

基于 Givens 矩阵和联合非线性不相关的盲源分离新算法

赵礼翔¹ 刘国庆²

(南京工业大学电子与信息工程学院 南京 211816)¹ (南京工业大学理学院 南京 211816)²

摘 要 针对源信号统计独立的盲源分离(Blind Source Separation, BSS)问题,提出了一种基于 Givens 矩阵和联合非线性不相关的盲源分离新算法。由于分离信号独立性的度量是影响算法有效性的重要因素,因此首先提出了一种改进的度量独立性的方法,该方法以独立源信号的联合非线性不相关来度量独立性;其次,结合 Givens 矩阵可以对分离矩阵施加正交性约束且能减少要估计参数个数的性质,将盲源分离问题转化成无约束优化问题,并利用拟牛顿法中的 BFGS 算法求解该无约束优化问题,得到分离矩阵;最后,通过模拟混合信号和真实语音混合信号的分离实验验证了该算法的有效性。

关键词 盲源分离,独立成分分析,非线性不相关,Givens 矩阵

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.5.029

Novel Blind Source Separation Algorithm Based on Givens Matrix and Joint Non-linear Uncorrelatedness

ZHAO Li-xiang¹ LIU Guo-qing²

(College of Electronics and Information Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)¹

(College of Science, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)²

Abstract A novel algorithm based on Givens matrix and joint non-linear uncorrelatedness for blind source separation (BSS) where sources are statistically independent was proposed. Firstly, we measured independence with the joint non-linear uncorrelatedness of independent sources, since the measurement is the key to the effectiveness of the BSS algorithm. Secondly, based on the property that Givens matrices can impose the orthogonal constraint on the separation matrix and meanwhile decrease the number of parameters to be estimated by half approximately, we converted the BSS problem into an unconstrained optimization problem which is then solved by BFGS algorithm of quasi-Newton method. Finally, the separation for simulated mixed signals and real mixed voice signals shows the effectiveness of our algorithm.

Keywords Blind source separation, Independent component analysis, Non-linear uncorrelatedness, Givens matrix

1 引言

盲源分离是指在信道和源信号未知的情况下,仅从多个观测信号中分离出源信号的过程。近年来该技术已经成为信号处理领域研究的热点问题,在数字图像处理^[1]、生物医学信号处理^[2]、语音信号处理^[3]、神经网络^[4]、压缩感知^[5]等领域有着广泛的应用。

针对源信号统计独立的盲源分离问题,独立性的度量往往成为制约算法有效性的重要因素。独立性的度量方法通常依据独立的统计性质来确定,如文献[6,7]以分离信号的非高斯性进行度量,当其非高斯性达到最大时,即近似认为实现了最佳分离。该度量方法的依据是认为两个独立随机变量之和形成的分布比原始的随机变量中的任意一个更接近于高斯分布,而中心极限定理^[8]指出:无穷多个独立同分布的随机变量之和构成的随机变量近似服从高斯分布,因此这一度量方法

并不是严格满足中心极限定理。另一方面,由于两个随机变量的独立意味着它们的任意非线性变换都是不相关的,因此文献[9,10]提出了以高阶相关系数来度量独立性,但是该方法仅以分离信号的某一个非线性变换的不相关性来度量独立性,显然这不足以达到任意非线性变换都是不相关的这一要求。

鉴于此,本文提出了一种改进的度量独立性的方法,并结合 Givens 矩阵可以对分离矩阵施加正交性约束且能减少要估计参数个数的性质^[11],提出了一种新的盲源分离算法。该算法首先提出以独立源信号的联合非线性不相关作为度量独立性的方法;其次,利用 Givens 矩阵参数化表示分离矩阵,这样不仅对分离矩阵施加了正交性约束,同时使得需要估计参数的个数大致减半,在此基础上,将盲源分离问题转化为一个无约束优化问题,并利用拟牛顿法中的 BFGS 算法求解该无约束优化问题;最后,模拟混合信号和真实语音混合信号的分离实验验证了该算法的有效性。

