

规则实例集上警示传播算法的收敛性

王晓峰 李强 丁红胜

(北方民族大学计算机科学系 银川 750021)

摘要 信息传播算法求解随机3-SAT问题时非常有效,能使难解区域变窄。然而,对于因子图带有环的实例,信息传播算法并不总有效,常表现为不收敛。对于这种现象,至今缺少系统的理论解释。警示传播(Warning Propagation, WP)算法是一种基础的信息传播算法,对WP算法的收敛性研究是其它信息传播算法收敛性研究的重要基础。将一个3-SAT问题转换为具有规则结构的(3,4)-SAT问题,(3,4)-SAT问题是NP-完全的。基于(3,4)-SAT问题的规则结构性质,分析WP算法的收敛性。选取了3组不同规模的实例进行实验模拟,结果表明:在这种规则结构的可满足性实例集上,WP算法的收敛性有较大提高。

关键词 警示传播算法,收敛性,可满足性问题,规则结构

中图分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.1.062

Convergence of Warning Propagation Algorithm for Regular Structure Instances

WANG Xiao-feng LI Qiang DING Hong-sheng

(Department of Computer Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China)

Abstract Message propagation algorithms are very effective in finding satisfying assignments for 3-SAT instances, and they can make hard region become narrower. However, message propagation algorithms do not always converge for graphs with cycles. Unfortunately, rigorous theory proof of this phenomenon is still lacking. Warning propagation algorithm is the most basic message propagation algorithm, and we analysed convergence of the warning propagation algorithm. Lastly, experimental results show that convergence of the warning propagation algorithm is improved for (3,4)-SAT instances.

Keywords Warning propagation algorithm, Convergence, Satisfiability problems, Regular structure

1 引言

约束可满足性问题(Constraint Satisfaction Problem, CSP)是人工智能中的一个重要研究领域^[1-3]。一个CSP问题由 n 个变量和 m 个约束组成,每个变量(变元)从其定义域 D 中取值。从变量集合中随机选取 k 个不同的变量构成一个约束,并且有一个相应的不协调集合 Q 来限制这 k 个变量的取值为不可满足的赋值^[4]。从可能的 $\binom{n}{k}$ 个约束中随机选取 m 个构成CSP的一个随机实例。求解这个随机实例就是至少找到一个解,也就是这 n 个变量的一组赋值,使得这 m 个约束同时被满足;或者证明无解。一般情况下,随机CSP问题是NP完全的。可满足性判定问题(Satisfiability, SAT)是典型的CSP问题,即给定一个合取范式公式(Conjunctive Normal Form, CNF) F , SAT判定问题指是否存在一组指派使得 F 为真。

SAT问题是计算机科学中的核心问题,其理论及其应用研究是计算机与数理逻辑界学者共同关注的一个重大问题。

在工程技术、军事、人工智能、并发控制、交通运输等领域中,诸多带有协调性(或一致性)检验、组合优化的问题均可以编码到SAT问题。在SAT问题理论及应用方面的研究,包括硬件模型检测、软件模型搜索、可信计算、等价性检测、安全性验证、证明系统、证明复杂性、搜索算法、启发式算法、算法分析、难解实例、随机公式、问题编码、求解器设计、简化器设计、实例研究与工业应用等。大型数据库的维护、大规模集成电路的自动布线、机器人动作规划等都涉及到SAT问题。量化布尔公式(QBF)、最大可满足性(Max-SAT)、可满足性模块理论(SMT)及其他一些相关的理论研究,是理论计算机科学多年来研究的热点。

随着SAT问题的深入研究,各类具有特殊结构的SAT问题受到越来越多的学者重视。限制子句的长度或变量出现的次数,实质上是在特殊结构下研究SAT问题,目前研究较多的是 k -SAT问题。 k -SAT问题是指子句长度为 k 的SAT判定问题。当 $k \geq 3$ 时, k -SAT问题是著名的NP完全问题。为进一步理解 k -SAT问题的判定难度,进而研究随机 k -SAT问题,引入随机 k -SAT实例产生模型 $G(n, k, m)$,其中, n 表

收稿日期:2014-03-18 返修日期:2014-07-12 本文受国家自然科学基金(61363001, 61262006, 60863005, 61462001),宁夏自然科学基金(NXXT14009, NZ14108, Ngy2012096),北方民族大学基金(2014XYZ03, 2014XYS17)资助。

