

# 两类量子游走组成的非确定型量子程序的终止验证

雷红轩

(内江师范学院数学与信息科学学院 内江 641112) (四川省高等学校数值仿真重点实验室 内江 641112)

**摘要** 首先给出了 $\mathcal{C}^3$ 和 $\mathcal{C}^4$ 空间中由量子游走组成的非确定型量子程序的概念,其次讨论了它们从初态运行时在不同的测量算子下的可达集合、终止集合和发散集合。研究表明:非确定型量子程序的终止、发散和可达集合、发散集合与选取的测量算子有密切的关系。程序在不同测量算子作用下从同一个初态运行时可能终止,也可能发散;并且,同一个初态的可达集合中终态和发散态共存。

**关键词** 量子游走,非确定型量子程序,终止概率,程序验证

**中图法分类号** TP301.6 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.7.029

## Verification of Termination for Nondeterministic Quantum Programs Constituted by Two Kinds of Quantum Walks

LEI Hong-xuan

(School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang 641112, China)

(Key Laboratory of Numerical Simulation of Sichuan Province, Neijiang 641112, China)

**Abstract** Firstly, the model of nondeterministic quantum programs constituted by quantum walks was proposed in  $\mathcal{C}^3$  and  $\mathcal{C}^4$ . Secondly, the sets of reachable states, terminating states and diverging states of nondeterministic quantum programs starting in initial states under different measurement operators were discussed. It shows that the termination, diverging, the sets of reachable states and diverging states of nondeterministic quantum programs depend closely on the selection of measurement operators. The nondeterministic quantum programs starting in common initial states under different measurement operators is possible to terminate or diverge and the terminating states and diverging states of nondeterministic quantum programs coexist in the sets of reachable states starting in common initial states.

**Keywords** Quantum walks, Nondeterministic quantum programs, Termination probability, Program verification

### 1 引言

目前,量子算法仍然处在很低水平的量子线路阶段<sup>[1]</sup>。正如Abramsky<sup>[2]</sup>所说的,高水平的概念化的方法对量子系统的设计、编程、推理是很必要的。正如此,在过去的近20年中,多种量子程序语言先后被定义和提出<sup>[1-11]</sup>。同时,一些量子过程代数也先后被提出,如Gay和Nagarajan<sup>[5]</sup>提出的CQP代数、Lalire和Jorrand<sup>[6]</sup>提出的QAlg代数、冯元等<sup>[7]</sup>提出的qCCS代数,这些代数系统为量子通讯和并发程序建立了良好的模型。在经典程序中,为了验证程序的行为而不详细描述执行,非确定型程序提供了一个很重要的高水平的描述。最近,李扬佳等<sup>[12]</sup>介绍了非确定型量子程序的Markov链模型,给出了非确定型量子程序可达集合、终止、发散的概念,也给出了计算纯态可达集合、纯态终止集合的算法。

本文简要介绍了非确定型量子程序的基本概念及其终止问题,讨论了三维 Hilbert 空间  $\mathcal{C}^3$  和四维 Hilbert 空间  $\mathcal{C}^4$  中由量子游走构成的确定型量子程序和非确定型量子程序在不同的测量算子测量下从初态运行时的可达集合和发散集合,

及程序终止和发散的情况。

### 2 非确定型量子程序

本文用到的有关量子计算的基本概念见文献[1]。用  $D(H)$  表示 Hilbert 空间  $H$  上所有密度算子之集。设  $\rho \in D(H)$ ,  $\epsilon$  是一个超算子,  $\{E_i\}$  是其运算元, 则对任意的  $\rho$ , 有  $\epsilon(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$ , 且满足  $\sum_i E_i^\dagger E_i = I$ 。

**定义 1**<sup>[12]</sup> 设  $H$  是一个有限维 Hilbert 空间, 它也是量子程序的状态空间。一个非确定型量子程序是二元组

$$\mathcal{P} = (\{\epsilon_i \mid i=1, \dots, m\}, \{M_0, M_1\})$$

其中, (1)  $\epsilon_i$  是  $H$  上的超算子,  $i=1, \dots, m$ ; (2)  $\{M_0, M_1\}$  是  $H$  上的测量算子。

