

两类网络图的边-平衡指数集

刘金萌¹ 侯涛² 郑玉歌¹

(河南理工大学数学与信息科学学院 焦作 454003)¹ (焦作大学机电工程学院 焦作 454003)²

摘要 在较小次幂圈嵌套网络图的基础上,研究了 10 次幂嵌套网络图的边-平衡指数集。利用基础图、带齿套圈子图、单点扇形子图设计新思路,降低了构造标号图的复杂程度。当 $n=10$ 为偶数时,提出了新的变换指数方法,简化了证明过程。确定了 $m \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 且 m 大于等于 2 时(m 为圈数)无限路 10 次幂圈嵌套图的边-平衡指数集,并且解决了这两类幂圈嵌套图的边-平衡指数集的存在性,给出了具体构造方法和公式证明。

关键词 边-友好标号,边-平衡指数集,10 次幂圈嵌套图,带齿套圈子图,单点扇形子图

中图分类号 TP3-05 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.3.051

On Edge-balanced Index Sets of Two Classes of Nested Network Graph

LIU Jin-meng¹ HOU Tao² ZHENG Yu-ge¹

(School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China)¹

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Jiaozuo University, Jiaozuo 454003, China)²

Abstract On the basis of smaller power-cycle nested network graph, the edge-balanced index sets of ten-power-cycle nested network graph were investigated. It reduces the difficulty of ten-power-cycle nested network graph labeling using the novel design of the basic graph, nested-cycle subgraph with gear and single-point sector subgraph. When n is an even number, a new method of changing index was provided, simplifying the proving process. The edge-balanced index sets of ten-power-cycle nested graph were determined when $m \equiv 1, 3 \pmod{6}$ and $m \geq 2$. This paper proved the existence of the edge-balanced index sets of two classes of nested network graph. The computational formulas and the construction of the corresponding graphs were also provided.

Keywords Edge-friendly labeling, Edge-balanced index set, Ten-power-cycle nested graph, Nested-cycle subgraph with gear, Single-point sector subgraph

1 引言

利用图的顶点和边的标号函数来研究图的理论是在 1966 年由 B. M. Stewart 引入的,多年来国内外许多研究者致力于这方面的研究,且获得了一系列的研究成果。图的平衡指数集是将图的顶点和边通过映射函数与数集 Z_2 对应,进而研究各类图的特征和内在特性,完成图的指数集的公式推导和证明,平衡指数集的理论可以应用到信息工程、通讯网络、编码理论等方面^[15,16]。1995 年, M. Kang 等人在文献[1]中定义了边-平衡图和强边-平衡图,研究了一些图的边-平衡性和强边-平衡性,并提出了两个猜想:(1)除了 S_n (n 是奇数),所有的树都是边-平衡的;(2)除了 K_2 ,所有连通的正则图都是边-平衡的。2002 年, B. L. Chen 等在文献[2]中扩充了边-平衡多重图的概念,证明了文献[1]中的猜想是正确的,并证明一个图是边-平衡的,不是 NP-难问题。文献[3,4]研究了图的点-平衡指数集和友好指数集,文献[5]运用构造法研究了新的边-平衡图族,文献[6]研究了轮图的边-平衡指数集,文献[7]研究了星圈嵌套图的边-平衡指数集。文献[8-9]提出

了无限链图,研究了 $k_4 - e$ 链的边-平衡指数集,确定了其完备指数集和完美指数集。文献[10-12]研究了 $C_n \times P_3$, $C_n \times P_2$ 和 $C_n \times P_{11}$ 边-平衡指数集,文献[13]完全解决了无限路等圈嵌套图边-平衡指数集。本文在等圈嵌套网络图以及较小次幂圈嵌套图^[14]的基础上,对幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 按基础图、套圈子图、单点扇形子图进行分部研究,完全解决了无限路幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 边-平衡指数集。本文给出了 $m \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 边-平衡指数集的计算公式和图形的构造性证明,其结果可运用到编码理论和信息工程中。

2 相关定义

一个图 G 对应着一个有序对 (V, E) , 记为 $G=(V, E)$ 。其中,图 G 的顶点集记为 $V(G)$,边集记为 $E(G)$ 。本文研究的图均为简单图。

定义 1 设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 0,1 标号函数,即 $\forall e \in E(G)$, 定义 $f(e)=0$ 或 1, 标号为 0 或 1 的边集记为 $E(0)$ 、 $E(1)$, 用 $e(0)$ 、 $e(1)$ 分别表示此二集合的基数。由 f

到稿日期:2014-04-16 返修日期:2014-07-05 本文受国家自然科学基金项目(51175153/E050903)资助。

刘金萌(1989-),女,硕士生,主要研究方向为图论与编码理论;侯涛(1978-),女,硕士,讲师,主要研究方向为自动控制;郑玉歌(1956-),女,教授,主要研究方向为图论与编码理论。

诱导出的一个顶点标号 $f^+ : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ 是这样定义的:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0, & e_x(0) > e_x(1) \\ 1, & e_x(1) > e_x(0) \\ \text{不定义}, & e_x(0) = e_x(1) \end{cases}$$

式中, $e_x(0), e_x(1)$ 表示与 x 关联的边中标号为 0 或 1 的边集合的基数。图 G 中标号为 0 或 1 的顶点集分别记为 $V(0), V(1)$, 它们的基数分别记为 $v(0), v(1)$ [1]。

定义 2 设 f 是图 G 的边集 $E(G)$ 上的一个 0, 1 标号函数, 如果 $|e(0) - e(1)| \leq 1$, 那么就称 f 为图 G 的边-友好标号 [1]。

定义 3 如果图 G 存在边-友好标号 f , 则称集合 $\{|v(0) - v(1)|; \text{边标号 } f \text{ 是友好的}\}$ 为图 G 的边-平衡指数集, 记为 $EBI(G)$ [1]。