王晓峰(1980-),男,博士,讲师,主要研究方向为算法设计与分析、计算复杂性, E-mail: wxf_nun@163.com; 李强(1987-),男,博士,讲师,主要研究方向为人工智能; 丁红胜(1977-),男,硕士,副教授,主要研究方向为软件工程。

示变量个数, k 表示子句长度, m 表示子句个数。模型 $G(n, k, m)$ 按如下方式产生一个随机 k -SAT 实例: 随机均匀地在可能的子句(共有 $2^k \cdot \binom{n}{k}$ 个)中选择 $m = an$ 个子句, 被选中的子句之集构成实例^[5]。研究发现, 在随机 k -SAT 实例中, a 是一个重要参数, 它不仅对公式的可满足性产生影响, 还对公式可满足性判定的难易程度产生影响。一方面, 在可满足性问题的相变现象的研究中, 随机统计现象表明: 满足与不可满足之间出现一种临界现象, 对于随机 k -SAT 问题, 存在可满足的相变点 a_d , 当 $a < a_d$ 时, 实例高概率可满足; 当 $a > a_d$ 时, 实例高概率不可满足^[6,7]。在随机 3-SAT 问题中, 尽管人们不知道 a_d 的确切值, 但研究表明, a_d 至少为 3.52^[8], 至多为 4.506^[9]。另一方面, 大多数优秀的可满足性判定算法能够解决的实例与 a 密切相关。例如, 基于纯文字规则的算法能够有效求解 $a < 1.6$ 区域的随机 3-SAT 实例(如 DPLL 算法); 基于正文字或负文字出现次数最多而设计的算法可有效求解 $a < 3.52$ 区域的随机 3-SAT 实例(如 Zchaff 算法); WALK-SAT 算法可有效求解 a 稍高于 3.95 区域的随机 3-SAT 实例^[10,11]。

近年来研究者使用统计物理中的腔域方法^[12,13], 给出了可满足相变点的近似值 $a_d \simeq 4.267$, 且存在阈值 $a_c \simeq 3.921$ 。称 $a < a_c$ 为易解 SAT 区域, 称 $a_c < a < a_d$ 为难解 SAT 区域^[14,15]。位于 $a < a_c$ 区域的可满足实例的解空间形成一个较大的解集簇, 启发式局部搜索算法容易求解; 位于 $a_c < a < a_d$ 区域的实例, 解空间被分解成许多很小的解集簇, 这些解集簇之间相互分开, 且相距很远, 不可能通过改变有限数目变量的赋值使可满足指派从一个解集簇转到另一个解集簇, 使用局部搜索算法求解时收敛速度很慢, 且求解难度较大^[15]。尽管 SAT 问题是 NP-完全的, 但统计表明难解部分在 NP 类中所占的比例并不大。这佐证了在实际应用中比比皆是的满足性、协调性判定等问题的近似算法和随机算法的合理性。SAT 问题的相变现象进一步催生了概率方法在 SAT 问题中的研究和应用。基于腔域方法设计的求解可满足性问题的信息传播算法, 在难解区域的随机 3-SAT 实例上非常有效^[14-19]。如, 置信传播(Belief Propagation, BP)算法可有效求解 $a < 3.95$ 区域的随机 3-SAT 实例; 调查传播(Survey Propagation, SP)算法能够有效求解 $a < 4.26$ 区域的随机 3-SAT 实例^[14,15,20]。SP 算法是目前求解随机 3-SAT 问题最为有效的算法, 能够在稍高于线性时间内求解位于难解 SAT 区域的具备 10^7 变量规模的实例, 几乎能够有效求解接近相变点的可满足性实例^[15]。对 SP 算法而言, 难解 SAT 区域变窄。

信息传播算法不仅对固定定义域的随机可满足性问题非常有效(如随机 k -SAT 问题), 还可用于求解具有增长定义域的随机可满足性问题。许可等人在 NP 完全问题相变现象的研究中, 提出了具有精确相变和难解实例的 RB 模型, 该模型是一个典型的具有增长定义域的随机可满足实例产生模型, 被广泛应用于构造难解性问题^[21]。随后, 文献[22, 23]分别从理论上和实验上说明了在相变的阈值附近, 求解 RB 模型随机实例的难度随着问题规模的增加以指数形式增长。文献[24]表明: 基于变量熵的 BP 算法在求解 RB 模型实例时非常有效。同样, 信息传播算法可用于求解量化布尔公式(Quantified Boolean Formulae, QBF)的可满足性。殷明浩等人设计

