第42卷 第6期　　计 算 机 科 学　　Vol. 42 No. 6
2015年6月　　Computer Science　　June 2015

基于优势关系的序形式背景约简

贺明利　魏　玲
（西北大学数学学院　西安 710127）

摘　要　形式概念分析是知识获取的一种有效工具，已被广泛应用到各个领域。从序形式背景出发，首先利用优势关系作为标准尺度，将序形式背景转化成单值形式背景；其次利用原有单值背景的差别矩阵给出单值背景的约简，进而得到基于优势关系的序形式背景的约简及属性特征的判定定理；最后将基于优势关系的序形式背景的约简与序信息系统的约简进行比较。

关键词　序形式背景，序信息系统，差别矩阵，约简

中图法分类号　TP18，O29　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2015.6.010

Reduction of Ordered Formal Context Based on Dominance Relation

HE Ming-li　WEI Ling
(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract　As an efficient tool for knowledge acquisition, formal concept analysis has been applied to various fields. Based on ordered formal context, this paper firstly used dominance relation as a standard scale to convert ordered context into a single-valued formal context. Then, using the discernibility matrix of original single-valued context, we gave a reduction of single-valued context. Furthermore, the reduction of the ordered context based on dominance relation and the theorem of attribute characteristic were obtained. Finally, we compared dominance relation-based reduction of ordered context with the dominance relation-based reduction of ordered information system.

Keywords　Ordered formal context, Ordered information system, Discernibility matrix, Reduction

1　引言

形式概念分析是由德国数学家 Wille R 于1982年作为一种数学理论首先提出的[1]。他将哲学的概念进行数学化的描述，实现了概念的一种形式化描述方法。概念格是形式概念分析理论的核心数据结构，它从本质上描述了对象和属性之间的联系，表明了概念之间的泛化和例化关系[2-5]，其相应的 Hasse 图实现了对数据的可视化。

形式概念分析已经成为知识发现和数据分析的有力数学工具。胡可云、陆玉昌等研究了形式概念分析在决策分析、数据挖掘、软件工程、信息检索等领域的应用[6,7]。

形式概念分析理论用来进行数据表达的基本形式是形式背景。然而，Ganter B、Wille R 提出通常情况下的数据分析并非起源于单值属性的形式背景（简称单值背景[8]），而是更为复杂的数据类型——多值属性的形式背景（简称多值背景[8]）；并且在处理动态数据以及概念格约简等方面至今未建立起一套较为系统的概念格理论体系，仍有许多理论问题需要研究和解决。因此，本文将从序形式背景出发，得到基于优势关系的序形式背景的约简及属性特征的判定定理；最后将基于优势关系的序形式背景的约简与序信息系统的约简进行比较。出发点比较简单，并且将形式概念分析与粗糙集的知识相结合，有助于推动三值形式背景的形式概念分析的研究。

2　理论基础

2.1　概念格理论

定义 1[9]　称(G,M,I)为一个形式背景，其中$G=\{g_1,\cdots,g_t\}$为对象集，每个$g_i(i\leqslant t)$称为一个对象；$M=\{m_1,\cdots,m_s\}$为属性集，每个$m_j(j\leqslant s)$称为一个属性；I为G和M之间的二元关系，$I\subseteq G\times M$。若$(g,m)\in I$，则称g具有属性m，用gIm表示。

对于形式背景(G,M,I)，在对象集$X\subseteq G$和属性集$B\subseteq M$上分别定义运算：

$$X^*=\{m|m\in M,\forall g\in X,gIm\}$$

$$B'=\{g|g\in G,\forall m\in B,\ gIm\}$$

对于$A\subseteq G,B\subseteq M$，若满足$A^*=B$且$A=B'$，则称$(A,B)$是一个形式概念，简称概念；其中$A$称为概念的外延，$B$称为概念的内涵。形式背景$(G,M,I)$的全体概念记为$L(G,M,I)$；$\forall(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in L(G,M,I)$，定义：

$$(A_1,B_1)\wedge(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2,(B_1\cup B_2)'^*)$$

$$(A_1,B_1)\vee(A_2,B_2)=((A_1\cup A_2)^{*\prime},B_1\cap B_2)$$

则$L(G,M,I)$是完备格，称为概念格。

定义 2[9]　称(G,M,W,I)为一个多值形式背景，其中

到稿日期：2014-04-03　返修日期：2014-04-29　本文受国家自然科学基金（11371014，11071281，61202206）资助。
贺明利（1987—），女，硕士生，主要研究方向为形式概念分析、粗糙集，E-mail：hml1136@163.com；**魏　玲**（1972—），女，教授，博士生导师，主要研究方向为形式概念分析、粗糙集、概率论等，E-mail：wl@nwu.edu.cn（通信作者）。