到稿日期:2014-06-06 返修日期:2014-08-29 本文受江苏省自然科学基金(BK2011238),南京气象雷达开放实验室研究基金(BJG201103)资助。

赵礼翔(1991—),男,硕士,主要研究方向为盲源分离,E-mail:lixiangzhao0104@126.com;刘国庆(1966—),男,博士,教授,主要研究方向为图像处理、数据融合、雷达信号处理。

2 盲源分离模型

盲源分离模型可以表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{S} = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)]^T, t = 1, 2, \dots, m, \mathbf{S}$ 是源信号, \mathbf{A} 是一个 $m \times n$ 维常数混合矩阵, \mathbf{X} 是观测信号, $\boldsymbol{\eta}$ 是噪声信号。为了简化模型, 常常略去噪声, 同时假设 $m = n$ 且 \mathbf{A} 是可逆的。

设 \mathbf{A} 的逆矩阵为 \mathbf{W} , 通常称 \mathbf{W} 为分离矩阵, 则

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}\mathbf{X} \quad (2)$$

盲源分离的目标是根据已知的观测信号 \mathbf{X} 在混合矩阵 \mathbf{A} 未知的条件下求未知的源信号 \mathbf{S} 。

3 提出算法

3.1 独立性的度量

首先给出独立随机变量的一些性质:

性质 1^[12] 若随机变量 x 和 y 互相独立, 则 $f(x)$ 与 $g(y)$ 仍然独立。

性质 2^[8] 若两个随机变量互相独立, 则它们的协方差为 0。

由性质 1 可知, 独立随机变量的任意非线性变换仍然是独立的; 由性质 2 可知, 独立源信号的协方差矩阵 \mathbf{C}_s 是一个对角矩阵, 因此可得, 独立源信号的任意非线性变换的协方差矩阵仍然是一个对角矩阵。在文献[13]中, 针对时间序列的盲源信号分离问题, 由于时间序列在不同时延下的协方差矩阵是对角矩阵, 原则上是希望多步时延对应的时延协方差矩阵同时是对角化的, 然而这并非总是可能的, 因此以多步时延协方差矩阵的联合近似对角化程度来度量独立性。受此启发, 本文以独立源信号的联合非线性不相关来度量独立性, 即以源信号的多个非线性变换的协方差矩阵的联合近似对角化程度来度量独立性。

3.2 Givens 矩阵

Givens 矩阵^[11] 定义为如下形式的矩阵:

$$\mathbf{G}(p, q, \theta_{p,q}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3)$$

$\mathbf{G}(p, q, \theta_{p,q})$ 是 $n \times n$ 阶方阵, 式(3)中的 $c = \cos(\theta_{p,q})$ 和 $s = \sin(\theta_{p,q})$ 出现在第 p 行和第 q 行与第 p 列和第 q 列的交叉点上, 其中 $1 \leq p < q \leq n$ 。

定理 1^[11] 任意的 n 阶正交矩阵 $\mathbf{Q}_{n \times n}$, 存在 $N = n(n-1)/2$ 个 Givens 变换矩阵 $\mathbf{G}(p, q, \theta_{p,q})$, 使得

$$\mathbf{Q}_{n \times n} = \prod_{\substack{1 \leq p < q \leq n \\ p < q \leq n}} \mathbf{G}(p, q, \theta_{p,q}) \quad (4)$$

由于定理 1 没有对这 N 个 Givens 矩阵的排列顺序进行限制, 因此可以对这 N 个 Givens 矩阵以任意顺序排列, 第 l 个 Givens 矩阵记作 $\mathbf{G}_l(\theta_l)$, 此时可以将式(4)写成:

$$\mathbf{Q}_{n \times n} = \prod_{l=1}^N \mathbf{G}_l(\theta_l) \quad (5)$$

其中, $N = n(n-1)/2$ 。

在盲源分离算法中, 白化是非常重要的预处理步骤, 在对

观测信号白化预处理后, 剩下工作的关键就是在正交空间中搜索分离矩阵。显然, 定理 1 不仅可以对分离矩阵施加正交性约束, 同时可以使得盲源分离问题所要求解的参数个数由原来的 n^2 减少到 $n(n-1)/2$, 减少了算法的计算量。