了一种基于 SP 的启发式算法 HSPQBF, 用于求解 QBF 问题, 实验结果表明该算法有效^[25]。

信息传播算法尽管提供了一个非常有力的工具来求解可满足性问题, 但仍有两个问题有待在理论上深入研究:

- 1) 信息传播算法是否收敛;
- 2) 如果信息传播算法收敛, 得到的结果是否是变量边缘概率分布的有效近似; 如果信息传播不收敛, 这种情况下算法失效。

我们知道, 信息传播算法是一类迭代算法, 之所以能够有效求解可满足性问题, 使得难解 SAT 区域变窄, 缘于该算法能够在难解 SAT 区域的可满足性实例上正确收敛, 进而可得到变量的有效边缘概率分布, 用以固定变量的赋值。我们知道, 因子图为树型结构的实例, 信息传播算法能够有效收敛, 但对于因子图含有多个回路的图型结构的实例, 信息传播算法不总有效, 常表现为不收敛^[15]。因此, 有必要给出信息传播算法收敛的有效条件, 为更进一步优化信息传播算法的性能提供理论依据。

目前, 对信息传播算法收敛性的理论分析已取得一些结果。例如, 文献[14, 17]给出了信息传播算法的一般形式, 其本质是变量边缘概率分布的一种近似。文献[26]分析了有限树型结构上信息传播算法的复杂性。文献[27]分析了因子图含有一个环的图型结构的实例上信息传播算法的收敛性, 表明信息传播算法能够有效收敛, 且得到的结果是变量边缘分布的有效近似。文献[28]表明: 对于任意结构的高斯图模型实例, 信息传播算法能够正确收敛。Tatikonda 和 Jordan 分析了基于计算树的 Gibbs 测度序列的唯一性与 BP 算法收敛性之间的关系, 导出了 BP 算法收敛的一个充分条件^[29]。Heskes 利用 Bethe 自由能量最小值的唯一性给出了 BP 算法有唯一固定点的有效条件, 分析了信息传播算法与统计物理中自由能量函数之间的关系, 指出信息传播算法收敛后得到的固定点是自由能量函数的稳定点, 并给出了 BP 算法收敛到唯一固定点的充分条件, 但未对信息传播算法是否收敛做出理论分析^[30]。近几年, 一些学者根据信息更新函数的特征, 并利用函数的压缩映射原理, 给出了信息传播算法收敛的一些充分条件。如, Ihler 直接从 BP 算法的信息更新函数出发, 获得了传递错误信息的界, 并利用该错误界给出了信息传播算法收敛的一个充分条件^[31]。Mooij 和 Kappen 利用向量空间中信息更新函数的压缩映射原理导出了 BP 算法收敛的充分条件, 并指出: 如果更新函数系数矩阵的谱半径严格小于 1, 则 BP 算法收敛^[32]。Shi 和 Schonfeld 等人得到了传递错误信息的一个更紧致的界, 利用这个界研究了信息传播算法的动态行为, 并给出了算法收敛的一个充分条件^[33]。文献[34]分析了求解最小代价网络流(MCF)的 BP 算法的收敛性, 研究表明: 在亚多项式时间内, BP 算法收到 MCF 问题的最优解, 并且这个最优解具有唯一性。与此同时, 文献还提供了一个简化的 BP 算法, 其能够对 MCF 问题给出一个多项式时间随机近似方案(FPRAS)。文献[35]给出了 BP 算法收敛的一个概率条件, 研究表明: BP 算法能够给出最大权重匹配问题和最小代价网络流问题的最优解, 且算法迭代次数高概率地有多项式界。文献[36]分析了 BP 算法的复杂性, 提出一个 SBP (Stochastic BP) 算法, 该算法的消息更新复杂性较 BP

算法的复杂性降低了一个指数级别。

警示传播(Warning Propagation, WP)算法是最为基础的信息传播算法,对 WP 算法的收敛性分析有助于分析其它信息传播算法的收敛性。文献[37]分析了 WP 算法的收敛性,但主要局限于植入指派的随机可满足实例产生模型 $P_{n,p}^{plam}$,即,给定一个指派以概率 p 随机选取满足指派的子句之集构成实例。具体地讲,在 $P_{n,p}^{plam}$ 模型中要取概率 p 充分大,其本质是高概率地最多只有一个赋值满足实例,利用这一特性证明了 WP 算法的收敛性,并给出算法收敛的一个概率条件。在文献[38]中我们已经分析了警示传播算法在 3-SAT 实例上的收敛性,即,当 $p < 1/8n^2$ 时,WP 算法在 $G(n, k, p)$ 模型产生的 3CNF 公式上高概率收敛。