$G=\{g_1,\cdots,g_t\}$为对象集，每个$g_i(i\leqslant t)$称为一个对象；$M=\{m_1,\cdots,m_s\}$为属性集，每个$m_j(j\leqslant s)$称为(多值)属性；I为G、M和W之间的一个三元关系，$I\subseteq G\times M\times W$。若$(g,m,w)\in I$，则称对象$g$的$m$属性具有值$w$，用$m(g)=w$表示。

对于一个多值形式背景(G,M,W,I)，属性m的域定义为：

$$\mathrm{dom}(m)=\{g\in G\mid(g,m,w)\in I,\text{对于某些 }w\in W\}$$

如果$\mathrm{dom}(m)=G$，则称m是完全的。如果一个多值背景的所有属性都是完全的，则称这个多值背景是完全的。本文提到的多值形式背景都是完全的。

类似于单值形式背景，多值形式背景也可以用表格来表示。表格的每一行是对象，每一列是一个属性，位于x_i行、a_j列交叉处的项就是对象x_i在属性a_j上的取值。如果对象x_i在属性a_j上没有取值，则这个项是空的。

对于一个多值形式背景(G,M,W,I)，$\forall m\in M$，在对象集G上建立偏序关系"$\leqslant_m$"。对于任意$g_i,g_j\in G$，则$g_i\leqslant_m g_j$表示对象g_j关于属性m优于对象g_i。

定义 3[10] 设(G,M,I)为单值形式背景，$(X_i,B_i),(X_j,B_j)\in L(G,M,I)$，则称$DIS((X_i,B_i),(X_j,B_j))=B_i\cup B_j-B_i\cap B_j$为$(X_i,B_i)$与$(X_j,B_j)$的辨识集。称$\Lambda=(DIS((X_i,B_i),(X_j,B_j))\mid(X_i,B_i),(X_j,B_j)\in L(G,M,I))$为单值形式背景的可辨识矩阵。

定义 4[10] 设(G,M,I)为单值形式背景，如果存在属性集$D\subseteq M$，使得$L(G,D,I_D)\cong L(G,M,I)$，则称D为单值形式背景(G,M,I)的协调集。若进一步$\forall d\in D$，满足$L(G,D-\{d\},I_D)\neq L(G,M,I)$，则称$D$为单值形式背景$(G,M,I)$的约简集。

定义 5[10] 设$L(G,M_1,I_1)$和$L(G,M_2,I_2)$是两个概念格，如果$\forall(X_2,B_2)\in L(G,M_2,I_2)$，总存在$(X_1,B_1)\in L(G,M_1,I_1)$，使得$X_1=X_2$，则称$L(G,M_1,I_1)$细于$L(G,M_2,I_2)$，记作$L(G,M_1,I_1)\leqslant L(G,M_2,I_2)$。

定理 1[10] 设(G,M,I)为单值形式背景，$\forall D\subseteq M,D\neq\emptyset$，总有$L(G,M,I)\leqslant L(G,D,I_D)$。

引理 1[10]（约简判定定理） 设(U,A,F)为形式背景，$D\subseteq A,D\neq\emptyset,E=A-D$，则$D$是约简$\Leftrightarrow\forall e\in E$，$(e^{**}-E)^*=(e^{**}\cap D)^*=e^*$，且$\forall d\in D$，$(d^{**}-(E\cup\{d\}))^*=(d^{**}\cap(D-\{d\}))$。

引理 2[11] 设(U,A,F)为形式背景，$\forall a\in A$，有a是不必要属性$\Leftrightarrow(a^*,a^{**})$不是交不可约元。