一个非确定型量子程序的一个计算是随机地选取  $m$  个超算子中的一个而组成的有限或无限的计算序列, 在整个计算过程中, 测量算子  $\{M_0, M_1\}$  作用在每一步上, 以决定程序是终止还是继续运行。假定程序有一个终止空间, 在每执行完一步后, 检查程序是否结束, 这里选取“yes-no”测量, 也就是说, 当测量结果为 0 时, 程序终止, 此时程序状态进入一个

到稿日期:2014-06-25 返修日期:2014-09-29 本文受四川省教育厅重点科研项目(14ZA0242),内江师范学院专业核心课程(hk07010201),四川省教育厅科研创新团队基金(14TD0026),教育部数学与应用数学专业综合改革(ZG0464),四川省数学与应用数学专业综合改革(01249)资助。

雷红轩(1967—),男,博士,教授,主要研究方向为自动机理论、量子程序验证和量子模型检测,E-mail:hongxuan\_lei@163.com。

终止空间;否则,当测量结果为 1 时,程序将进入下一步,继续完成保迹的超算子  $\epsilon$ 。

程序  $\mathcal{P}$  的执行表定义为集合

$$S = \{1, 2, \dots, m\}^\infty = \{s_1 s_2 \dots s_k \dots | s_k \in \{1, 2, \dots, m\}, k \geq 0\}$$

程序  $\mathcal{P}$  的有限执行表定义为集合

$$S_{fin} = \{1, 2, \dots, m\}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1, 2, \dots, m\}^n$$

为方便起见,用  $\theta$  表示空串。对任意的  $f = s_1 \dots s_k \in S_{fin}$ , 用  $|f|$  表示  $f$  的长度。对每一个  $|f| \leq n, f(\leq n)$  表示  $f$  的头部  $s_1 s_2 \dots s_n$ , 也将  $f = s_1 s_2 \dots \in S$  的头部写为

$$s(\leq n) = s_1 s_2 \dots s_n \in S_{fin}$$

和将尾部写为

$$s(> n) = s_{n+1} s_{n+2} \dots \in S$$

为了简单表示,用  $T_i$  表示如下的超算子

$$T_i(\rho) = \epsilon_i (M_i \rho M_i^\dagger), 0 \leq i \leq m$$

其中,  $\rho \in D(H)$ 。进而,对任意的  $s = s_1 s_2 \dots s_n \in S_{fin}$ , 写

$$T_s = T_{s_n} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1}$$

特别地,  $T_\theta(\rho) = \rho$ 。设  $\rho \in D(H)$  为输入态,程序  $\mathcal{P}$  按照执行表  $s = s_1 s_2 \dots \in S$  执行,在  $n$  步后程序的状态为

$$T_{s(\leq n)}(\rho)$$

定义 2<sup>[12]</sup> 设非确定型量子程序的输入态为  $\rho$ ,对任意有限执行表  $f \in S_{fin}$ ,定义程序  $\mathcal{P}$  在  $f$  内终止的概率为

$$t_f(\rho) = \sum_{n=0}^{|f|} \text{tr}(M_0 T_{f(\leq n)}(\rho) M_0^\dagger)$$

如果程序按照  $s = s_1 s_2 \dots$  执行,则程序在不超过  $n$  步终止的概率为  $t_{s(\leq n)}(\rho)$ 。进而,程序在有限步终止的概率为

$$t_s(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{s(\leq n)}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(M_0 T_{s(\leq n)}(\rho) M_0^\dagger)$$

明显地,  $\text{tr}(\rho) \geq t_s(\rho)$ ,且  $\text{tr}(\rho) - t_s(\rho)$  是程序在状态  $\rho$  运行执行表  $s$  时发散的概率。

对一个非确定型量子程序  $\mathcal{P}$ ,沿着任意一个  $s \in S$  的执行都是可能的。因此,下面给出在所有的执行路径上程序终止概率的定义。

定义 3<sup>[12]</sup> 从状态  $\rho$  开始运行的非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  终止的概率定义为

$$t(\rho) = \inf\{t_s(\rho) | s \in S\}$$

下面介绍非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  从状态  $\rho$  开始,沿着某一个执行表运行时的可达集合、终止状态集合、发散状态集合等概念和记号。

