

# 彩色图像分形维数的计算方法

李玉蓉 段江

(西南财经大学信息工程学院 成都 610074)

**摘要** 分形维数是描述图像复杂性的一种重要测度,广泛应用于图像特征提取及图像分类、分割和检索等方面。多种黑白图像和灰度图像的分形维数计算方法已被提出,但其中很少有适用于彩色图像的分形维数计算方法。把计算灰度图像分形维数的差分盒维法扩展到欧氏五维空间,提出了一种简单且易实现的计算彩色图像分形维数的方法。实验结果表明,提出的方法能够捕捉到彩色图像纹理的复杂性,在识别彩色图像粗糙度变化和计算精度方面优于其它算法。

**关键词** 分形维数,彩色图像,差分盒维法,纹理

**中图分类号** TP391.41 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.8.063

## Method of Calculating Fractal Dimension for Color Images

LI Yu-rong DUAN Jiang

(School of Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China)

**Abstract** Fractal dimension is an import metric for the description of the complexity of color images, widely used to extract characteristics of image and classify, segment or index images. Many approaches to calculate fractal dimension for grayscale images or binary images have been proposed, but very few methods are for color images. A method with simplicity and automatic computability of fractal dimension estimation was presented for color images, which extends the differential box-counting method to 5-D euclidian hyper-space. The experiments demonstrate that the proposed method is able to capture the complexity of color images, and outperforms the others in terms of identifying the roughness of color textures and the computational accuracy.

**Keywords** Fractal dimension, Color image, Differential box-counting, Texture

## 1 引言

Mandelbrot 创立的分形几何理论为研究复杂的、不规则的对象提供了思想和方法,广泛应用于自然科学和社会科学的众多领域。分形维数是描述分形的复杂度和不规则度的一种重要测度,分形维数计算是分形研究中的一个至关重要的问题。

分形理论为图像分析提供了一种重要的工具,广泛用于图像特征提取及图像分类、分割和检索<sup>[1]</sup>等。对自然景物纹理图像的研究<sup>[2,3]</sup>表明自然界中大多数表面映射成的灰度图像具有相同分形特征的分形表面,分形维数与人类视觉系统对图像粗糙度的感知是一致的,并且对图像的旋转、尺度的变化等改变不敏感。因而,分形维数常常作为度量图像纹理粗糙度的一种指标。多种图像分形维数的计算方法被提出,包括地毯覆盖法<sup>[3]</sup>、基于分形布朗运动模型的方法<sup>[2]</sup>、盒子维法<sup>[4]</sup>、差分盒维法(DBC)<sup>[6]</sup>等,其中 DBC 因简单易实现而成为最常用的维数计算方法,此外多种改良算法被发展,如网络重叠差分盒维模型<sup>[7]</sup>、基于模糊集的模糊分形维数<sup>[11]</sup>。

尽管图像世界以彩色图像为主,但是对彩色图像的分形

研究较少。图像分形研究主要是针对灰度图像,以上提及的维数计算方法是用于计算二值图像和灰度图像的分形维数,针对彩色图像的分形维数计算方法非常少。在实践中往往是把彩色图像转换为二值图像或灰度图像,进而获得图像的分形特征。实践表明颜色信息的丢失严重影响了图像分形分析的结果<sup>[5]</sup>。

近年彩色图像的分形研究引起了关注。几种计算彩色图像分形维数的方法被提出。边际颜色分析<sup>[8]</sup>即把颜色空间的颜色分量看作是独立的,分别从各颜色通道计算分形维数。由这种方法计算得到的分形维数难以正确反映彩色图像的复杂度。文献<sup>[10]</sup>提出了基于概率算法的维数计算方法。它是一种向量分析法,不同于边际颜色分析法,把 RGB 空间的各颜色分量结合起来计算分形维数,其结果在一定程度上能捕获彩色图像空间的复杂性。该方法存在两个主要缺陷:一是随着图像复杂度的增加,最小二乘法拟合误差显著增加;二是分形维数结果受限于样本权重的选择,权重函数的设计只考虑了像素的量化误差,忽略了其它因素,影响了图像分形维数的准确度。