定义 4 C_{10^m} 表示有 m 个圈, 其中最内圈有 10 个顶点, 从内到外, 圈数依次记为第 1 圈, 第 2 圈, ..., 第 m 圈, 圈上顶点数依次以幂方 (即 $10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^{m-1}, 10^m$) 增加 [14]。

为叙述方便, 符号 $(i)_j$ 表示第 i 圈上第 j 个点。第 i 圈上的 10^i 个点按顺时针顺序依次记为: $(i)_1, (i)_2, \dots, (i)_{10^i-1}, (i)_{10^i}$ 。其中:

$$\begin{aligned} V(C_{10^m}) &= \{(i)_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 10^i\} \\ E(C_{10^m}) &= \{((i)_j, (i)_{j+1}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 10^i - 1\} \cup \\ &\quad \{((i)_{10^i}, (i)_1) \mid 1 \leq i \leq m\} \end{aligned}$$

定义 5 $P_{m_{10}}$ 表示每条路都有 m 个顶点, 且每条路中除终点外其他点处均有 10 个分叉的射线路形图 [14]。

其中: $V(P_{m_{10}}) = \{(i)_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 10^i\}$, $E(P_{m_{10}}) = \{((i)_j, (i+1)_{10(j-1)+r}) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 10^i, 0 \leq r \leq 10\}$ 。

射线路形图为:

$$\begin{aligned} (1)_{i_1} \rightarrow (2)_{i_2} \rightarrow (3)_{i_3} \rightarrow \dots \rightarrow (m-2)_{i_{m-2}} \rightarrow (m-1)_{i_{m-1}} \rightarrow \\ (m)_{i_m} \\ (i_k = 10(i_{k-1} - 1) + j_{k-1}; 1 \leq i_1 \leq 10; 1 \leq j_{k-1} \leq 10; 2 \leq k \leq m) \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} (1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_1; \\ (1)_1 \rightarrow (2)_1 \rightarrow (3)_1 \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_1 \rightarrow (m)_2; \\ \dots \\ (1)_1 \rightarrow (2)_{10^1} \rightarrow (3)_{10^2} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{10^{m-2}} \rightarrow \\ (m)_{10(10^{m-2}-1)+9}; \\ (1)_1 \rightarrow (2)_{10^1} \rightarrow (3)_{10^2} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{10^{m-2}} \rightarrow (m)_{10^{m-1}}; \\ \dots \\ (1)_{10} \rightarrow (2)_{10^2} \rightarrow (3)_{10^3} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{10^{m-1}} \rightarrow \\ (m)_{10(10^{m-1}-1)+9}; \\ (1)_{10} \rightarrow (2)_{10^2} \rightarrow (3)_{10^3} \rightarrow \dots \rightarrow (m-1)_{10^{m-1}} \rightarrow (m)_{10^m} \end{aligned}$$

定义 6 无限路幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 是由幂圈嵌套图 C_{10^m} 与无限路形图 $P_{m_{10}}$ 嵌套构成的 [14]。

其中: $V(C_{10^m} \times P_{m_{10}}) = V(C_{10^m}) \cup V(P_{m_{10}})$, $E(C_{10^m} \times P_{m_{10}}) = E(C_{10^m}) \cup E(P_{m_{10}})$ 。

例 给出 2 个 $C_3 \times P_3$ 图和 2 个 $C_{10^3} \times P_{m_{10}}$, 如图 1 所示。

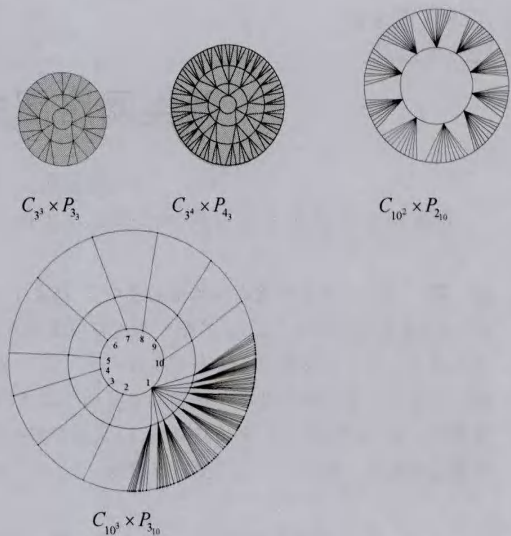


图 1

*注:点 2, 3, ..., 10 和点 1 的情形相同

定义 7 1-点 x 称为饱和 1-点, 是指与点 x 关联的 n 条边, 当 x 为奇度点时, 满足 $e_x(1) = e_x(0) + 1$; 当 x 为偶度点时, 满足 $e_x(1) = e_x(0) + 2$; 否则称为不饱和 1-点。0-点 x 称为饱和 0-点, 是指在与点 x 关联的 n 条边, 满足 $e_x(0) = n$; 否则称为不饱和 0-点 [13]。

定义 8 以第 $6(t-1) + i$ ($i=3, 7; t \in \mathbb{N}_+$), 圈上的点作为起点, 第 $6t + i$ ($i=3, 7; t \in \mathbb{N}_+$) 圈上的点为终点的路形图所经过的点的导出子图, 记作 V_t' ($t=1, 2, \dots, \frac{m-i}{6}$ ($i=3, 7$))。在其基础上去掉第 $6(t-1) + i$ ($i=3, 7; t \in \mathbb{N}_+$) 圈上的边得到的图, 记作 V_t ($t=1, 2, \dots, \frac{m-i}{6}$ ($i=3, 7$)), 称为带齿套圈子图。

定义 9 对于给定的带齿套圈子图 V_t ($t=1, 2, \dots, \frac{m-i}{6}$ ($i=3, 7$)), 以路形图的起点为基础, 将 V_t ($t=1, 2, \dots, \frac{m-i}{6}$ ($i=3, 7$)) 等分成扇形图, 若起点在第 d 圈, 则它可以分为 10^d 个扇形子图, 依次分别记为 $S_1, S_2, \dots, S_{10^d}$ 。