2.2 序信息系统理论

定义 6[12] 称(U,A,F)为偏序关系序信息系统，其中$U=\{x_1,\cdots,x_t\}$为对象集，每个$x_i(i\leqslant t)$称为一个对象；$A=\{a_1,\cdots,a_s\}$为属性集，每个$a_j(j\leqslant s)$称为属性；I为U和A之间的一个二元关系，$I\subseteq U\times A$；$R_A^{\leqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times A\mid x_i\leqslant_m x_j\}$为属性集对应的优势关系，并且称$[x_i]_A^{\leqslant}=\{x_j\in U\mid(x_i,x_j)\in R_A^{\leqslant}\}$为对象$x_i$关于优势关系$R_A^{\leqslant}$的优势类。

定义 7[12] 设(U,A,F)为偏序关系序信息系统，称$D(x_i,x_j)=\{a_l\in A\mid f(x_i)>f(x_j)\}$为序信息系统的对象辨识集；并且称$\mathbf{D}=(D(x_i,x_j)\mid x_i,x_j\in U)$为偏序关系序信息系统的辨识矩阵。

定义 8[12] 设(U,A,F)为偏序关系序信息系统，若$B\subseteq A$，且满足

(1)$R_B^{\leqslant}=R_A^{\leqslant}$

(2)$\forall b\in B,R_{B-\{b\}}^{\leqslant}\neq R_A^{\leqslant}$

则称B是该序信息系统的约简。

3 基于优势关系的序形式背景约简

本节主要给出了求序形式背景约简的方法及属性特征的判定定理。该方法是利用转化的思想，将序形式背景转化成单值形式背景；根据单值背景的差别矩阵给出单值背景的约简；最终得到基于优势关系的序形式背景的约简。

定义 9 设(G,M,W,I)是多值形式背景，如果在某个属性值域上建立了偏序关系，则称这个属性为一个准则。当所有的属性都为准则时，该多值形式背景(G,M,W,I)为序形式背景。

不失一般性，取属性的值域为实数，定义关系"$\leqslant_m$"为：$x_i\leqslant_m x_j\Leftrightarrow m(x_i)\leqslant m(x_j)$。

定义 10 设(G,M,W,I)为序形式背景，"$\leqslant_m$"为G上的偏序关系，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值形式背景，其中J是由"$\leqslant_m$"诱导的二元关系，即：$\forall(g,h)\in G\times G$，$m\in M,(g,h)Jm\Leftrightarrow m(g)\leqslant_m m(h)$。$L(G\times G,M,J)$为$(G\times G,M,J)$对应的概念格，$(G\times G,D,J_D)$为背景$(G\times G,M,J)$的子背景。如果存在属性集$D\subseteq M$，使得$L(G\times G,D,J_D)\cong L(G\times G,M,J)$，则称$D$为序形式背景$(G,M,W,I)$的协调集。若进一步$\forall d\in D$，满足$L(G\times G,D-\{d\},J_D)\neq L(G\times G,M,J)$，则称$D$为序形式背景$(G,M,W,I)$的约简。

定理 2 设(G,M,W,I)是序形式背景，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值背景，$\forall B\subseteq M,B\neq\emptyset$，则$B$是$(G,M,W,I)$的协调集$\Leftrightarrow L(G\times G,B,J_B)\leqslant L(G\times G,M,J)$。

证明：(必要性)B是(G,M,W,I)的协调集，由定义 10 可知，$L(G\times G,B,J_B)\cong L(G\times G,M,J)$，则有$L(G\times G,B,J_B)\leqslant L(G\times G,M,J)$。

(充分性)$B\subseteq M,B\neq\emptyset$，由定理 1 可知，$L(G\times G,M,J)\leqslant L(G\times G,B,J_B)$，又因为$L(G\times G,B,J_B)\leqslant L(G\times G,M,J)$，所以有$L(G\times G,B,J_B)\cong L(G\times G,M,J)$，即$B$是$(G,M,W,I)$的协调集。

定理 3 序形式背景(G,M,W,I)的约简一定存在。

证明：在序形式背景(G,M,W,I)中，若$\forall a_i\in M$，都有$L(G\times G,M-\{a_i\},J_{M-\{a_i\}})\neq L(G\times G,M,J)$，则$M$本身就是序形式背景的约简；若存在$a_i\in M$，使得$L(G\times G,M-\{a_i\},J_{M-\{a_i\}})=L(G\times G,M,J)$，则$M$不是序形式背景的约简，那么再研究$B=M-\{a_i\}$，若$\forall b_i\in B$，都有$L(G\times G,B-\{b_i\},J_{M-\{b_i\}})\neq L(G\times G,M,J)$，则$B$为约简；否则，再研究$B-\{b_i\}$。重复上述过程，由于$M$为有限集合，因此序形式背景的约简一定存在。