可以看出,信息传播算法在一些具有某种特定性质或结构的实例上收敛,且给出的都是信息传播算法收敛的充分条件,目前还不清楚算法收敛的必要条件。因此,信息传播算法收敛性的理论分析仍然不完善。

目前,要对信息传播算法的收敛性做出理论分析仍然比较困难。相对地,基于某种特殊结构实例展开研究,信息传播算法的收敛性研究则更为具体。基于这样的动机,本文主要针对规则结构的随机(3,4)-SAT 实例展开对警示传播算法的收敛性分析。

通过构造极小不可满足公式,可以将任意一个 3-SAT 实例在多项式时间内转换为一个(3,4)-SAT 实例(3 为每个子句的大小,4 为每个变元在实例中出现的次数),(3,4)-SAT 问题是 NP-完全的^[39]。(3,4)-SAT 实例的因子图结构具有良好的性质,每个子句结点的度数均为 3,每个变元结点的度数均为 4。通过实验分析我们发现:相比 3-SAT 实例,在这种规则结构的(3,4)-SAT 可满足性实例集上,警示传播算法的收敛性有较大提高。

2 警示传播算法

设 $F = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 为一个 CNF 公式,含有 n 个变元 x_1, x_2, \dots, x_n ,用 i 代表变元 x_i 。公式 F 可以用一个二分图 $G = (C \cup X, E)$ 表示,称为因子图。其中,变元结点集为 $X = \{1, 2, \dots, n\}$,子句结点集为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 。图 G 中的边分为两类:实边和虚边。

实边: $(C_i, j) \in E \Leftrightarrow$ 子句 C_i 含正文字 x_j ;

虚边: $(C_i, j) \in E \Leftrightarrow$ 子句 C_i 含负文字 $\neg x_j$;

$V(a)$:表示出现在子句 a 中的变元集合, $V(a) := V^+(a) \cup V^-(a)$ 。其中

$V^+(a)$:表示出现在子句 a 中的正文字对应的变元标识集合;

$V^-(a)$:表示出现在子句 a 中的负文字对应的变元标识集合。

$V(a) \setminus i := V(a) - \{i\}$ 。

$V(j)$:表示含变元 x_j 的子句集合, $V(j) := V^+(j) \cup V^-(j)$ 。其中

$V^+(j)$:表示变元 x_j 正出现的子句集合;

$V^-(j)$:表示变元 x_j 负出现的子句集合。

$V(j) \setminus a := V(j) - \{a\}$ 。

J_j^i 是一个标识参数,若 $x_j \in a$,则 $J_j^i = -1$;若 $\neg x_j \in a$,则

$J_j^i = 1$ 。在因子图的每条边 (a, i) 上,定义 WP 算法中的消息传递 $u_{a \rightarrow i}$ (常称为警示信息)。 $u_{a \rightarrow i}$ 表示子句 a 的可满足性对变元 x_i 的取值倾向。WP 算法的迭代方程如下:

$$u_{a \rightarrow i}(t) = \prod_{j \in V(a) \setminus i} \theta(-J_j^i (\sum_{b \in V(j) \setminus a} J_j^b u_{b \rightarrow j}(t-1))) \quad (1)$$

其中, t 表示迭代次数, $\theta(x)$ 是截尾函数。如果 $x \leq 0$,则 $\theta(x) = 0$,否则 $\theta(x) = 1$ 。若 a 中仅包含变元 x_i ,则置 $u_{a \rightarrow i} = 1$ 。当 WP 算法收敛时,根据警示信息固定变元 x_i 的赋值。

$$H_i = - \sum_{b \in V(i)} J_i^b u_{b \rightarrow i}^* \quad (2)$$

如果 $H_i > 0$,则 $x_i = 1$;如果 $H_i < 0$,则 $x_i = 0$;否则 x_i 暂不赋值。一般地,式(1)可写为如下形式:

$$u_{a \rightarrow i}(t) = \prod_{j \in V(a) \setminus i} \theta(J_j^i (\sum_{b \in V^+(j) \setminus a} u_{b \rightarrow j}(t-1) - \sum_{b \in V^-(j) \setminus a} u_{b \rightarrow j}(t-1))) \quad (3)$$

设

$$h_{j \rightarrow a} = \sum_{b \in V^+(j) \setminus a} u_{b \rightarrow j}(t-1) - \sum_{b \in V^-(j) \setminus a} u_{b \rightarrow j}(t-1) \quad (4)$$