定义 10 对于给定的带齿套圈子图中的扇形子图, 定义 H 为单点扇形子图, 令 $H = S_i$ ($1 \leq i \leq 10^d$)。

注 1: 在不混淆的情况下, 我们把图中标号为 0 (或 1) 的边记为 0-边 (或 1-边), 0-点 (或 1-点) 表示标号为 0 (或 1) 的顶点。

注 2: 文中所有涉及的参数若无特殊说明均为自然数。

注 3: 在构造边-平衡指数集的标号图时, 所做的每一步变换都是在上一步的基础上完成的。

3 引理及证明

引理 1 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m=3$ 时, 有 $\max\{EBI(C_{10^3} \times P_{310})\} = 950$ 。

证明: 对图 $C_{10^3} \times P_{310}$ 构造最大边-平衡指数标号。

第一步: 首先将与下列点相关联的边均标号为 0。

$$\langle 1 \rangle (1)_a \quad (a=5+w, w \in [0, 5])$$

$\langle 2 \rangle (2)_b (b=11+w+10s, w \in [0, 4], s \in [0, 1]; b=41+w, w \in [0, 3]; b=51+w, w \in [0, 59])$

第二步:将下列 $\langle 3 \rangle$ 射线路以及 $\langle 4 \rangle$ 至 $\langle 6 \rangle$ 圈中的边标号为 0.

$\langle 3 \rangle (2)_b (3)_c (c=1+2w, w \in [0, 1], c=1+w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 1]; b=2+2w, w \in [0, 1], c=18+10w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 1]; b=5+w+10s, w \in [0, 5], s \in \{0, 3\}, c=41+p+10w+10^2s, p \in [0, 3], w \in [0, 5], s \in \{0, 3\}; b=16+w+10s, w \in [0, 4], s \in [0, 1], c=151+p+10w+10^2s, p \in [0, 3], w \in [0, 4], s \in [0, 1])$

$\langle 4 \rangle$ 第二圈中的边.

$\langle 5 \rangle (1)_a (1)_{a+1} (a=1+w, w \in [0, 6])$

$\langle 6 \rangle (3)_c (3)_c (c=45+2p+10w+10^2s, p \in [0, 2], w \in [0, 5], s \in \{0, 3\}; c=155+2p+10w+10^2s, p \in [0, 2], w \in [0, 4], s \in [0, 1]; c=4+2w+20s, w \in [0, 6], s \in [0, 1])$

第三步:其余边均标记为 1-边.

标号的 $C_{10^3} \times P_{3_{10}}$ 中,共有 2210 条边,其中 1105 条 0-边,构造图形满足边友好标号, $|e(0)-e(1)| \leq 1$. 在 $\langle 1 \rangle$ 与 $\langle 2 \rangle$ 中给出的点均为 0-点, $V(0)=80$,总点数为 1110,故 $|v(1)-v(0)| = |1110-2 \times 80| = 950$.

可以证明 $\max\{EBI(C_{10^3} \times P_{3_{10}})\} = 950$. 在此构造图中,所有点均已饱和. 0-点全是最大度点,若是将图中饱和 0-点变为 1-点或不定义点,至少去掉 6 条 0-边,因此要想改变图中某个 0-点的标号,至少需要将与之相关联的 6 条 0-边与图中的 6 条 1-边进行互换,显然这样的互换必然导致 0-点的个数不变或增加,而 1-点的个数必将减少,那么 $|v(0)-v(1)|$ 的值也必将相应地减少. 因此,在上述构造图中的 $|v(0)-v(1)|$ 的值是最大的,即 $\max\{EBI(C_{10^3} \times P_{3_{10}})\} = |v(1)-v(0)| = 950$.

引理 2 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中,当 $m=7$ 时,有 $\max\{EBI(C_{10^7} \times P_{10_7})\} = 9523806$.

证明:对图 $C_{10^7} \times P_{10_7}$ 构造最大边-平衡指数标号.

第一步:首先将与下列点相邻的各边均标号为 0.

$\langle 1 \rangle (2)_a (b=1+w+10s, w \in [0, 4], s \in [0, 9])$

$\langle 2 \rangle (3)_c (c=1+w+10^2s, w \in [0, 49], s \in [0, 9]; c=51+p+10w+10^2s, p \in [0, 3], w \in [0, 4], s \in [0, 9])$

$\langle 3 \rangle (4)_d (d=1+w+10^3s, w \in [0, 499], s \in [0, 9]; d=501+p+10^2w+10^3s, p \in [0, 39], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; d=541+p+10t+10^2w+10^3s, p \in [0, 3], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9])$

$\langle 4 \rangle (5)_e (e=1+w+10^4, w \in [0, 4999], s \in [0, 9]; e=5001+p+10^3w+10^4s, p \in [0, 399], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; e=5401+p+10^2t+10^3w+10^4s, p \in [0, 39], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; e=5441+p+10r+10^2t+10^3w+10^4s, p \in [0, 3], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9])$

$\langle 5 \rangle (6)_f (f=23969+w, w \in [0, 26031]; f=123971+w+10^5s, w \in [0, 26029], s \in [0, 8]; f=50001+p+10^4w+10^5s, p \in [0, 3999], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; f=54001+p+10^3t+10^4w+10^5s, p \in [0, 399], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; f=54401+p+10^2r+10^3t+10^4w+10^5s, p \in [0, 39], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; f=54441+p+10q+10^2r+$

$10^3t+10^4w+10^5s, p \in [0, 3], q \in [0, 5], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9])$

第二步:将下列 $\langle 6 \rangle$ 射线路以及 $\langle 7 \rangle$ 、 $\langle 8 \rangle$ 圈中的边标号为 0.