但是一般来说，序形式背景的约简不一定唯一。

定义 11 设序形式背景(G,M,W,I)所有的约简集为$\{D_i\mid D_i\text{是序背景的约简},i\in\tau\}$($\tau$为一个指标集)。可将序形式背景的属性集$M$分为以下 3 部分：

(1)核心属性b：$b\in\bigcap_{i\in\tau}D_i$；

(2)相对必要属性 c：$c\in\bigcup_{i\in\tau}D_i-\bigcap_{i\in\tau}D_i$；

(3)绝对不必要属性 d：$d\in M-\bigcup_{i\in\tau}D_i$。

定理 4 设(G,M,W,I)是序形式背景，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值背景。$\forall a\in M$，a 为(G,M,W,I)的核心属性$\Leftrightarrow$在$(G\times G,M,J)$上有$(a^{**}-a)^{*}\neq a^{*}$。

证明：(反证法)a 不是核心属性$\Leftrightarrow M-\{a\}$是协调集$\Leftrightarrow$在$(G\times G,M,J)$上有$(a^{**}-a)^{*}=a^{*}$。命题得证。

定理 5 设(G,M,W,I)是序形式背景，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值背景，K 为序背景(G,M,W,I)的核心集，$K\subseteq M$，$K\neq\varnothing$。$\forall a\in M-K$，若在$(G\times G,M,J)$上有$(a^{**}\cap K)^{*}=a^{*}$，则 a 是(G,M,W,I)的绝对不必要属性。

证明：假设 a 不是绝对不必要属性，则存在约简 D，$a\in D$。由于 $a\in M-K$ 且 $K\subseteq D$，因此 $K\subseteq D-\{a\}$。于是在$(G\times G,M,J)$上有 $a^{**}\cap K\subseteq a^{**}\cap(D-\{a\})$，从而$(a^{**}\cap(D-\{a\}))^{*}\subseteq(a^{**}\cap K)^{*}=a^{*}$。另一方面，$a^{*}\subseteq a^{*}\cup(D-\{a\})^{*}\subseteq(a^{**}\cap(D-\{a\}))^{*}$，于是$(a^{**}\cap(D-\{a\}))^{*}=a^{*}$。由引理 1 可知 D 不是约简，这与 D 是约简矛盾。因此 a 是绝对不必要属性。

推论 1 设(G,M,W,I)是序形式背景，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值背景，若 G 中的对象只有两个，则(G,M,W,I)的属性集 M 中没有绝对不必要属性。

证明：假设 $a\in M$ 是绝对不必要属性，根据引理 2 可知：在$(G\times G,M,J)$上(a^{*},a^{**})不是交不可约元，则存在 $b,c\in M$ 且 $b\neq c$，使得$(a^{*},a^{**})=(b^{*},b^{**})\wedge(c^{*},c^{**})=((b^{*}\cap c^{*}),(b^{**}\cup c^{**})^{**})$。由于优势关系下的序形式背景存在序关系，且转化为单值背景时对象集是以对象对的形式出现，因此考虑(x,y)和(y,x)，在$(G\times G,M,I)$背景上某一属性 a 上的取值有以下 3 种情况：①(x,y)和(y,x)都取 1；②(x,y)取 1，(y,x)取 0；③(x,y)取 0，(y,x)取 1。从而若(a^{*},a^{**})不是交不可约元，则 $a^{*}=b^{*}\cap c^{*}$ 不能得到 $a^{*}=b^{*}$ 或 $a^{*}=c^{*}$。故在属性 a 上(x,y)和(y,x)都取 0，这与(G,M,W,I)中存在的序关系矛盾，即证。

利用定理 4 和定理 5，可以根据序形式背景的属性特征来构造序形式背景的约简：设(G,M,W,I)是序形式背景，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)所对应的单值背景。$\forall a\in M$，称$[a]=\{b\mid a^{*}=b^{*},b\in M\}$为 a 的类，则在 M 上所有的类中取一个元素组成的集合 B 即为序形式背景(G,M,W,I)的约简。如果$\forall C\subseteq M$，若 $B\subseteq C\subseteq M$，则称 C 为序形式背景(G,M,W,I)的协调集。