称 $h_{j \rightarrow a}$ 为腔域。若变元 x_j 仅出现在 a 中,则置 $h_{j \rightarrow a} = 0$ 。求解(3,4)-CNF 公式 F 的 WP(Warning Propagation)算法如下:

Warning Propagation ((3,4)-CNF formula F)

1. 构造相应的因子图 $G(F)$;

2. 给因子图上的所有消息边 $u_{a \rightarrow i}(t=0)$ 随机赋值 0 或 1;

3. 重复如下过程,直到算法收敛(可设置最大迭代步 t_{\max} 强迫算法结束):

3.1. 对 $G(F)$ 中的边随机排列;

3.2. 根据随机边序列,利用式(1)更新消息 $u_{a \rightarrow i}$;

4. 根据 H_i 计算部分指派 ψ ,对公式 F 进行简化;

5. 返回 ψ 。

WP 算法中的收敛,是指算法某 t 次迭代得到的信息 $u_{a \rightarrow i}(t)$ 与 $t-1$ 次的信息 $u_{a \rightarrow i}(t-1)$ 一致。当算法收敛时,得到警示信息的固定点,进而可固定部分变元的赋值,并返回部分指派 ψ ;否则,算法不收敛,返回失败。可以看出,算法的收敛性对算法的性能起关键作用,有如下结论:

定理 1^[15] 如果公式对应的因子图为树型结构,那么 WP 算法收敛。

然而,在带有环的图型结构的因子图实例上 WP 算法不总收敛。目前,对算法收敛性分析仍然不完善。因此,有必要对 WP 算法的收敛性给予分析。

3 从 3-SAT 到(3,4)-SAT 的转换技术

一个文字是一个命题变元 x 或其否定 $\neg x$ 。一个子句 C 是文字的析取 $(L_1 \vee \dots \vee L_k)$,或表示成一个文字集合 $\{L_1, \dots, L_k\}$, k 称为子句长度。长度为 k 的子句简称为 k -子句。一个 CNF 公式 F 是子句的合取 $(C_1 \wedge \dots \wedge C_n)$,或表示成一个子句集 $\{C_1, \dots, C_n\}$,或一个子句表 $[C_1, \dots, C_n]$ 。 $var(F)$ 表示出现在公式 F 中的变元集, $\#cl(F)$ 和 $\#var(F)$ 分别表示公式 F 中的子句数和变元数。用 $pos(F, x)$ 和 $neg(F, x)$ 分别表示变元 x 在公式 F 中正、负出现的次数。变元 x 出现的次数记为 $occs(F, x) = pos(F, x) + neg(F, x)$ 。在本文中,我们假定:对出现在公式 F 中的每一个变元 x , $pos(F, x) \geq 1$ 且 $neg(F, x) \geq 1$ 。原因是:如果 $pos(F, x) = 0$ (或 $neg(F, x) = 0$),可以将包含文字 $\neg x$ (或 x) 的所有子句从公式中删去。这

转换为(3,4)-SAT实例。在WP算法中,取最大迭代次数 $t_{\max}=10^3$ 。

3-SAT问题的求解难度是关于问题规模 n 的函数。通俗地讲,若该函数是关于问题规模 n 的指数形式,则问题的求解难度较大;若该函数是关于问题规模 n 的多项式形式或线性形式,则问题的求解难度相对较小。已有的结果表明:问题的求解难度与参数 $a=m/n$ 有关,而与问题规模 n 无关。具体地讲,对于随机3-SAT实例,当 $3.52 < a < 4.506$ 时,问题的求解难度较大。也就是说,问题的求解难度关于问题规模 n 呈指数级形式变化;当 $a > 4.506$ 或 $a < 3.52$ 时,无论 n 取什么值,问题的求解难度较小。因此,本数值实验中,我们取问题规模 n 的值分别为20,40和60。