$\langle 5 \rangle (6)_f (7)_g (f=54445+p+10q+10^2r+10^3t+10^4w+10^5s, p \in [0, 3], q \in [0, 5], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; g=54441+p+10u+10^2q+10^3r+10^4t+10^5w+10^6s, p \in [0, 3], u \in [0, 5], q \in [0, 5], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; f=1+2w, w \in [0, 11983], g=1+2w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11983]; f=1+2w, w \in [0, 11983], g=18+2w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11983]; f=100001+2w+10^6s, w \in [0, 11984], s \in [0, 8]; g=1000001+p+20w+10^6s, p \in [0, 2], w \in [0, 11984], s \in [0, 8]; f=100002+2w+10^6s, w \in [0, 11984], s \in [0, 8]; g=1000018+p+20w+10^6s, p \in [0, 2], w \in [0, 11984], s \in [0, 8])$

$\langle 6 \rangle$ 第 2 圈至第 6 圈中的边.

$\langle 7 \rangle (7)_g (7)_{g+1} (g=544445+2p+10u+10^2q+10^3r+10^4t+10^5w+10^6s, p \in [0, 2], u \in [0, 5], q \in [0, 5], r \in [0, 5], t \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 9]; g=100004+2p+20w+10^5s, p \in [0, 6], w \in [0, 11984], s \in [0, 8]; g=4+2w+20s, w \in [0, 6], s \in [0, 11983])$

第三步:其余边标记为 1-边.

第四步:在以上标号的基础上,将 $(6)_{54445} (7)_g (g=54441+w, w \in [0, 3])$ 由 0-边变为 1-边,同时 $(7)_{544441} (7)_{544442} (7)_{544443} (7)_{544444}$ 由 1-边变为 0-边.

标号的 $C_{10^7} \times P_{10_7}$ 中,一共有 22222210 条边,其中 11111105 条 0-边,构造图形满足边友好标号, $|e(0)-e(1)| \leq 1$. $\langle 1 \rangle$ 至 $\langle 5 \rangle$ 中的点均为饱和 0-点, $v(0)=793652$,总点数为 11111110,故 $|v(1)-v(0)| = |11111110-2 \times 793652| = 9523806$.

可以证明 $\max\{EBI(C_{10^7} \times P_{10_7})\} = 9523806$. 在此构造图中,除了点 $(6)_{54445}$ 是不饱和 1-点外,其余点均已饱和. 0-点全是最大度点,若是将图中饱和 0-点变为 1-点,至少去掉 7 条 0-边,因此要想改变图中某个 0-点的标号,至少需要将与之相关联的 7 条 0-边与图中的 7 条 1-边进行互换,显然这样的互换必然导致 0-点的个数增加,而 1-点的个数必将减少,那么 $|v(0)-v(1)|$ 的值也必将相应地减少.

引理 3 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中,对单点扇形子图 H ,有 $\max\{EBI(H)\} = 952380$.

证明:因为所有单点扇形子图的图形特征一样,在此仅给出 $H=S_1$ 的标号,其它单点扇形子图的标号和它一致.

对 H 构造最大边-平衡指数标号函数.

第一步:首先将与下列点相邻的各边均标号为 0.

$\langle 1 \rangle (\partial+1)_a (a \in [1, 5])$

$\langle 2 \rangle (\partial+2)_b (b \in [1, 50]; b=51+w+10s, w \in [0, 3], s \in [0, 4];)$

$\langle 3 \rangle (\partial+3)_c (c \in [1, 500]; c=501+w+10^2s, w \in [0, 39], s \in [0, 4]; c=541+p+10w+10^2s, p \in [0, 3], w \in [0, 5], s \in [0, 4])$

$\langle 4 \rangle (\partial+4)_d (d \in [1, 5000]; d=5001+w+10^3s, w \in [0, 399], s \in [0, 4]; d=5401+p+10^2w+10^3s, p \in [0, 39], w \in$

$[0, 5], s \in [0, 4]; d = 5441 + t + 10p + 10^2w + 10^3s, t \in [0, 3], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4];$

(5) $(\partial + 5)_e (e \in [23971, 50000]; e = 50001 + w + 10^4s, w \in [0, 3999], s \in [0, 4]; e = 54001 + p + 10^3w + 10^4s, p \in [0, 399], w \in [0, 5], s \in [0, 4]; e = 54401 + t + 10^2p + 10^3w + 10^4s, t \in [0, 39], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]; e = 54441 + r + 10t + 10^2p + 10^3w + 10^4s, r \in [0, 3], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4];$

第二步: 将下列(6)至(7)射线路以及(8)至(1)圈中的边标号为0。

(6) $(\partial + 5)_e (\partial + 6)_f (e = 54445 + r + 10t + 10^2p + 10^3w + 10^4s, r \in [0, 5], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]; f = 544441 + q + 10r + 10^2t + 10^3p + 10^4w + 10^5s, q \in [0, 3], r \in [0, 5], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4])$

(7) $(\partial + 5)_e (\partial + 6)_f (e = 1 + 2w, w \in [0, 11984]; f = 1 + w + 20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11984]; e = 2 + 2w, w \in [0, 11984]; f = 18 + w + 20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11984])$

(8) $(\partial + 1)th, (\partial + 2)th, (\partial + 3)th, (\partial + 4)th, (\partial + 5)th$

(9) $(\partial + 6)_f (\partial + 6)_{f+1} (f = 544445 + 2q + 10r + 10^2t + 10^3p + 10^4w + 10^5s, q \in [0, 2], r \in [0, 5], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4])$

(10) $(\partial + 6)_f (\partial + 6)_{f+1} (f = 4 + 2q + 20w, q \in [0, 6], w \in [0, 11984])$

第三步: 其余边标记为1-边。

每个 H 中共有 2222220 条边, 其中 0-边为 1111110 条。满足边-友好标号的定义, 即 $|e(0) - e(1)| \leq 1$ 。 $v(0) = 79365$, 图中每个顶点都在顶点标号 f^+ 下定义, 所以 $|v(1) - v(0)| = |1111110 - 2 \times 79365| = 952380$ 。