例 1 对如表 1 所列的序形式背景(G,M,W,I)，求其约简。

表 1 背景(G,M,W,I)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	1	2	1	4	2
x_2	3	2	2	4	3
x_3	1	1	2	1	3
x_4	2	1	3	1	4
x_5	3	3	2	5	3

(1)利用优势关系将表 1 所对应的序形式背景转化为单值背景。表 2 中$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)中 M 基于优势关系诱导出的单值背景。

表 2 背景$(G\times G,M,J)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
(x_1,x_1)	1	1	1	1	1
(x_1,x_2)	1	1	1	1	1
(x_1,x_3)	1	0	1	0	1
(x_1,x_4)	1	0	1	0	1
(x_1,x_5)	1	1	1	1	1
(x_2,x_1)	0	1	0	1	0
(x_2,x_2)	1	1	1	1	1
(x_2,x_3)	0	0	1	0	1
(x_2,x_4)	0	0	1	0	1
(x_2,x_5)	1	1	1	1	1
(x_3,x_1)	1	1	0	1	0
(x_3,x_2)	1	1	1	1	1
(x_3,x_3)	1	1	1	1	1
(x_3,x_4)	1	1	1	1	1
(x_3,x_5)	1	1	1	1	1
(x_4,x_1)	0	1	0	1	0
(x_4,x_2)	1	1	0	1	0
(x_4,x_3)	0	1	0	1	0
(x_4,x_4)	1	1	1	1	1
(x_4,x_5)	1	1	0	1	0
(x_5,x_1)	0	0	0	0	0
(x_5,x_2)	1	0	1	0	1
(x_5,x_3)	0	0	1	0	1
(x_5,x_4)	1	1	1	1	1
(x_5,x_5)	1	1	1	1	1

(2)若记 $T=\{(x_i,x_j)\mid(x_i,x_j)$在 M 上的值均为 $1\}$，把单值背景$(G\times G,M,J)$的等价类进行合并，得到简化的$(G\times G,M,J)$，如表 3 所列。

表 3 $(G\times G,M,J)$的简化

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
T	1	1	1	1	1
$(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_5,x_2)$	1	0	1	0	1
$(x_2,x_1),(x_4,x_1),(x_4,x_3)$	0	1	0	1	0
$(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_5,x_3),(x_5,x_4)$	0	0	1	0	1
$(x_3,x_1),(x_4,x_2),(x_4,x_5)$	1	1	0	1	0
(x_5,x_1)	0	0	0	0	0

(3)表 3 的概念格 $L(G\times G,M,J)$如图 1 所示。为简单起见，集合皆用其元素的串表示，概念外延用对象的下标表示。即概念$(\{T,(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_5,x_2)\},\{a_1a_3a_5\})=(T$、$13$、$14$、$52,a_1a_3a_5)$。

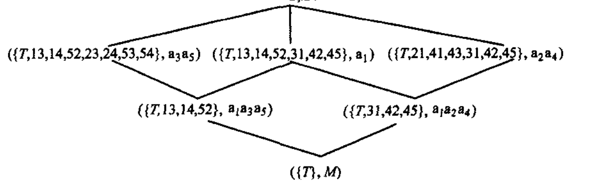

图 1 $L(G\times G,M,\mathrm{I})$

(4)求单值形式背景$(G\times G,M,J)$的差别矩阵，如表 4 所列。其中

$FC_1=(G\times G,\varnothing)$；

$FC_2=(T$、13、14、23、24、52、53、$54,a_3a_5)$；

$FC_3=(T$、13、14、31、42、45、$52,a_1)$；

$FC_4=(T$、21、31、41、42、43、$45,a_2a_4)$；

$FC_5=(T$、13、14、$52,a_1a_3a_5)$；

$FC_6=(T$、31、42、$45,a_1a_2a_4)$；

$FC_7=(T,M)$。

表 4　背景$(G\times G,M,I)$的差别矩阵

	FC_1	FC_2	FC_3	FC_4	FC_5	FC_6	FC_7
FC_1	$\varnothing$						
FC_2	a_3a_5	$\varnothing$					
FC_3	a_1	$a_1a_3a_5$	$\varnothing$				
FC_4	a_2a_4	$a_2a_3a_4a_5$	$a_1a_2a_4$	$\varnothing$			
FC_5	$a_1a_3a_5$	a_1	a_3a_5	M	$\varnothing$		
FC_6	$a_1a_2a_4$	M	a_2a_4	a_1	$a_2a_3a_4a_5$	$\varnothing$	
FC_7	M	$a_1a_2a_4$	$a_2a_3a_4a_5$	$a_1a_3a_5$	a_2a_4	a_3a_5	$\varnothing$