3.3 目标函数

基于上述独立性的度量方法和 Givens 矩阵的性质, 本文将盲源分离问题转化为如下的无约束优化问题, 其目标函数如下:

$$\min I(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{\text{MAXK}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{cov}^2(f_k(s_i(t)), g_k(s_j(t))) \quad (6)$$

其中, $t = 1, 2, \dots, T, T$ 表示信号采样点数, $s_i(t)$ 和 $s_j(t)$ 分别表示第 i 和第 j 个源信号, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T, \mathbf{W} = \prod_{l=1}^N \mathbf{G}_l(\theta_l)$, $s_i(t) = \mathbf{W}[i, :]\mathbf{X}, \mathbf{W}[i, :]$ 表示 \mathbf{W} 的第 i 行, MAXK 表示非线性函数 f_k 和 g_k 的个数, n 表示源信号的个数。

本文选取的非线性函数 f_k 和 g_k 如下所示:

$$f_k(x) = (x^2)^{\text{MAXK}+1} \quad (7)$$

$$g_k(x) = x \quad (8)$$

f_k 选取幂函数的形式是为了计算以及求导的方便。由于 f_k 已经达到了非线性变换的目的, 为了简化计算, g_k 选择式(8)的形式。当然, 也可以选择其它形式的非线性函数。

由于这是一个无约束优化问题, 而拟牛顿法中的 BFGS 算法^[14] 对非线性无约束优化问题具有超线性收敛速度, 且收敛性较好, 因此本文选取拟牛顿法中的 BFGS 算法来求解该问题。由于 BFGS 算法需要计算目标函数的梯度, 因此定义该梯度为:

$$\mathbf{g} = \nabla I(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial I}{\partial \theta_1} \frac{\partial I}{\partial \theta_2} \cdots \frac{\partial I}{\partial \theta_N} \right]^T \quad (9)$$

将式(8)代入式(6), 定义梯度第 $l(1 \leq l \leq N)$ 个元素为 g_l , 则:

$$g_l = \frac{\partial I}{\partial \theta_l} = 2 \sum_{k=1}^{\text{MAXK}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{cov}(f_k(s_i), s_j) \frac{\partial \text{cov}(f_k(s_i), s_j)}{\partial \theta_l} \quad (10)$$

由式(10)可知, 现只需求出 $\frac{\partial \text{cov}(f_k(s_i(t)), s_j(t))}{\partial \theta_l}$ 即可。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \text{cov}(f_k(s_i), s_j)}{\partial \theta_l} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_k(s_i(t)) \cdot s_j(t) \right)}{\partial \theta_l} - \frac{\partial \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_k(s_i(t)) \right) \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_j(t)}{\partial \theta_l} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial (f_k(s_i(t)))}{\partial \theta_l} s_j(t) + f_k(s_i(t)) \cdot \frac{\partial (s_j(t))}{\partial \theta_l} \right) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial (f_k(s_i(t)))}{\partial \theta_l} \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_j(t) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_k(s_i(t)) \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial (s_j(t))}{\partial \theta_l} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial (s_j(t))}{\partial \theta_l} = \frac{\partial \mathbf{W}[i, :]\mathbf{X}}{\partial \theta_l} \quad (12)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{W}(i, u)}{\partial \theta_l} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}_1(\theta_1)[i, :]}{\partial \theta_1} \prod_{q=2}^N \mathbf{G}_q(\theta_q), & l=1 \\ \mathbf{G}_1(\theta_1)[i, :] \prod_{q=2}^{l-1} \mathbf{G}_q(\theta_q) \\ \frac{\partial \mathbf{G}_l(\theta_l)}{\partial \theta_l} \prod_{q=l+1}^N \mathbf{G}_q(\theta_q), & 1 < l \leq N \end{cases} \quad (13)$$