可以证明 $\max\{EBI(H)\} = 952380$ 。构造 H 标号图中点均为饱和点, 没有不定义点且 0-点均是最大度点, 若是将图中饱和 0-点变为 1-点, 至少去掉 7 条 0-边, 因此要想改变图中某个 0-点的标号, 至少需要将与之相关联的 7 条 0-边与图中的 7 条 1-边进行互换, 显然这样的互换必然导致 0-点的个数增加, 而 1-点的个数必将减少, 那么 $|v(0) - v(1)|$ 的值也必将相应地减少。因此可得, 952380 为该图的最大边-平衡指数。

注: 为了满足总套圈的指数计算, 规定 H 中点的总个数不包括其自身的齿点。

引理 4 若 $m \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, 对于幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$, 有 $\max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} = \frac{2 \times 10^{m+1} - 50}{21}$ 。

证明: 当 $m = 3$ 时, 由引理 1 知公式成立。下面证明 $m > 3$ 时公式成立。

首先构造最大边-平衡指数图。显然, $C_{10^m} \times P_{m_{10}} = C_{10^3} \times P_{3_{10}} \cup (\bigcup_{i=1}^{\frac{m-3}{6}} V_i)$, 将 $m = 3$ 时得到的最大指数标号图作为基础图, 带齿套圈子图 $V_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-3}{6})$ 中所有 H 的标号方法与引理 3 中 H 标号方法相同, 由于在标号过程中始终保持点特征的一致性, 且依然满足边-友好标号, 因此得到的标号图对应的是 $C_{10^m} \times P_{m_{10}} (m > 3)$ 的最大边-平衡指数。

由引理 3 知, $\max\{EBI(H)\} = 952380$ 。当带齿套圈子图

的起点所在圈记作第 $\partial = 6(t-1) + 3 (t \in N_+)$ 圈时, 根据带齿套圈子图中 H 的定义可知, 在带齿套圈子图 $V_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-3}{6})$ 中包含 10^9 个 H 。

计算 $C_{10^m} \times P_{m_{10}} (m > 3)$ 的最大边平衡指数:

$$\begin{aligned} & \max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} \\ &= \max\{EBI(C_{10^2} \times P_{2_{10}})\} + \sum_{i=1}^{\frac{m-3}{6}} \max\{EBI(V_i)\} \\ &= 950 + 952380 \times 10^3 + 952380 \times 10^9 + \dots + \\ & \quad 952380 \times 10^{m-6} \\ &= 950 + \frac{2 \times 10^{m+1} - 2 \times 10^4}{21} \\ &= \frac{2 \times 10^{m+1} - 50}{21} \end{aligned}$$

引理 5 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m \equiv 1 \pmod{6}$

且 $m \geq 2$ 时, 有 $\max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} = \frac{2 \times 10^{m+1} - 74}{21}$ 。

证明: 当 $m = 7$ 时, 由引理 2 可证明公式成立。

当 $m > 7$ 时, 对带齿套圈子图 V_i 进行标号, 在 V_i 中, 若起点在第 ∂ 圈, 则它可以分为 10^9 个扇形子图, 依次分别记为 $S_1, S_2, \dots, S_{10^9}$ 。因为所有单点扇形子图的图形特征一样, 在此仅给出 $H = S_1$ 的标号, 其他单点扇形子图的标号与它一致。

显然, $C_{10^m} \times P_{m_{10}} = C_{10^7} \times P_{7_{10}} \cup (\bigcup_{i=1}^{\frac{m-7}{6}} V_i)$, 将 $m = 7$ 时得到的最大指数标号图作为基础图, 带齿套圈子图 $V_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-7}{6})$ 中 H 的标号方法与引理 3 中 $H = S_1$ 标号方法相同, 由于在标号过程中始终保持点特征的一致性, 且依然满足边-友好标号, 因此得到的标号图对应的是 $C_{10^m} \times P_{m_{10}} (m > 7)$ 的最大边-平衡指数。知 $\max\{EBI(H)\} = 952380$, 当带齿套圈子图的起点所在圈记作第 $\partial = 6(t-1) + 7 (t \in N_+)$ 时, 根据带齿套圈子图中 H 的定义, 在带齿套圈子图 $V_i (i = 1, 2, \dots, \frac{m-7}{6})$ 中包含 10^9 个 H 。

计算 $C_{10^m} \times P_{m_{10}} (m > 7)$ 的最大边平衡指数:

$$\begin{aligned} & \max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} \\ &= \max\{EBI(C_{10^7} \times P_{7_{10}})\} + \sum_{i=1}^{\frac{m-7}{6}} \max\{EBI(V_i)\} \\ &= 9523806 + 9523806 \times 10^7 + 952380 \times 10^{13} + \dots + \\ & \quad 952380 \times 10^{m-6} \\ &= 9523806 + \frac{2 \times 10^{m+1} - 2 \times 10^8}{21} \\ &= \frac{2 \times 10^{m+1} - 74}{21} \end{aligned}$$

综上所述, 若 $m \equiv 1 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$, 那么 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 的最大边-平衡指数为 $\frac{2 \times 10^{m+1} - 74}{21}$ 。

注: 为了满足总套圈的指数计算, 规定 H 中点的总个数不包括其自身的齿点。

引理 6 对于 H , 有 $\{952378, 952376, \dots, 2, 0\} \subset H$ 。

证明: 在下面证明中, $(2k-1)_r, (2k)_s, \leftrightarrow (2k)_t, (2k)_{s+1}$ 表示边 $(2k-1)_r, (2k)_s$ 由 0-边变为 1-边, 同时边 $(2k)_t, (2k)_{s+1}$ 由 1-边变为 0-边。以引理 3 中 H 构造最大边-平衡指数标号函