本文提出一种向量分析法 DBC\_CI (Differential Box-

到稿日期:2014-12-19 返修日期:2015-03-10 本文受中央高校基本科研业务费研究项目(JBK140929),国家自然科学基金重大研究计划(91218301),四川省杰出青年学术技术带头人资助计划(2012jq0017)资助。

李玉蓉(1970-),女,博士,副教授,主要研究方向为图像分析和模式识别,E-mail:liyir\_t@swufe.edu.cn;段江(1978-),男,博士,教授,主要研究方向为图像处理。

counting for Color Image)来计算彩色图像分形维数,把差分盒维法扩展到彩色图像五维空间计算分形维数。本文第2节介绍差分盒维法以及把差分盒维法扩展到彩色图像五维空间计算分形维数的方法;第3节介绍评估算法有效性的实验;最后讨论结论。

## 2 彩色图像分形维数

### 2.1 差分盒维法简介

把 $M \times M$ 大小的图像看作三维空间中的曲面 $Z = f(x, y)$ ,其中, $(x, y)$ 表示平面位置, $Z$ 轴表示灰度值。把 $(x, y)$ 平面分割成许多 $s \times s$ 的网格。在每个网格上,把对应空间划分为一系列 $s \times s \times h$ 的盒子, $h$ 满足: $G/h = M/s$ 。其中, $G$ 是图像最大灰度级。设第 $(i, j)$ 个网格中的灰度最大值和最小值分别落在第 $k$ 个和第 $l$ 个盒子中,则覆盖第 $(i, j)$ 个网格所需要的盒子数为:

$$n_r(i, j) = k - l + 1 \quad (1)$$

其中, $r = M/s$ ,代表盒子缩小尺度。覆盖整个图像所需要的总盒子数为所有网格的盒子数的总和:

$$N_r = \sum n_r(i, j) \quad (2)$$

对于一系列 $s$ ,计算相应的 $\log N_r$ 和 $\log(1/r)$ ,运用最小二乘法求出这些 $\log N_r$ 和 $\log(1/r)$ 的斜率,即差分盒维数。

### 2.2 彩色图像分形维数的计算

把一幅 $M \times M$ 大小的彩色图像看作是五维空间的超平面。考虑到RGB颜色空间是立方体空间结构,与图像位置平面矩形结构一致,这里采用RGB颜色空间。RGB空间与图像平面构成了五维数据立方体。5个维度 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 分别代表图像平面位置属性以及像素的红(R)、绿(G)、蓝(B)颜色属性。每个属性的取值范围是有界的。不失一般性,设任一属性取值范围是一个半开半闭的区间 $[L_i, U_i)$ , $i = 1, 2, \dots, 5$ 。划分面垂直于坐标轴,将五维数据立方体划分为互不交叉的大小相等的超立方体。具体来说,将每一维属性取值范围划分为 $k_i$ 个左闭右开的长度为 $\delta_i$ 的区间。属性 $X_i$ 是所有左闭右开区间 $I_{i,j} = [L_i + (j-1)\delta_i, L_i + j\delta_i)$ ( $j = 1, 2, \dots, k_i$ )的集合。与传统差分盒法相似,各维属性的单位区间长度 $\delta_i$ 满足以下条件:

$$\frac{G}{\delta_5} = \frac{G}{\delta_4} = \frac{G}{\delta_3} = \frac{M}{\delta_1} = \frac{M}{\delta_2} = r \quad (3)$$

其中, $r$ 代表盒子缩小尺度, $M$ 为图像大小, $G$ 为红、绿、蓝颜色分量的最大值。将各区间依次进行编号,并将编号作为区间的坐标。五维数据立方体的每个网格均有一个独立网格坐标 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ,其中 $x_i = 1, 2, 3, \dots, d_i, d_i = \lceil \frac{U_i - L_i - 1}{\delta_i} \rceil$ 。