(5)利用表 4 计算单值形式背景$(G\times G,M,J)$的约简，为：

$a_1\wedge(a_2\vee a_4)\wedge(a_3\vee a_5)$

$=(a_1\wedge a_2\wedge a_3)\vee(a_1\wedge a_2\wedge a_5)\vee(a_1\wedge a_3\wedge a_4)\vee(a_1\wedge a_4\wedge a_5)$

即该序形式背景基于优势关系的约简有 4 个，分别为 $B_1=\{a_1,a_2,a_3\}$；$B_2=\{a_1,a_2,a_5\}$；$B_3=\{a_1,a_3,a_4\}$；$B_4=\{a_1,a_4,a_5\}$。这 4 个约简保持了原背景上所有对象在每一个属性下的序关系不变。

(6)由定义 11 知，本例基于优势关系的序形式背景属性分类为：核心属性 a_1；相对必要属性 a_2,a_3,a_4,a_5。

4　基于优势关系的序形式背景约简与序信息系统约简的比较

有优势关系的信息表既可看成序形式背景，又可看成序信息系统，本节从这两个角度来研究两种约简之间的关系。

定理 6　设(G,M,W,I)是信息表，$(G\times G,M,J)$是(G,M,W,I)看作序形式背景所对应的单值背景，则(G,M,W,I)基于序形式背景的约简为其基于序信息系统约简的协调集。

证明：由序形式背景约简的定义及序信息系统定义知：若 $x_i\in[x_j]_A^{\leqslant}$，当且仅当$(x_j,x_i)$为$(G\times G,M,J)$中拥有所有属性的对象。又由“＊”和“′”算子的性质可知：这样的对象出现在任何一个外延集中，不妨设 A_i 为$(G\times G,M,J)$的外延集，$\bigcap A_i$即为拥有所有属性的对象，由于序形式背景的约简保持格结构不变，即保持外延集不变，因此所有外延集的交不变，从而保持了优势类不变。即证得信息表(G,M,W,I)基于序形式背景的约简为其基于序信息系统约简的协调集。

定理 6 表明：基于优势关系的序形式背景约简既是保持格结构不变的约简，也是保持对象在每个属性下的序关系不变的约简；而基于优势关系的序信息系统的约简是保持优势类不变。基于优势关系的序形式背景约简不仅可以反映优势类上对象的序关系，而且可以反映不在同一优势类的对象之间的序关系，保证了信息表序关系的全面性，这正是序形式背景约简保持序关系的优越性。

例 2　(续例 1)将表 1 看成基于优势关系的序信息系统(U,A,F)，下面利用已有的知识求(U,A,F)的约简。

(1)由表 1 可知(U,A,F)的优势类有：

$[x_1]_A^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_5\}$；$[x_2]_A^{\leqslant}=\{x_2,x_5\}$；

$[x_3]_A^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5\}$；$[x_4]_A^{\leqslant}=\{x_4\}$；

$[x_5]_A^{\leqslant}=\{x_5\}$

由定理 6 证明知：对于任意 $x_i\in U$，$x_i\times[x_i]_A^{\leqslant}$(其中$[x_i]_A^{\leqslant}$为 x_i 的优势类)为$(G\times G,M,J)$中拥有所有属性的对象。

(2)利用定义 7 求序信息系统(U,A,F)的差别矩阵，结果如表 5 所列。

表 5　序信息系统(U,A,F)的差别矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	a_2a_4	a_2a_4	$\varnothing$
x_2	$a_1a_3a_5$	$\varnothing$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_4$	$\varnothing$
x_3	a_3a_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	$a_1a_3a_5$	a_3a_5	$a_1a_3a_5$	$\varnothing$	a_3a_5
x_5	M	a_2a_4	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_4$	$\varnothing$