数图作为原始图。下面对图中的 0-边和 1-边进行部分变换。

第一步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=1+2w, w \in [0, 11984]$; $f=1+w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11984]$) 依次变换, 得到 35955 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{952378, 952376, \dots, 880468, 880470\}$ 。

第二步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=2+2w, w \in [0, 11984]$; $f=18+w+20s, w \in [0, 2], s \in [0, 11984]$) 依次变换, 得到 35955 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{880468, 880466, \dots, 808562, 808560\}$ 。

第三步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e \in [23971, 50000]$; $d=239701+w+10s, w \in [0, 5], s \in [0, 26029]$) 依次变换, 得到 156180 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{808558, 808556, \dots, 496222, 496200\}$ 。

第四步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=50001+w+10^4s, w \in [0, 3999], s \in [0, 4]$; $f=500001+p+10w+10^5s, p \in [0, 5], w \in [0, 3999], s \in [0, 4]$) 依次变换, 得到 120000 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{496198, 496196, \dots, 256202, 256200\}$ 。

第五步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=54001+p+10^3w+10^4s, p \in [0, 326], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$; $f=540001+p+10t+10^4w+10^5s, p \in [0, 5], t \in [0, 326], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$) 依次变换, 得到 58860 个偶指数的标号图, 指数分别为 $\{256198, 256196, \dots, 138482, 138480\}$ 。

第六步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=54328+p+10^3w+10^4s, p \in [0, 1], w \in [0, 1], s \in [0, 4]$; $f=543271+p+10t+10^4w+10^5s, p \in [0, 5], t \in [0, 1], w \in [0, 1], s \in [0, 4]$) 依次变换, 得到 120 个偶指数的标号图, 指数分别为 $\{138478, 138476, \dots, 138242, 138240\}$ 。

第七步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=54401+t+10^2p+10^3w+10^4s, t \in [0, 39], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$; $f=544001+r+10t+10^3p+10^4w+10^5s, r \in [0, 5], t \in [0, 39], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$) 依次变换, 得到 43200 个偶指数的标号图, 指数分别为 $\{138238, 138236, \dots, 51842, 51840\}$ 。

第八步: $(\partial+5)_e(\partial+6)_f \leftrightarrow (\partial+6)_f(\partial+6)_{f+1}$ ($e=54441+r+10t+10^2p+10^3w+10^4s, r \in [0, 3], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$; $f=544401+q+10r+10^2t+10^3p+10^4w+10^5s, q \in [0, 5], r \in [0, 3], t \in [0, 5], p \in [0, 5], w \in [0, 5], s \in [0, 4]$) 依次变换, 得到 25920 个偶指数的标号图, 指数分别为 $\{51838, 51836, \dots, 2, 0\}$ 。

综上即证: 对于 H , 有 $\{952378, 952376, \dots, 2, 0\} \subset H$ 。

引理 7 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, 有 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 72}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 93}{21}, \dots, 1, 0\} \subset EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})$ 。

证明: 以引理 4 中构造的 $\max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} = \frac{2 \times 10^{m+1} - 50}{21}$ 边-平衡指数的标号图作为原始图。下面对图中的 0-边和 1-边进行部分变换。

第一步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=51+w, w \in [0, 59]$; $c=501+w+10s, w \in [0, 5], s \in [0, 59]$), 依次变换, 得到 360

个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 92}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 134}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 15170}{21}\}$ 。

第二步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=11+w+10s, w \in [0, 4], s \in [0, 1]$; $c=101+p+10w+10^2s, p \in [0, 5], w \in [0, 4], s \in [0, 1]$), 依次变换, 得到 60 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 15212}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 15254}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 17690}{21}\}$ 。

第三步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=5+w+10s, w \in [0, 5], s \in \{0, 3\}$; $c=41+p+10w+10^2s, p \in [0, 3], w \in [0, 5], s \in \{0, 3\}$), 依次变换, 得到 48 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 17732}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 17774}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19706}{21}\}$ 。

第四步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=1; c=1+w, w \in [0, 2]$) 依次变换, 得到 3 个奇指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 19748}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19790}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19832}{21}\}$ 。

第五步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=5; c=1+w, w \in [0, 3]$) 依次变换, 得到 4 个偶指数的标号图, 指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 19874}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19916}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 2 \times 10^4}{21}\}$ 。

第六步: 根据引理 6 对 H 变换方法, 将带齿套圈子图 V_t ($t=1, 2, \dots, \frac{m-3}{6}$) 中所有单点扇形子图 H 依次变换, 可以得到指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 20042}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 20084}{21}, \dots, 2, 0\}$ 。

另外奇数指数集构造如下:

第一步: $(1)_4(1)_3 \leftrightarrow (1)_3(1)_2$, 产生一个空点, 得到 1 个奇数指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 71}{21}\}$ 。

第二步: 重复偶数第一步至第四步的变换, 得到 471 个奇数指数的标号图对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 113}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 155}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19853}{21}\}$ 。

第三步: $(2)_b(3)_c \leftrightarrow (3)_c(3)_{c+1}$ ($b=5; c=1+w, w \in [0, 2]$) 依次变换, 得到 3 个奇指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 19895}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19937}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 19979}{21}\}$ 。

第四步: 重复偶数集第六步, 这样就可以得到指数集为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 20021}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 20063}{21}, \dots, 3, 1\}$ 的标号图。

综上即证。

引理 8 在幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m \equiv 1 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, $\{\frac{2 \times 10^{m+1} - 95}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1} - 116}{21}, \dots, 1, 0\} \subset EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})$ 。

证明: 下面变换是将引理 5 中指数为 $\max\{EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})\} = \frac{2 \times 10^{m+1} - 74}{21}$ 的标号图作为原始图, 下面对图中的 0-边和 1-边进行部分变换。

首先对偶数指数集进行构造:

第一步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=123971+w+10^5s$, $w \in [0, 26029]$, $s \in [0, 8]$; $f=1239701+p+10w+10^5s$, $p \in [0, 5]$, $w \in [0, 26029]$, $s \in [0, 8]$) 依次变换, 得到 1405620 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-116}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-158}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-59036114}{21}\}$ 。