$\mathbf{W}[i, :]$ 表示 \mathbf{W} 的第 i 行, $\mathbf{G}_l(\theta_l)[i, :]$ 表示 $\mathbf{G}_l(\theta_l)$ 的第 i 行。

至此, 目标函数的梯度可以由式(9)一式(13)得到。

3.4 算法流程

基于以上理论,现给出本文提出的分离算法的流程(如未作特别说明,算法流程中的下标 k 一律表示第 k 次迭代):

步骤 1 对观测信号 X 进行中心化和白化;

步骤 2 给定控制误差 ϵ ;

步骤 3 给定初始点 θ_0 (本文两组实验均取 $\theta_0 = [0, 0, \dots, 0]^T$, 显然 θ_0 可以保证线性不相关)、初始矩阵 H_0 (本文两组实验均取单位矩阵)、非线性函数的个数 $MAXK$ (本文两组实验均取 $MAXK=10$), 计算 g_0 , 令 $k=0$;

步骤 4 计算搜索方向 $p_k = -H_k g_k$;

步骤 5 由精确一维搜索确定步长 α_k , $I(\theta_k + \alpha_k p_k) =$

$$\min_{\alpha \geq 0} I(\theta_k + \alpha p_k);$$

步骤 6 令 $\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k p_k$;

步骤 7 若 $\|g_{k+1}\| \leq \epsilon$, 则 $\theta^* = \theta_{k+1}$ 停; 否则令 $u_k = \theta_{k+1} -$

θ_k , $v_k = g_{k+1} - g_k$;

步骤 8 计算

$$\omega_k = (v_k^T H_k v_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_k}{v_k^T u_k} - \frac{H_k v_k}{v_k^T H_k v_k} \right)$$

由 BFGS 修正公式得

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k v_k v_k^T H_k}{v_k^T H_k v_k} + \frac{u_k u_k^T}{v_k^T u_k} + \omega_k \omega_k^T$$

令 $k=k+1$, 转步骤 4。

BFGS 算法可看成 Broyden 族拟牛顿算法的特殊形式或其中一员, 在 Broyden 族拟牛顿算法中, 若初始矩阵 H_0 正定, 则算法是收敛的且具有超线性收敛速度^[13]。在本文提出的分离算法中, 初始矩阵 H_0 取单位矩阵, 显然初始矩阵是正定的, 因此该分离算法是收敛的且具有超线性收敛速度。此外, 由于 BFGS 算法的计算复杂度为 $O(n^2)$, 与直接估计正交矩阵相比, 定理 1 使得盲源分离所要求解的参数个数由原来的 n^2 减少到了 $n(n-1)/2$, 显然算法的计算量大约减少为原来的 $1/4$ 。

4 仿真实验

为了验证本文算法的有效性, 进行如下两组实验。

实验 1 模拟一组源信号(见图 1); s_1 是一组方波信号, s_2 是一组锯齿信号, s_3 是一组随机信号。使用随机三阶可逆方阵对源信号进行混合(见图 2), 然后利用本文算法对观测信号(混合信号)进行分离, 得到了分离信号(见图 3)。