(3)由序信息系统(U,A,F)的差别矩阵得：

$(a_2\vee a_4)\wedge(a_3\vee a_5)$

$=(a_2\wedge a_3)\vee(a_2\wedge a_5)\vee(a_3\wedge a_4)\vee(a_4\wedge a_5)$

则，序信息系统(U,A,F)的约简为：

$C_1=\{a_2,a_3\}$；$C_2=\{a_2,a_5\}$；

$C_3=\{a_3,a_4\}$；$C_4=\{a_4,a_5\}$

(4)序信息系统(U,A,F)的属性分类为：相对必要属性 a_2,a_3,a_4,a_5；绝对不必要属性 a_1；无核心属性。

(5)结合例 1 可知：序形式背景(G,M,W,I)的约简为序信息系统(U,A,F)约简的协调集，即 $C_1\subseteq B_1$，$C_2\subseteq B_2$，$C_3\subseteq B_3$，$C_4\subseteq B_4$。

由以上两个例子可以看出：将信息表 1 看作序信息系统(U,A,F)时，其约简很难反映属性 a_1 下各个对象之间的序关系；而看作序形式背景(G,M,W,I)时，其约简容易反映各个对象在任何一个属性下的序关系。例如 x_1 和 x_3 在属性 a_1 下的序关系在(U,A,F)的约简中很难体现，但是在(G,M,W,I)的约简中就很容易看出来。

结束语　本文提出了一种利用优势关系得到序形式背景约简的方法，并且给出了序形式背景属性特征的判定定理。同时针对这种方法给出了它的一个结论——同一张信息表基于序形式背景的约简为其基于序信息系统约简的协调集，我们运用这一结论能更透彻地了解信息表中属性间序关系的重要程度，从而提取需要的信息。本文的研究进一步揭示了序形式背景与序信息系统约简之间的内在关系，完善了概念格理论，为概念格理论更深入的研究做了准备工作。

参 考 文 献

[1] Wille R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts [M]// Riaral I ed. Ordered Sets. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470

[2] Carpineto C, Romano G. Concept Data Analysis: Theory and Application [M]. John Wiley&Sons, Ltd, 2004

[3] Godin R. Incremental concept formation algorithm based on Galois lattices [J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 246-267

[4] Tu Bao-ho. Discovering and using knowledge from unsupervised data [J]. Decision Support System, 1997, 21(1): 29-42

[5] Belohlavek R. fuzzy closure operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 262: 473-489

[6] 胡可云，陆玉昌，石纯一. 概念格及其应用进展[J]. 清华大学学报，2000，40(9)：76-81

Hu Ke-yun, Lu Yu-chang, Shi Chun-yi. Advances in concept lattice and its application [J]. Journal of Tsinghua University: science and technology, 2000, 40(9): 76-81

[7] 胡可云. 基于概念格和粗糙集的数据挖掘方法研究[D]. 北京：清华大学，2001

Hu Ke-yun. The research of data mining method based on concept lattice and rough set [D]. Beijing: Tsinghua University, 2001

(下转第 56 页)

$$m(A)=\begin{cases}0, & A=\emptyset \\ \dfrac{\sum\limits_{\cap A_i=A}\prod\limits_{j=1}^{n}w_j m_j(A_i)}{1-\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n\cap A_i=\emptyset}\prod\limits_{j=1}^{n}w_j m_j(A_i)}, & A\neq\emptyset\end{cases}$$

其中，w_j 为给定证据 x 时，条件属性 $a_j\in AT$ 对应的近似条件概率分配权重。

4 实例分析

下面通过一个实例分析验证提出的序信息系统中基于粗糙集的证据获取与合成方法的有效性和优越性。

例 如表 1 所列，$I^{\geqslant}$ 为决策序信息系统，给定证据 $x=\{3,2,2,2\}$，$y=\{1,2,1,2\}$，通过决策表来推断其决策。

表 1 决策序信息系统

U	A				
	a_1	a_2	a_3	a_4	d
x_1	1	2	2	2	1
x_2	3	2	2	2	1
x_3	1	2	1	2	2
x_4	2	2	1	2	2
x_5	1	1	1	1	3
x_6	1	2	1	2	3
x_7	2	1	1	1	3
x_8	2	2	2	1	3
x_9	1	2	1	2	3
x_{10}	3	1	1	2	3
x_{11}	3	2	2	2	3
x_{12}	3	2	2	2	3