与传统的差分盒法相同,DBC\_CI不是直接统计包含像素的超立方体的个数,而是利用R、G、B颜色的分布情况,估算包含像素的超立方体的数量。设 $X_1 X_2$ 位置平面上第 $(i, j)$ 个网格中像素的R最大值和最小值分别落在沿 $X_3$ 方向上的第 $k_R$ 个和第 $l_R$ 个区间。则沿R属性方向,需覆盖的区间数量是:

$$n_{r,R}(i, j) = k_R - l_R + 1 \quad (4)$$

同理,沿G、B属性方向,需覆盖的区间数量分别是:

$$n_{r,G}(i, j) = k_G - l_G + 1 \quad (5)$$

$$n_{r,B}(i, j) = k_B - l_B + 1 \quad (6)$$

覆盖第 $(i, j)$ 个网格所需的方体数量为以上3个覆盖区间相交部分中的方体数量之和。方体数量计算公式为:

$$n_r(i, j) = (k_R - l_R + 1) * (k_G - l_G + 1) * (k_B - l_B + 1) \quad (7)$$

其中, $r$ 代表盒子缩小尺度。

如图1所示,假设在第 $(i, j)$ 个网格中有4个像素 $p1, p2, p3$ 和 $p4$ ,它们分别落入RGB立方体的3个网格中。按照前面所述的网格坐标编码方法,网格的坐标分别为 $(i, j, 2, 2, 3), (i, j, 1, 1, 1)$ 和 $(i, j, 2, 1, 2)$ 。按以下标准选择方体覆盖:(R区间=1 or 2) and (G区间=1 or 2) and (B区间=1, 2 or 3),在第 $(i, j)$ 个网格中需要覆盖的方体的数量为: $2 * 2 * 3 = 12$ 。

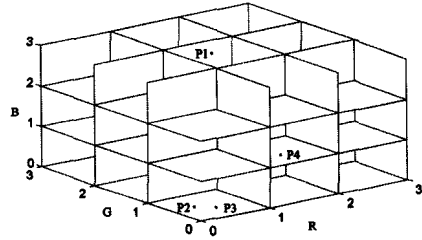


图1 RGB数据立方体截面图

覆盖整个图像所需要的总方体数量为覆盖所有网格所需的方体数量的总和:

$$N_r = \sum n_r(i, j) \quad (8)$$

选取不同的尺度 $r$ 计算 $N_r$ ,通过最小二乘法线性拟合求出图像的分形维数。

值得注意的是,盒子的缩小尺度 $r$ 的选取会影响分形维数的估计。 $r$ 数据序列的选取分为两类,一是采用几何序列 $r = 2^{-k}$ ,二是算术序列 $r = k$ ,其中 $k$ 是一个变量。几何序列数据难以给出足够多的数据来准确估计分形维数,因此DBC\_CI采用算术序列。采用算术序列的一个主要问题是 $N_r$ 与 $r$ 散点图中往往会出现平台。当 $r$ 较大时,相邻值对应的盒子数量接近,使得数据点太靠近而形成平台(如图2(a)所示),会导致分形维数偏离正常值。为避免出现平台,DBC\_CI从算术序列中选取部分数据作为盒子缩小尺度数据 $r$ 。随着 $r$ 增大,如果XY平面的网格数量相等,则只选择其中一个 $r$ 值。即若存在 $\text{INT}[M/r_i] = \text{INT}[M/r_k], i = k+1, k = k+2, \dots, m, \text{INT}[a]$ 表示 $a$ 的整数部分,则选择最早出现的尺度 $r_k$ 。在 $N_r$ 与 $r$ 的数据对中,只保留数据对 $(r_k, N_{r_k})$ 。图2(b)显示了选取部分缩小尺度对分形维数估计的影响。其中图例1是 $r$ 采用算术序列下 $N_r$ 与 $r$ 散点图,图例2中选择了部分 $r$ 值,导致线性拟合趋势发生偏移。

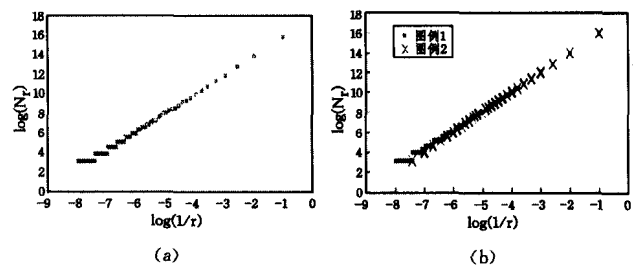


图2 缩小尺度的选取对分形维数估计的影响

## 3 实验验证

为了验证提出的彩色分形维数计算算法DBC\_CI的有效性,本文分别用提出的DBC\_CI与基于计盒法的维数计算方法BC\_CI(Box-counting for Color Image)进行测试。测试图像是一幅人工合成的单色图像和从彩色纹理库VisTex<sup>[9]</sup>中