第二步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=50001+p+10^4w+10^5s$, $p \in [0, 3999]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$; $g=500001+p+10t+10^5w+10^6s$, $p \in [0, 5]$, $t \in [0, 3999]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$) 依次变换, 得到 1200000 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-59036156}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-59036198}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-109436114}{21}\}$ 。

第三步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=54001+p+10^3t+10^4w+10^5s$, $p \in [0, 399]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$; $g=540001+p+10r+10^4t+10^5w+10^6s$, $p \in [0, 5]$, $r \in [0, 399]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$) 依次变换, 得到 720000 个偶指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-109436156}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-109436198}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-139676114}{21}\}$ 。

第四步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=54401+p+10^2r+10^3t+10^4w+10^5s$, $p \in [0, 39]$, $r \in [0, 5]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$; $g=544001+p+10q+10^3r+10^4t+10^5w+10^6s$, $p \in [0, 5]$, $q \in [0, 39]$, $r \in [0, 5]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$) 依次变换, 得到 432000 个偶数指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-139676156}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-139676198}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-157820114}{21}\}$ 。

第五步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=54441+p+10q+10^2r+10^3t+10^4w+10^5s$, $p \in [0, 3]$, $q \in [0, 5]$, $r \in [0, 5]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$; $g=544401+p+10u+10^2q+10^3r+10^4t+10^5w+10^6s$, $p \in [0, 5]$, $u \in [0, 3]$, $q \in [0, 5]$, $r \in [0, 5]$, $t \in [0, 5]$, $w \in [0, 4]$, $s \in [0, 9]$) 依次变换, 得到 259200 偶指数的标号图, 指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-157820156}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-157820198}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-168706514}{21}\}$ 。

第六步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=1+2w$, $w \in [0, 11983]$, $g=1+2w+20s$, $w \in [0, 2]$, $s \in [0, 11983]$; $f=1+2w$, $w \in [0, 11983]$, $g=18+2w+20s$, $w \in [0, 2]$, $s \in [0, 11983]$) 依次变换, 得到 71904 偶指数的标号图, 指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-168706556}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-168706598}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-171726482}{21}\}$ 。

第七步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=100001+2w+10^6s$, $w \in [0, 11984]$, $s \in [0, 8]$; $g=1000001+p+20w+10^6s$, $p \in [0, 2]$, $w \in [0, 11984]$, $s \in [0, 8]$; $f=100002+2w+10^6s$, $w \in [0, 11984]$, $s \in [0, 8]$; $g=1000018+p+20w+10^6s$, $p \in [0,$

$2]$, $w \in [0, 11984]$, $s \in [0, 8]$) 依次变换, 得到 647190 偶指数的标号图, 指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-171726524}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-171726566}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-198908462}{21}\}$ 。

第八步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=23969+w$, $w \in [0, 8662]$; $g=239681+w+10s$, $w \in [0, 2]$, $s \in [0, 8662]$) 依次变换, 得到 25989 偶指数的标号图, 指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-198908504}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-198908546}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-2 \times 10^8}{21}\}$ 。

第九步: 根据引理 6 对 H 变换方法, 将带齿套圈子图 V_i ($i=1, 2, \dots, \frac{m-7}{6}$) 中所有单点扇形子图 H 依次变换, 可以得到指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-200000042}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-200000084}{21}, \dots, 2, 0\}$ 。

对奇数指数集进行构造:

第一步: $(1)_4(1)_3 \leftrightarrow (1)_3(1)_2$ 产生一个不定义点, 得到 1 个奇数指数的标号图, 对应指数为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-95}{21}\}$ 。

第二步: 重复与偶数集一至七步相同的变换, 得到 4735914 个奇数指数集, 对应指数为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-137}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-179}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-198908483}{21}\}$ 。

第三步: $(6)_f(7)_g \leftrightarrow (7)_g(7)_{g+1}$ ($f=23969+w$, $w \in [0, 6496]$; $g=239681+w+10s$, $w \in [0, 3]$, $s \in [0, 6496]$) 依次变换, 得到 25988 奇指数的标号图, 对应指数分别为 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-198908525}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-198908567}{21}, \dots, \frac{2 \times 10^{m+1}-199999979}{21}\}$ 。

第四步: 重复偶数集第九步, 可以得到指数集 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-200000021}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-200000063}{21}, \dots, 3, 1\}$ 。

综上证明, 当 $m \equiv 1 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, 有 $\{\frac{2 \times 10^{m+1}-95}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-116}{21}, \dots, 1, 0\} \subset EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}})$ 。

4 主要结论

由引理 1、2、7 和引理 8 得:

定理 1 在无限路幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, $EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}}) = \{\frac{2 \times 10^{m+1}-50}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-71}{21}, \dots, 1, 0\}$ 。

定理 2 在无限路幂圈嵌套图 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 中, 当 $m \equiv 1 \pmod{6}$ 且 $m \geq 2$ 时, 有 $EBI(C_{10^m} \times P_{m_{10}}) = \{\frac{2 \times 10^{m+1}-74}{21}, \frac{2 \times 10^{m+1}-95}{21}, \dots, 1, 0\}$ 。

结束语 本文在等圈嵌套网络图以及较小次幂圈嵌套图

网络图的基础上,提出了单点扇形子图的概念。利用对单点扇形子图组局部特征的研究,递归到 $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 整个图形,进而给出了当 $m \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 时, $C_{10^m} \times P_{m_{10}}$ 边-平衡指数集以及构造方法。当 n 为偶次幂时,本方法比 n 为奇数时标号函数的设计方法有所提高,为其他偶数次幂的无限嵌套图的研究提供了很好的思路借鉴,所证结果为图论和编码理论提供了重要的公式和数据。望近期能够用更有效的方法研究并完成全部幂圈嵌套图的边-平衡指数集,给出一个更加通用的计算公式。