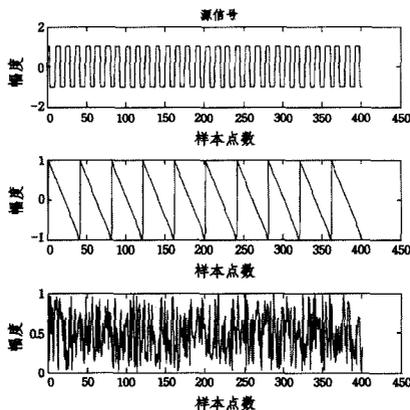


图 1 3 路源信号

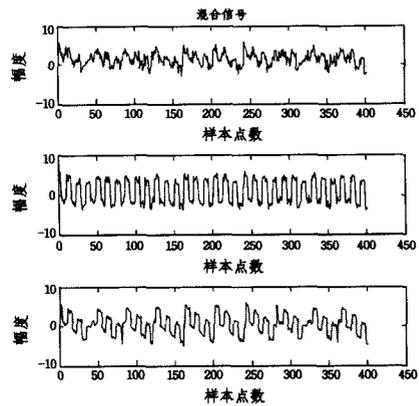


图 2 3 路混合信号

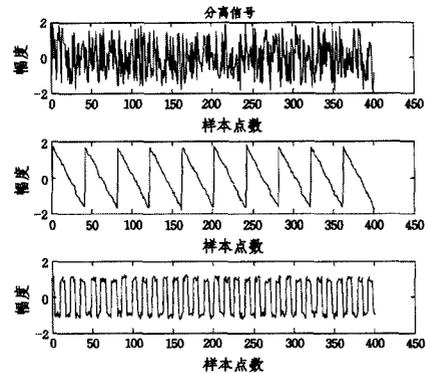


图 3 本文算法得到的 3 路分离信号

从图 1 与图 3 可以看出, 本文提出的分离算法可以有效地对模拟的盲信号进行分离, 相位和幅值上的差异是 ICA 自身原因造成的。

为了更直观地说明算法的有效性, 将其与其它盲源分离算法如 FastICA 算法^[15]、JADE 算法^[16]、kernelICA 算法^[17]进行对比, 采用如下定义的统计性能指数^[18]进行比较:

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{|p_{ij}|}{\max_k |p_{kj}|} - 1 \right) \quad (14)$$

其中, p_{ij} 是 $n \times n$ 的矩阵 $P=WA$ (A 是随机混合矩阵, W 是分离矩阵) 的第 i, j 个元素。 E 值越小, 说明算法的分离性能越优越。

各算法性能指数比较结果如表 1 所列。

表 1 不同算法性能指数比较

E			
FastICA	JADE	kernelICA	本文算法
0.3803	0.5399	0.9696	0.2684

通过表 1 可以看出, 本文算法得到的 E 值最小, 即分离的效果最好。

实验 2 为了进一步验证算法的有效性, 本文采集 3 组真实语音信号作为源信号(见图 4), 再利用随机三阶可逆方阵对源信号进行混合(见图 5), 然后利用本文算法对观测信号(混合信号)进行分离, 得到了分离信号(见图 6)。