定义 4<sup>[12]</sup> (1) 开始于状态  $\rho$  的非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  的可达状态集合定义为

$$R(\rho) = \{T_f(\rho) | f \in S_{fin}\}$$

(2) 对任意的  $\rho \in D(H)$ ,如果  $t(\rho) = \text{tr}(\rho)$ ,则称  $\rho$  是程序  $\mathcal{P}$  的终止状态,简称为终态。用  $T$  表示程序  $\mathcal{P}$  的所有终态的集合,即

$$T = \{\rho \in D(H) | t(\rho) = \text{tr}(\rho)\}$$

(3) 对任意的  $\rho \in D(H)$ ,如果对某些  $s \in S$ ,有  $t_s(\rho) = 0$ ,则称  $\rho$  是  $\mathcal{P}$  的发散态。用  $D$  表示程序  $\mathcal{P}$  的所有发散态的集合,即

$$D = \{\rho \in D(H) | t_s(\rho) = 0, \text{对某些 } s \in S\}$$

(4) 用  $PD$  表示程序  $\mathcal{P}$  的所有发散纯态的集合,即

$$PD = \{|\varphi\rangle \in H | t_s(\varphi) = 0, \text{对某些 } s \in S\}$$

等式  $t(\rho) = \text{tr}(\rho)$  被叫做非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  的终止条件。这个条件的意思为:只要程序  $\mathcal{P}$  从状态  $\rho$  开始,则它一定会在有限步内终止且终止的概率为 1。

由于确定型量子程序是非确定型量子程序的一种特殊情况,即非确定型量子程序中,当  $m=1$  时,非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  就退化成一个确定型量子程序。后文中取  $\{\epsilon_i | i=1, 2, \dots, m\}$  中的  $\epsilon_i (i=1, 2, \dots, m)$  分别为  $\mathcal{C}^3$  和  $\mathcal{C}^4$  空间中的量子游走,来讨论它们分别组成的确定和非确定型量子程序在不同的测量算子作用下从不同的初态运行时的可达状态空间,以及程序的终止和发散情况。

### 3 $\mathcal{C}^3$ 中量子游走组成的非确定型量子程序

这里考虑环  $C_3 = (V, E)$  上的量子游走,其中顶点  $V = \{0, 1, 2\}$ ,  $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ 。第一个量子游走  $\mathcal{W}_1 = (\{W_1\}, \{M_0, M_1\})$  说明如下:

- 状态空间是具有正交基  $\{|i\rangle | i \in V\}$  的 3 维 Hilbert 空间;

- 初态是  $|0\rangle$ ,意思是说这个游走从顶点 0 开始;

- 游走的每一步由下面的酉算子给出:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

其中,  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ,它的意思是在每个顶点向左向右游走的概率都是  $\frac{1}{3}$ ,而不走的概率也为  $\frac{1}{3}$ ;

- 终止测量被定义为

$$M_0 = |2\rangle\langle 2|, M_1 = I_3 - |2\rangle\langle 2|$$

它的意思是在顶点 2 有一个吸收的界,其中  $I_3$  是 3 阶单位矩阵。

第二个量子游走  $\mathcal{W}_2 = (\{W_2\}, \{M_0, M_1\})$  的定义类似于第一个,但它的每一步由下面的酉算子描述:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$  组成的非确定型量子程序为

$$\mathcal{P} = (\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}, \{M_0, M_1\})$$

在量子游走组成的非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  中,测量起到很重要的作用,即选取不同的测量算子,程序  $\mathcal{P}$  从同一个初态运行同一个执行表所得到的可达集合可能不一样。因此,在下面的讨论中,我们分别取不同的测量算子来讨论  $\mathcal{P}$  的可达集合、终止集合和发散集合。

1) 测量算子  $M_0 = |2\rangle\langle 2|, M_1 = I_3 - M_0$

首先,对于确定型量子程序  $\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$ ,经计算有

对于  $\mathcal{W}_1$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in T, PD = \emptyset,$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

对于  $\mathcal{W}_2$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in T, PD = \emptyset,$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

其次,对于非确定型量子程序  $\mathcal{P} = (\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}, \{M_0, M_1\})$ ,

经计算有

$$|2\rangle \in T, PD = \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

类似地计算可得  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  的可达集合分别为:

$$R(|0\rangle\langle 0|) = \{|0\rangle, \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{(|1\rangle - |3\rangle)i}{\sqrt{2}}, \frac{(-|1\rangle + |3\rangle)i}{\sqrt{2}}\},$$

$$\frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$R(|1\rangle\langle 1|)$$

$$= \{|1\rangle, \frac{2|0\rangle-(1+\sqrt{3}i)|2\rangle}{\sqrt{8}}\}$$

$$\frac{2|0\rangle-(1-\sqrt{3}i)|2\rangle}{\sqrt{8}}, \frac{|0\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|0\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$R(|2\rangle\langle 2|) = \{|2\rangle\}$$

$$2) \text{ 测量算子 } M_0 = |1\rangle\langle 1|, M_1 = I_3 - M_0$$

首先,对于确定型量子程序  $\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$ , 经计算有

对于  $\mathcal{W}_1$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in T, PD = \emptyset$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