下载的两组自然纹理图像,尺寸均为 512 \* 512。

### 3.1 图像分形维数估计

图 3 中左图是人工合成的红色图像,右图是采用 DBC\_CI 方法得到的线性拟合图。图像维数的估计值为 1.994,与单色图像分形维数的理论值 2 相符。判定系数  $R^2$  为 0.9998,表明拟合度很高。BC\_CI 方法估计维数为 1.906,与理论值接近。判定系数  $R^2$  为 0.9959,拟合度很高。

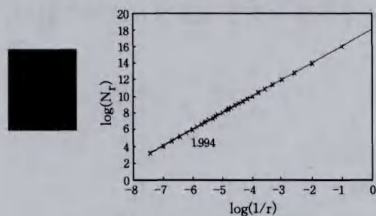


图 3 红色图像及线性拟合

两组自然纹理图像如图 4 所示,包括山脉和树皮两类。从视觉感知,第二组树皮类图像的纹理明显比第一组山脉图像粗糙。用 BC\_CI 和 DBC\_CI 方法计算的分形维数结果如图 5 所示。图 5(a)显示基于 BC\_CI 得到的树皮类图像和山脉图像的分形维数均在 2.7~3.0 间。分形维数不能区分两类粗糙度明显不同的图像。图像分形维数估计值均小于 3.0,明显低估了彩色图像的分形维数。图 5(b)显示基于 DBC\_CI 法得到的树皮类图像的分形维数在 4.0~4.4 之间,山脉图像的分形维数在 3.2~3.4 间。两类图像的维数差异大,完全能够区分粗糙度不同的图像类别。分形维数大小与人类视觉系统对图像粗糙度的感知是一致的,分形维数越大,对应的图像表面越粗糙;分形维数越小,对应的图像表面越光滑。树皮和山脉每一类中图像的分形维数值的差异小,说明图像纹理复杂度相近,这与视觉感知也是一致的。

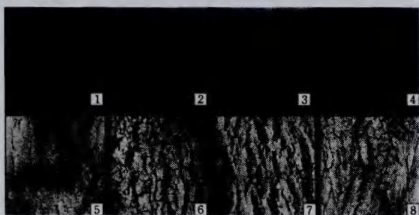


图 4 自然纹理图像

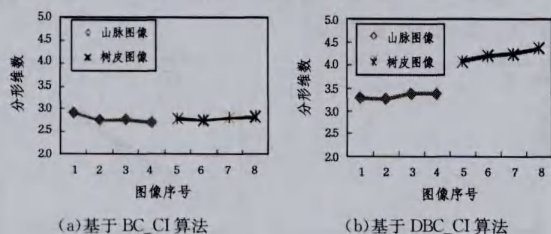


图 5 纹理图像分形维数估计

高维图像分形维数计算中一直存在动态范围小、分形维数偏低的问题。理论上,彩色图像的分形维数范围是 2.0~5.0。BC\_CI 估计的维数在 2.0~3.0 之间,分形维数的动态范围小;而 DBC\_CI 的范围在 2.0~4.3 之间,动态范围大,表明它能够捕获高维图像的复杂性。

一系列不同复杂度的图像测试结果表明,DBC\_CI 计算的图像分形维数能够反映彩色图像粗糙度的变化,明显优于 BC\_CI。

### 3.2 拟合度

本文采用最小二乘法线性拟合误差来评估分形维数计算的质量。误差值越小,拟合质量越好。计算误差的公式如下:

$$E = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(cx_i + d - y_i)^2}{1 + c^2}} \quad (9)$$

其中,  $x_i$  和  $y_i$  分别表示  $\log r$  和  $\log N_r$ ,  $r$  和  $N_r$  是填充彩色图像空间的盒子的缩小尺度和盒子数量;  $d$  和  $c$  表示拟合直线的截距和斜率。