参 考 文 献

- [1] Kong M, Lee S M. On edge-balanced graphs[J]. *Graph Theory, Combinatoric and Algorithms*, 1995, 1: 711-722
- [2] Chen B L, Huang K C, Lee S M, et al. On edge-balanced multi-graphs[J]. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2002, 42: 177-185
- [3] Lee A T, Lee S M, Ng H K. On balance index sets of graphs[J]. *Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, 2008, 66: 135-150
- [4] Kong M, Lee S M, Ng H K. On friendly index sets of 2-regular graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2008, 308(23): 5522-5532
- [5] Kim S R, Lee S M, Ng H K. On Balancedness of some graph constructions[J]. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2008, 66: 3-16
- [6] Chopra D, Lee S M, Su H H. On edge-balance index sets of wheels[J]. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2010, 5(53): 2605-2620
- [7] Chou C C, Galiardi M, Kong M, et al. On edge-balance index of L-product of cycles with stars, part 1[J]. *JCMCC*, 2011, 78: 195-211
- [8] Lu J, Zheng Y G. On the edge-balance index sets of $B(n)$ [J]. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 2009, 12(1): 37-44
- [9] Zheng Y G, Lu J, Lee S M, et al. On the perfect index sets of the Chain-Sum Graphs of the first kind of $K_4-e[C]$ //*Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, 2009. IEEE. Zhangjiajie, China; IEEE Press, 2009: 586-589
- [10] Wang Y, Zheng Y G, Adiga C, et al. On the edge-balance index sets of N cycles three nested graph($N=0, 1, 2 \pmod{6}$)[J]. *Advanced Studied in Contemporary Mathematics*, 2011, 21(1): 85-93
- [11] Yao J, Zheng Y G. On the quick construction of all edge-balance index sets of the graph $C_n \times P_5[C]$ //*2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks (CEC Net)*. IEEE. Xianning, China; IEEE Press, 2011: 4227-4230
- [12] Zheng Y G, YAO J. On the quick construction of all edge-balance index sets of the graph $C_n \times P_{11}[C]$ //*2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks (CEC Net)*. IEEE. Xianning, China; IEEE Press, 2011: 4231-4234
- [13] 郑玉歌, 姚景景. 无限路等圈嵌套图边-平衡指数集的完全确定(1)[J]. *上海交通大学学报: 自然版*, 2013, 47(7): 1160-1163
- [14] Zheng Y, Tian H. On the Edge-Balance Index Sets of the Power Circle Nested Graph $C_{2m} \times P_{m_2} (m \equiv 0 \pmod{2})$ [J]. *Advanced Science Letters*, 2012, 7(1): 534-536
- [15] Kang B, Kelarev A, Sale A, et al. A new model for classifying DNA code inspired by neural networks and FSA[M]//*Advances in Knowledge Acquisition and Management*. Springer Berlin Heidelberg, 2006: 187-198
- [16] Kelarev A V. Algorithms for computing parameters of graph-based extensions of BCH codes[J]. *Journal of Discrete Algorithms*, 2007, 5(3): 553-563
- (上接第 236 页)
- [2] Bharadwaj V, Ghose D, Robertazzi T G. Divisible Load Theory: A New Paradigm for Load Scheduling in Distributed Systems[J]. *Cluster Computing*, 2003, 6(1): 7-17
- [3] Beaumont O, Legrand A, Robert Y. Scheduling divisible workloads on heterogeneous platforms[J]. *Parallel Computing*, 2003, 29(9): 1121-1152
- [4] Beaumont O, Boudet V, Petit A, et al. A proposal for a heterogeneous cluster Scalapack (dense linear solvers) [J]. *IEEE Transaction on Computers*, 2001, 50(10): 1050-1070
- [5] Bajaj R, Agrawal D P. Improving scheduling of tasks in a heterogeneous environment[J]. *IEEE Transactions on parallel and distributed systems*, 2004, 15(2): 107-118
- [6] Radulescu A, Gemund A J C van. On the complexity of list scheduling algorithms for distributed-memory systems [C]//*Proceeding ICS '99 Proceedings of the 13th international conference on Supercomputing*, 1999. New York; ACM, 1999: 68-75
- [7] Radulescu A, Arjan J C. Low-cost task scheduling for distributed-memory machines [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2002, 13(6): 648-658
- [8] 林伟伟, 齐德昱, 李拥军, 等. 树型网络计算环境下的独立任务调度[J]. *软件学报*, 2006, 17(11): 2352-2361
- [9] Sih G C, Lee E A. A compile-time scheduling heuristic for interconnection constrained heterogeneous processor architectures [J]. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 1993, 4(2): 75-87
- [10] 杜晓丽, 蒋昌俊, 徐国荣, 等. 一种基于模糊聚类的网格 DAG 任务图调度算法[J]. *软件学报*, 2006, 17(11): 2277-2288
- [11] Cao Hai-jun, Jin Hai, Wu Xiao-xin, et al. DAGMap: Efficient scheduling for DAG grid workflow job[C]//*Proceedings of the 2008 9th IEEE/ACM International Conference on Grid Computing*, 2008. Tsukuba, IEEE, 2008: 17-24
- [12] Mourad H, Franck B. Dynamic Critical Path Scheduling Parallel Programs onto MultiProcessors[C]//*IEEE Computer Society Proceeding of the 19th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS '05)*, 2005. Washington, 2005: 203-209
- [13] 李建勋, 解建仓, 陈田庆, 等. 计算网格下的高性能 MODIS 蒸散发反演研究[J]. *西安交通大学学报*, 2010, 44(10): 36-41
- [14] Kwok Y K, Ahmad I. Benchmarking the task graph scheduling algorithms[J]. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1999, 59: 381-422
- [15] Freund R F, Siegel H J. Heterogeneous processing [J]. *IEEE Computer*, 1993, 26(6): 13-17