对于  $\mathcal{W}_2$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in T, PD = \emptyset$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

其次,对于非确定型量子程序  $\mathcal{P} = (\{W_1, W_2\}, \{M_0, M_1\})$ , 经计算有

$M_1\}$ , 经计算有

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in T, PD = \emptyset$$

通过类似地计算可得  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  的可达集合分别为:

$$R(|0\rangle\langle 0|)$$

$$= \{|0\rangle, \frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{(-|1\rangle+|2\rangle)i}{\sqrt{2}}, \frac{(|1\rangle-|2\rangle)i}{\sqrt{2}}, \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}\}$$

$$R(|1\rangle\langle 1|) = \{|1\rangle\}$$

$$R(|2\rangle\langle 2|)$$

$$= \{|2\rangle, \frac{2|0\rangle-(1+\sqrt{3}i)|2\rangle}{\sqrt{8}}, \frac{2|0\rangle-(1-\sqrt{3}i)|2\rangle}{\sqrt{8}}, \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\}$$

通过以上分析,我们得出如下结论:

(1) 对于确定型量子程序  $\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$ , 其  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  均为终态, 发散集合  $PD = \emptyset$ , 并且上面 3 个初态的可达集合相同, 即  $R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$  均为计算基态的集合;

(2) 测量算子对非确定型量子程序的终止集合、发散集合及初态的可达集合的影响很大。在不同的测量算子下程序从同一个初态运行, 可能终止也可能发散, 如初态  $|0\rangle, |1\rangle$ 。

(3) 如果测量算子取  $M_0 = |i\rangle\langle i|$ , 则  $R(|i\rangle\langle i|) = \{|i\rangle\}$ ,  $i=0, 1, 2$ 。

#### 4 $\mathbb{C}^4$ 中量子游走组成的非确定型量子程序

这里考虑环  $C_4 = (V, E)$  上的量子游走, 其中顶点  $V = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$ 。第一个量子游走  $\mathcal{W}_1 = (\{W_1\}, \{M_0, M_1\})$  说明如下:

• 状态空间是具有正交基  $\{|i\rangle | i \in V\}$  的 4 维 Hilbert 空间;

• 初态是  $|0\rangle$ , 意思是说这个游走从顶点 0 开始;

• 游走的每一步由下面的酉算子给出:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

它的意思是在每个顶点向左向右游走的概率都是  $1/3$ , 而不走的概率也为  $1/3$ 。

• 终止测量被定义为

$$M_0 = |2\rangle\langle 2|, M_1 = I_4 - |2\rangle\langle 2|$$

它的意思是在顶点 2 有一个吸收的阱, 其中  $I_4$  是 4 阶单位矩阵。

第二个量子游走  $\mathcal{W}_2 = (\{W_1\}, \{M_0, M_1\})$  的定义类似于第一个, 但是它的每一步由下面的酉算子描述:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$  组成的非确定型量子程序为

$$\mathcal{P} = (\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}, \{M_0, M_1\})$$

$$1) \text{ 测量算子 } M_0 = |2\rangle\langle 2|, M_1 = I_4 - M_0$$

首先,对于确定型量子程序  $\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$ , 经计算有

对于  $\mathcal{W}_1$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \in T, PD = \emptyset$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = R(|3\rangle\langle 3|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$$

对于  $\mathcal{W}_2$ :

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \in T, PD = \emptyset$$

$$R(|0\rangle\langle 0|) = R(|1\rangle\langle 1|) = R(|2\rangle\langle 2|) = R(|3\rangle\langle 3|) = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$$