图 6 显示了 DBC\_CI 和 BC\_CI 对以上 8 幅自然纹理图像和人工合成的红色图像(图像编号为 9)的拟合误差。结果表明基于 DBC\_CI 的每幅图像的拟合误差均明显小于 BC\_CI 的拟合误差,即 DBC\_CI 方法的计算精度明显高于 BC\_CI。

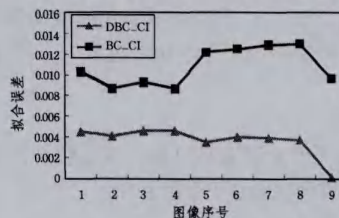


图 6 拟合误差比较

**结束语** 尽管彩色图像占据图像的大多数,但是目前很少有适用于彩色图像的分形维数计算方法。本文把计算灰度图像分形维数的差分盒维法扩展到彩色图像的五维空间,提出了一种把 RGB 空间的各颜色结合起来计算彩色图像分形维数的向量分析法。为了提高计算图像分形维数的准确度,引入了选择盒子缩小尺度的方法。图像测试结果表明,由所提算法得到的图像分形维数能够反映彩色图像粗糙度的变化,与人的视觉感知具有较高的一致性。计算得到的分形维数值动态范围较大,解决了高维图像分形维数计算中一直存在的动态范围小、分形维数偏低的问题。实验结果显示 DBC\_CI 的最小二乘法线性拟合误差非常小,即算法的线性拟合度优,计算精度高。

### 参考文献

- [1] 黄仁,胡敏.综合颜色空间特征和纹理特征的图像检索[J].计算机科学,2014,41(6):118-121  
Huang Ren, Hu Min. Content-based image retrieval using color position and texture fused features[J]. Computer Science, 2014, 41(6):118-121
- [2] Pentland A. Fractal based description of nature scenes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6):661-674.
- [3] Peleg S, Naor J, Hartley R, et al. Multiple resolution texture analysis and classification [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(4):518-523
- [4] Gangepain J, Roques-Carmes C. Fractal approach to two dimensional and three dimensional surface roughness [J]. Wear, 1986, 109:119-126
- [5] Backes R, Casanova D, Bruno M. Color texture analysis based on fractal descriptors [J]. Pattern Recognition, 2012, 45:984-992
- [6] Sarker N, Chaudhuri B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1994, 24:115-120
- [7] 李传龙,李颖,于水明.一种新的网格重叠差分盒分形模型[J].计算机科学,2011,38(1):282-285

Li Chuan-long, Li Ying, Yu Shui-ming. New fractal model of grid overlapping differential box-counting [J]. Computer Science, 2011, 38(1): 282-285

- [8] Tsompanaki I, Manousaki G, Manios G, et al. Use of color texture in determining the nature of melanocytic skin lesions—A qualitative and quantitative approach [J]. Comput. Biol. Med., 2006, 36: 416-427

- [9] <http://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture/vistex.html>
- [10] Ivanovici M, Richard N. Fractal Dimension of Color Fractal Images [J]. IEEE Transactions on images processing, 2011, 20(1): 227-235
- [11] Zhang H, Hu Y, Lan X, et al. Fuzzy fractal dimension of complex networks [J]. Applied Soft Computing, 2014, 25(11): 514-518

(上接第 309 页)

图 8 分别显示了对两个数据集进行实验分析得到的 PR 曲线和  $F_\beta$  值。

### 3.3 协同检测处理效率对比

从上面的实验结果可以看出,本文的方法虽然只使用了图像块的稀疏主特征,但是在检测的性能上并无劣势,并且略优于目前已经提出的较好的协同显著性检测方法。然而,本文的方法在处理时间上的优势远优于它们。表 3 给出了在分别包括 210 幅图像和 643 幅图像的标准数据集下,各种方法处理每一幅图像所需的平均时间,可以看出 BSFCoS 的计算处理效率是最高的。

表 3 平均检测时间(/幅)