从图 4 与图 6 可以看出, 本文提出的分离算法可以有效地对真实语音构成的盲信号进行分离, 相位和幅值上的差异是 ICA 自身原因造成的。

这里同样采用式(14)定义的统计性能指数与其它 3 个盲源分离算法进行比较, 结果如表 2 所列。

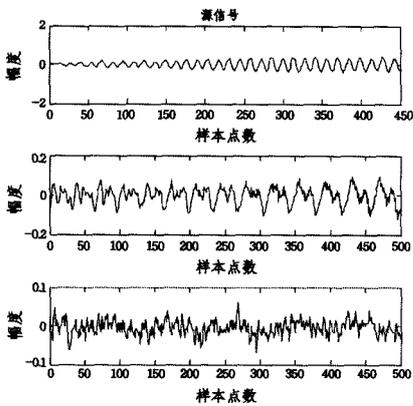


图4 3路源语音信号

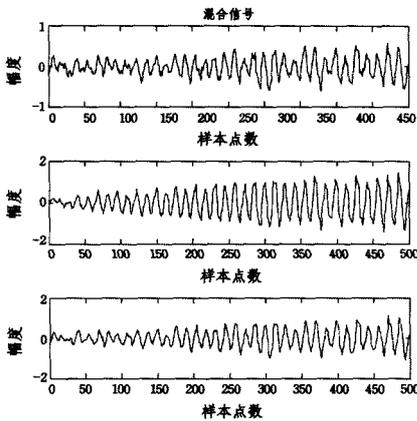


图5 3路混合语音信号

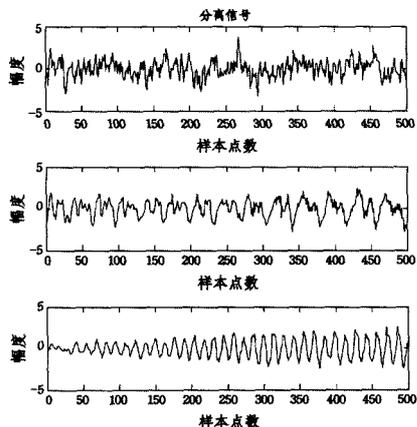


图6 本文算法得到的3路分离语音信号

表2 不同算法性能指数比较

E			
FastICA	JADE	kernelICA	本文算法
0.2934	0.5024	0.9431	0.2590

表2表明,本文算法得到的E值最小,即分离效果优于另外3个经典的盲源分离算法,进一步验证了本文算法的有效性。

结束语 在盲源分离算法中,独立性的度量往往成为制约算法有效性的重要因素。本文依据独立的统计性质,受到时间结构独立源信号对独立性度量方法的启发,以独立源信号的联合非线性不相关来度量独立性,并利用Givens矩阵参数化表示正交分离矩阵,减少了要估计参数的个数;在此基础

上,将盲源分离问题转化为无约束优化问题,并使用拟牛顿法中的BFGS算法求解该无约束优化问题。最后,模拟混合信号和真实语音混合信号的分离实验验证了该算法的有效性。

参考文献

- [1] Meganem I, Deville Y, Hosseini S, et al. Linear-Quadratic Blind Source Separation Using NMF to Unmix Urban Hyperspectral Images [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62 (7): 1822-1833
- [2] Mauldin F R, Lin D, Hossack J A. The singular value filter; a general filter design strategy for PCA-based signal separation in medical ultrasound imaging [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(11): 1951-1964
- [3] Wang L, Ding H, Yin F. A region-growing permutation alignment approach in frequency-domain blind source separation of speech mixtures [J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2011, 19(3): 549-557
- [4] Xie S, Yang L, Yang J M, et al. Time-frequency approach to underdetermined blind source separation [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(2): 306-316
- [5] Kleinstueber M, Shen H. Blind source separation with compressively sensed linear mixtures [J]. Signal Processing Letters, IEEE, 2012, 19(2): 107-110
- [6] Hyvarinen A. Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(3): 626-634
- [7] Hyvarinen A. Independent component analysis; recent advanced [J]. Physical and Engineering Sciences, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, 2013, 371(1984): 411-430
- [8] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 165-234
- [9] 朱孝龙, 保铮, 张贤达. 基于分阶段学习的盲信号分离 [J]. 中国科学: E辑, 2002, 32(5): 693-703
- [10] 李思怡, 王永威, 黄琰, 等. 一种基于自然梯度的两步盲源分离算法 [J]. 微电子学与计算机, 2013, 30(006): 169-172
- [11] Watkins D S. Fundamentals of Matrix Computations [M]. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, 2002: 192-194
- [12] Degroot M H, Schervish M J. Probability and Statistics (4th ed) [M]. Boston: Addison Wesley, 2011: 140-140
- [13] Hyvarinen A. Independence Component Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 2001: 342-344
- [14] 解可新, 韩健, 林友联. 最优化方法 (修订版) [M]. 天津: 天津大学出版社, 2004: 114-123
- [15] Hyvarinen A. Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(3): 626-634
- [16] Cardoso J F, Souloumiac A. Blind beamforming for non-Gaussian signals [C] // IEE Proceedings F. IET Digital Library, 1993, 140 (6): 362-370
- [17] Bach F R, Jordan M I. Kernel independent component analysis [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2003, 3: 1-48
- [18] Yang H H, Amari S. Adaptive online learning algorithms for blind separation; maximum entropy and minimum mutual information [J]. Neural computation, 1997, 9(7): 1457-1482