其次,对于非确定型量子程序  $\mathcal{P} = (\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}, \{M_0, M_1\})$ , 经计算有

$$|2\rangle \in T, |0\rangle, |1\rangle, |3\rangle \in PD$$

通过类似的计算可得  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  的可达集合分别为:

$$R(|0\rangle\langle 0|) = \{|0\rangle, \frac{|1\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}, |2\rangle\}$$

$$R(|1\rangle\langle 1|) = \{|1\rangle, \frac{|0\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle-|2\rangle+2|3\rangle}{\sqrt{6}}, \frac{-|0\rangle+|2\rangle+|3\rangle}{\sqrt{3}}, \frac{|0\rangle-|2\rangle-|3\rangle}{\sqrt{3}}\}$$

$$R(|2\rangle\langle 2|) = \{|2\rangle\}$$

$$R(|3\rangle\langle 3|) = \{|3\rangle, \frac{-|0\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}, |2\rangle\}$$

注:  $R(\rho)$  中的态可能为终态, 也可能为发散态。如  $R(|0\rangle\langle 0|)$  中既有终态又有发散态。

$$2) \text{ 测量算子 } M_0 = |3\rangle\langle 3|, M_1 = I_4 - M_0$$

首先,对于确定型量子程序  $\mathcal{W}_1$  和  $\mathcal{W}_2$ , 经计算有

对于  $\mathcal{W}_1$ :

$$|3\rangle \in T, PD = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

对  $\mathcal{W}_2$ :

$$|3\rangle \in T, PD = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$$

其次,对于非确定型量子程序  $\mathcal{P} = (\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\}, \{M_0, M_1\})$ ,

经计算有

$$|3\rangle \in T, |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \in PD$$

通过类似地计算可得  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  的可达集合分别为:

$$R(|0\rangle\langle 0|) = \left\{ |0\rangle, \frac{|1\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle+|3\rangle}{\sqrt{2}}, |2\rangle \right\}$$

$$R(|1\rangle\langle 1|) = \left\{ |1\rangle, \frac{|0\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$R(|2\rangle\langle 2|) = \left\{ |2\rangle, \frac{|1\rangle-|3\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{-|1\rangle-|3\rangle}{\sqrt{2}}, |0\rangle \right\}$$

$$R(|3\rangle\langle 3|) = \left\{ |3\rangle \right\}$$

通过以上分析,我们得出以下结论:

(1)对于确定型量子程序  $\mathcal{M}_1$  和  $\mathcal{M}_2$ , 测量算子对程序的终止、发散影响很大。在不同的测量算子下,其初态可能是终态,也可能是发散态。如对于  $\mathcal{M}_1$ , 当测量算子为  $M_0 = |2\rangle\langle 2|$ ,  $M_1 = I_4 - M_0$  时,  $|0\rangle \in T$  为终态;但当测量算子为  $M_0 = |3\rangle\langle 3|$ ,  $M_1 = I_4 - M_0$  时,  $|1\rangle \in PD$  为发散态。

(2)测量算子对非确定型量子程序  $\mathcal{P}$  的终止集合、发散集合及初态的可达集合影响也很大。在不同的测量算子下程序  $\mathcal{P}$  从同一个初态运行,可能终止也可能发散。如选取  $M_0 = |2\rangle\langle 2|$ ,  $M_1 = I_4 - M_0$  时,  $|2\rangle \in T$  为终态,  $|3\rangle \in PD$  为发散态;而选取  $M_0 = |3\rangle\langle 3|$ ,  $M_1 = I_4 - M_0$  时,  $|3\rangle \in T$  为终态,  $|2\rangle \in PD$  为发散态。

(3)如果选取测量算子  $M_0 = |i\rangle\langle i|$ , 则  $R(|i\rangle\langle i|) = \{|i\rangle\}$  且  $|i\rangle \in T, i=0,1,2,3$ 。

(4)在同一个测量算子测量下,  $R(\rho)$  中的态可能为终态,也可能为发散态。如在测量算子  $M_0 = |2\rangle\langle 2|$ ,  $M_1 = I_4 - M_0$  下,  $R(|0\rangle\langle 0|)$  中既有终态又有发散态。

**结束语** 一个量子程序的可达集合就是程序从某一个初态运行时可以到达的状态集合,而程序终止是指程序从某一个初态运行时在某测量算子作用下其终止概率总为 1。本文主要讨论了三维 Hilbert 空间  $\mathcal{C}^3$  和四维 Hilbert 空间  $\mathcal{C}^4$  中由量子游走构成的确定型量子程序和非确定型量子程序在不同的测量算子测量下从不同的初态运行时的可达集合、发散集合,及其终止和发散的情况。研究表明:在  $\mathcal{C}^3$  中,由量子游走构成的确定型量子程序在不同的测量算子作用下每个初态都是终态,它们的可达集合相同;在  $\mathcal{C}^4$  中,由量子游走构成的确定型量子程序在不同的测量算子作用下并非每个初态都是终态,它们的可达集合也不相同。相对于由量子游走构成的非确定型量子程序而言,它们的终止、发散和可达集合、发散集合与选取的测量算子有密切的关系。程序在不同测量算子作用下从同一个初态运行时可能终止,也可能发散;同一个初态的可达集合中终态和发散态共存。