利用第 3 节知识分别计算条件属性 $a_j(j=1,2,3,4)$的重要度，给定证据 x 和 y 时条件属性的证据支持度，进而通过上一节的公式计算得到近似条件概率分配 $m_j(d_i/x)$和 $m_j(d_i/y)$，$j=1,2,3,4$，$i=1,2,3$，进一步得到证据 x 和 y 的决策结果，如表 2 所列。

表 2 证据决策结果

		{1}	{2}	{3}	{1,3}	{2,3}
方法 1	证据 x	0	0	0	0	0
	证据 y	0	0	0	0	0
方法 2	证据 x	0.0853	0	0.9147	0	0
	证据 y	0	0.0502	0.9498	0	0
方法 3	证据 x	0.0453	0	0.9547	0	0
	证据 y	0	0.0416	0.9584	0	0

在表 2 中，方法 1 是通过将经典信息系统中等价关系直接换为优势关系，经计算得到的证据 x 和 y 的近似条件概率分配值均为零；方法 2 是在证据合成时将证据同等对待，经计算虽然结果与表 1 接近，但与实际意义不相符；方法 3 即为本文第 3 节提出的方法，其结果说明证据 x 和 y 的决策结果更偏重于决策{3}，这与通过实际调查得到的表 1 相符合，并且从另外一个角度提供了一种已知对象的条件属性值来做决策的方法，进一步丰富了理论基础，强化了本文的意义，使该方法的有效性和优越性更明了。

结束语 粗糙集理论能有效地分析和处理不精确、不一致、不完整等各种不完备信息，证据理论是处理不确定决策问题的重要方法。根据两者之间的关系，本文提出了一种序信息系统中基于粗糙集的近似条件概率分配获取方法，解决了对于不同的证据从决策表得到相同的基本可信度分配的问题；并且给出了证据(属性)的近似条件概率分配权重计算方法，解决了组合证据无权重的问题。实例分析表明，与其他方法相比，本文方法更具有效性。

参 考 文 献

[1] Yee L, Wu Wei-zhi, Zhang Wen-xiu. Knowledge acquisition in incomplete information systems: a rough set approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168(1): 164-180

[2] Liang Ji-ye. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2004, 12(1): 37-46

[3] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough approximation of a preference relation by dominance relation[J]. European Journal of Operation Research, 1999, 117: 63-83

[4] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. A new rough set approach to multicriteria and multiattribute classificatioin[C]// Polkowsik L, Skowron A, eds. Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'98). Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol 1424, Berlin: Springer-Verlag, 1998: 60-67

[5] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. A new rough sets approach to evaluation of bankruptcy risk[C]// Zopounidis X, ed. Operational Tools in the Management of Financial Risks. Dordrecht: Kluwer, 1999: 121-136

[6] Shao Ming-wen, Zhang Wen-xiu. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20: 13-27

[7] Xu Wei-hua, Zhang Wen-xiu. Measuring roughness of generalized rough sets induced by a covering[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 2443-2455

[8] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京：科学出版社，2013
Xu Wei-hua. Ordered Informaton System and Rough Set[M]. Beijing: Science Press, 2013

[9] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991

[10] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社，2003
Zhang Wen-xiu, Liang Yi, Wu Wei-zhi. Information System and Knowledge Discovery[M]. Beijing: Science Press, 2003

(上接第 49 页)

[8] Ganter B, Wille R. Application of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences[M]. Roberts F ed. New York: Springer, 1983: 139-167

[9] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis [M]. Mathematical Foundations[M]// New York: Springer-Verlag, 1999

[10] 魏玲. 粗糙集与概念格约简理论与方法[D]. 西安：西安交通大学，2005
Wei Ling. Reduction Theory and Approach to Rough Set and Concept Lattice [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2005

[11] 王霞. 基于不可约元的概念格的概念约简[D]. 西安：西安交通大学，2008
Wang Xia. Attribute reduction in concept lattice based on irreducible elements [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2008

[12] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京：科学出版社，2013
Xu Wei-hua. Ordered Information Systems and Rough Set [M]. Beijing: Science Press, 2013