。

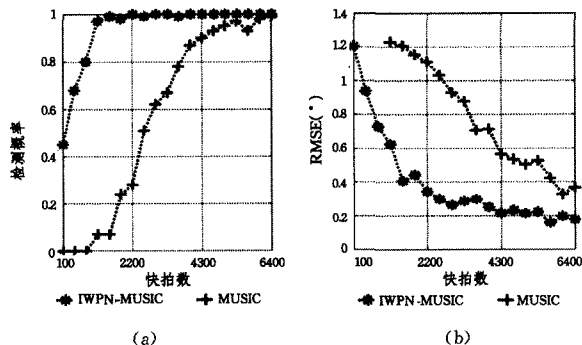


图5 噪声子空间类算法随快拍数变化性能曲线

结束语 本文针对信号子空间和噪声子空间算法, 分别提出加权算法IWPS-MUSIC和IWPN-MUSIC。IWPS-MUSIC算法利用导向矢量在数据协方差矩阵主特征值对应特征

向量上投影值分布的不同, 取特征值与噪声功率之差的倒数为权值对特征向量加权, 以减小最大特征值对应特征向量的影响; IWPN-MUSIC算法利用导向矢量在可观察区域内的积分值在噪声子空间上的投影为权值对噪声子空间正交基各元素加权, 使与噪声子空间相关性越大的导向矢量的空间谱曲线越平坦。仿真实验表明, 相较于SSM和SSMUSIC算法, IWPS-MUSIC降低了信源可分辨的信噪比与快拍数门限; 同样, IWPN-MUSIC相较于MUSIC算法, 也降低了信噪比与快拍数门限。因此这两种算法适用于低信噪比和小快拍条件下对邻近信源方位的估计, 具有较高的分辨力和测量精度。

参考文献

- [1] Haykin S, Reilly J P, Kezys V, et al. Some aspects of array signal processing [J]. IEE Proceedings Radar and Signal Processing, 1992, 139(1): 1-26
- [2] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94
- [3] Capon J. High-resolution frequency wave-number spectrum analysis [J]. Proceeding of the IEEE, 1969, 57(8): 1408-1418
- [4] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280
- [5] Bohme J F. Estimation of source parameters by maximum likelihood and nonlinear regression [C]// ICASSP. 1984, 9: 271-274
- [6] Cadzow J A. A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources [J]. IEEE Trans. on ASSP, 1988, 36(7): 965-979
- [7] McCloud M L, Scharf L L. A new subspace identification algorithm for high resolution DOA estimation [J]. IEEE Trans. on Antenna and Propagation, 2002, 50(10): 1382-1390
- [8] Mestri, Lagunas. Modified subspace algorithms for DOA estimation with large arrays [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2008, 56(2): 598-614
- [9] 王布宏, 王永良, 陈辉. 利用局域子空间投影提高子空间类DOA估计算法的谱分辨率[J]. 电子学报, 2003, 31(3): 459-463
Wang Bu-hong, Wang Yong-liang, Chen Hui. Improving spectral resolution of subspace-based DOA estimation algorithms by localized subspace projection [J]. ACTA Electronica Sinica, 2003, 31(3): 459-463
- [10] 游鸿, 黄建国, 金勇, 等. 基于加权信号子空间投影的MUSIC改进算法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(5): 792-794
You Hong, Huang Jian-guo, Jin Yong, et al. Improving MUSIC performance in snapshot deficient scenario via weighted signal-subspace projection [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(5): 792-794
- [11] 司伟建, 蓝晓宇. 基于谱函数二阶导数的波达方向估计算法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(7): 1434-1437
Si Wei-jian, Lan Xiao-yu. Algorithm for DOA Estimation using second derivative of Spectrum [J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(7): 1434-1437