对由量子通讯中常用的比特翻转、去极化、幅值阻尼、相位阻尼等信道构成的非确定型量子程序的终止和发散情况的讨论,我们将在另文中给出。

## 参考文献

- [1] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- [2] Abramsky S. High-level methods for quantum computation and information[C]//Proceedings of 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'04). 2004: 410-414
- [3] Knill E H. Conventions for quantum pseudo-code[R]. LANL report LAUR-96-2724, 1996
- [4] Selinger P. Towards a quantum programming language [J]. Mathematical Structures in Computer Science, 2004, 14(4): 527-586
- [5] Gay S J, Nagarajan R. Communicating quantum processes, Annual Symposium on Principles of Programming Languages[C]//Proceedings of 32nd ACM SIGPLAN SIGACT symposium on Principles of programming languages. Long Beach, California, USA, 2005: 145-157
- [6] Lalire M, Jorrand P. A Process Algebraic Approach to Concurrent and Distributed Quantum Computation; Operational Semantics[C]//Proceedings of 2nd International Workshop on Quantum Programming Languages. Turku, Finland, 2004
- [7] Feng Y, Duan R Y, Ying M S. Bisimulation for quantum processes[C]//Proceedings of 38th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL). 2011: 523-534
- [8] D'Hondt E, Panangaden P. Quantum weakest preconditions[J/OL]. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0501157.pdf>
- [9] 徐家福, 宋方敏. 量子程序设计语言初探[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(6): 829-842  
Xu Jia-fu, Song Fang-min. Study on Quantum Programming Language[J]. Science in China (E): Information Science, 2008, 38(6): 829-842
- [10] 宋方敏, 钱士钧, 戴静安, 等. 量子程序设计语言 NDQJava 处理系统[J]. 软件学报, 2008, 19(1): 9-16  
Song Fang-min, Qian Shi-jun, Dai Jing-an, et al. Processing System of Quantum Programming Language NDQJava[J]. Journal of Software, 2008, 19(1): 9-16
- [11] Ying M S, Feng Y, Duan R Y, et al. An Algebra of Quantum Processes [J]. ACM Transactions on Computational Logic, 2009, 10(3): 19:36
- [12] Li Y J, Yu N K, Ying M S. Termination of Nondeterministic Quantum Programs[J]. Acta Informatica, 2014, 51(1): 1-24
- [13] Feng Y, Duan R Y, Ji Z F, et al. Proof rules for the correctness of quantum programs[J]. Theoretical Computer Science, 2007, 386: 151-166
- [14] Ying M S, Feng Y. Quantum loop programs[J]. Acta Informatica, 2010, 47(4): 221-250
- [15] Ying M S, Yu N K, Feng Y, et al. Verification of Quantum programs[J]. Science of Computer Programming, 2013, 78(9): 1679-1700
- [16] Yu N K, Ying M S. Reachability and Termination Analysis of Concurrent Quantum Programs [DB/OL]. <http://arXiv.org/abs/1206.1935v1>, 2012
- [17] 雷红轩, 席政军, 李永明. 几种量子程序终止的有效验证[J]. 计算机科学, 2012, 39(11): 75-78  
Lei Hong-xuan, Xi Zheng-jun, Li Yong-ming. Valid Verification of Termination for Some Quantum Programs[J]. Computer Science, 2012, 39(11): 75-78
- [18] 雷红轩, 席政军, 李永明. 广义量子 Loop 程序的若干性质[J]. 电子学报, 2013, 41(4): 727-732  
Lei Hong-xuan, Xi Zheng-jun, Li Yong-ming. Some Properties of Generalized Quantum Loop Program[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 727-732
- [19] 雷红轩, 席政军, 李永明. 量子最弱自由前置条件的交换性及其性质[J]. 软件学报, 2013, 24(5): 933-941  
Lei Hong-xuan, Xi Zheng-jun, Li Yong-ming. Commutativity of Quantum Weakest Liberal Precondition and Its Properties [J]. Journal of Software, 2013, 24(5): 933-941