模型	$L_i^{[5]}$	$F_u^{[7]}$	BSFCoS
CP	450.4	1.81	0.451
iCoseg	N/A	4.93	0.702

图 9 示出了在 iCoseg 标准数据集下,通过控制输入图像的数量,分别记录当输入图像数量从 2 变化到 41 时,  $F_u$  和本文方法处理每幅图像所需的平均时间,可以看出 BSFCoS 的计算处理效率一直保持在一个较低的水平。

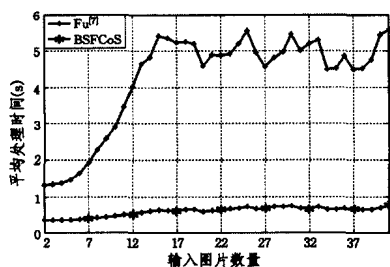


图 9 当输入图像数量改变时,  $F_u$  和 BSFCoS 方法处理每幅图像所需的平均时间

**结束语** 提出了一种基于图像分块与稀疏主特征提取的协同显著性检测方法。从 Lab 和 RGB 两种颜色空间对输入图像进行底层特征的抽取,使用截断幂方法在分块的基础上进行稀疏主成分分析并提取稀疏主特征。在使用 K-Means 对稀疏主特征进行聚类的结果上进行 3 种显著特征权值的度量,并从单幅图像和多幅图像两个角度进行特征融合,以生成最终的协同显著图。实验结果表明,该方法在保证具有协同显著性检测效果的同时,大幅缩短了处理图像所需的时间,具有更好的协同显著性检测性能。

但是,目前 BSFCoS 使用的基于聚类的显著性特征计算方法只对单一协同显著目标的检测表现出良好的性能,当多幅图像中同时包含多个协同目标时,它则表现出明显的不足。下一步工作的重心将放在能够同时检测出多幅图像中的多个协同显著目标。

### 参考文献

- [1] Itti L, Koch C, Niebur E. A model of saliency-based visual atten-

- tion for rapid scene analysis [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(11): 1254-1259
- [2] Toet A. Computational versus psychophysical bottom-up image saliency: A comparative evaluation study [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(11): 2131-2146
- [3] Jacobs D E, Goldman D B, Shechtman E. Cosaliency: Where people look when comparing images [C] // Proceedings of 23rd Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology. ACM, 2010: 219-228
- [4] Chen H T. Preattentive co-saliency detection [C] // 2010 17th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). IEEE, 2010: 1117-1120
- [5] Li H, Ngan K N. A co-saliency model of image pairs [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(12): 3365-3375
- [6] Chang K Y, Liu T L, Lai S H. From co-saliency to co-segmentation: An efficient and fully unsupervised energy minimization model [C] // 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2011: 2129-2136
- [7] Fu H, Cao X, Tu Z. Cluster-based co-saliency detection [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(10): 3766-3778
- [8] Wang F, Huang Q, Guibas L J. Image co-segmentation via consistent functional maps [C] // 2013 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). IEEE, 2013: 849-856
- [9] Tang K, Joulin A, Li L J, et al. Co-localization in real-world images [C] // 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2014: 1464-1471
- [10] Hu S M, Chen T, Xu K, et al. Internet visual media processing: a survey with graphics and vision applications [J]. The Visual Computer, 2013, 29(5): 393-405
- [11] Kim G, Xing E P. Visualizing brand associations from web community photos [C] // Proceedings of 7th ACM International Conference on Web Search and Data Mining. ACM, 2014: 623-632
- [12] Jolliffe I. Principal component analysis [M]. John Wiley & Sons, Ltd, 2005
- [13] Hu Z F, Pan G, Wang Y M, et al. Sparse Principal Component Analysis via Rotation and Truncation [J]. arXiv preprint arXiv: 1403.1430, 2014
- [14] Yuan X T, Zhang T. Truncated power method for sparse eigenvalue problems [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2013, 14(1): 899-925
- [15] Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems [M]. Manchester: Manchester University Press, 1992
- [16] Mackey L W. Deflation methods for sparse pca [C] // Advances in Neural Information Processing Systems, 2009: 1017-1024
- [17] Batra D, Kowdle A, Parikh D, et al. icoseg: Interactive co-segmentation with intelligent scribble guidance [C] // 2010 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2010: 3169-3176