当问题规模 $n=20$ 时,WP算法在 $G(n,k,m)$ 模型产生的随机3-SAT实例集上的收敛性如图1所示。图1(a)表示随着约束参数 $a=m/n$ 的变化,WP算法收敛的概率发生变化的情况。图中每个数据点由 $G(n,k,m)$ 模型产生的100个随机实例构成。参数 a 增加至3.91时,WP算法的收敛性发生了突变,即从收敛变为不收敛。当参数 $a < 3.91$ 时,WP高概率收敛;当参数 $a > 3.91$ 时,WP算法高概率不收敛。我们知道,因子图的结构直接影响WP算法的收敛性。事实上,当参数 $a > 3.91$ 时, $G(n,k,m)$ 模型产生的随机实例基本处于难解区域,这部分实例的求解难度较大,并且实例的因子图的结构比较复杂,因此,导致WP算法不收敛。按照上述转换规则,如果将模型 $G(n,k,m)$ 产生的随机3-SAT实例转换为(3,4)-SAT实例,那么WP算法在(3,4)-SAT实例上的收敛性有较大提高,如图1(b)所示。图1(b)表示随着约束参数 $a=m/n$ 的变化,由 $G(n,k,m)$ 模型产生的随机3-SAT实例转换为(3,4)-SAT实例后,WP算法在(3,4)-SAT实例上收敛的概率发生变化的情况。从图1(b)中可以看出,参数 a 的取值不影响WP算法的收敛性,也即WP算法在(3,4)-SAT实例上高概率收敛(注意,这里的参数 a 仍然为随机3-SAT实例产生模型 $G(n,k,m)$ 中的参数)。我们看到,(3,4)-SAT实例的因子图是一个规则结构的二部图,每个变元结点的度数为4,每个子句结点的度数为3。该因子图的结构比较简单,图中环的数目较少。因此,最重要的一个特性是:它是局部树状结构的。但应注意到:警示传播算法的迭代方程是利用因子图的局部信息对消息进行更新,也就是说,某个边的消息由其它关联于该边的局部消息决定。我们已经知道在树状结构的因子图上,警示传播算法收敛。因此,正是由于实例因子图的局部树状结构这一特性,使得警示传播算法在(3,4)-SAT实例上高概率收敛。图2和图3分别为问题规模 $n=40$ 和 $n=60$ 的 $G(n,k,m)$ 实例上WP算法的收敛性。随着问题规模 n 的增大,WP算法在 $G(n,k,m)$ 实例上收敛的概率趋向一个稳定值,如图2(a)和图3(a)所示。WP算法的收敛性在约束参数 $a=3.91$ 处发生了突变,而且收敛的概率曲线随着 n 的增大几乎不变。

图2(b)和图3(b)表示WP算法在相应的(3,4)-SAT实例上的收敛性。注意到,问题规模 n 的变化不影响WP算法在(3,4)-SAT实例上的收敛性,也即WP算法高概率收敛。因此,在3-SAT实例的求解中,可以将3-SAT实例转换为(3,4)-SAT实例,以提高WP算法的求解效率。

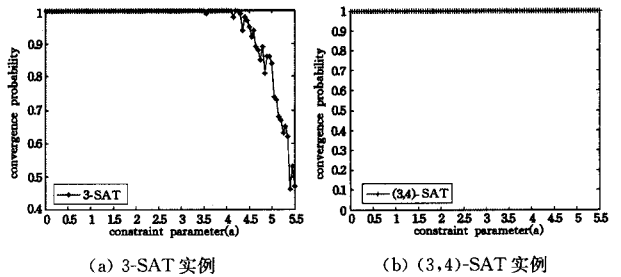


图1 问题规模 $n=20$, 模型 $G(n,k,m)$ 的随机实例集上WP算法的收敛性

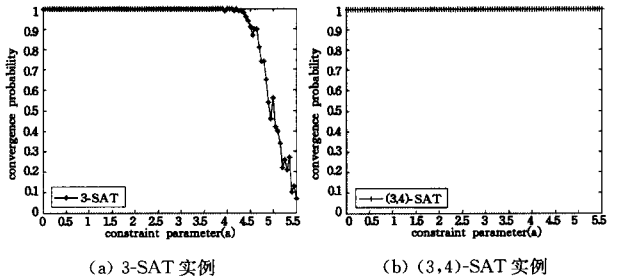


图2 问题规模 $n=40$, 模型 $G(n,k,m)$ 的随机实例集上WP算法的收敛性

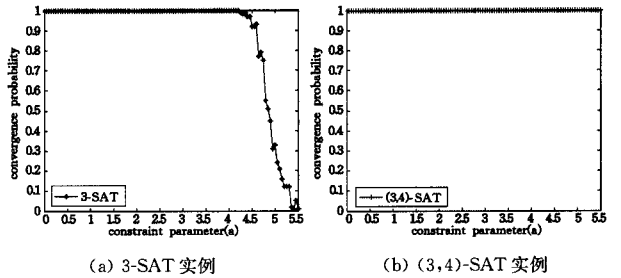


图3 问题规模 $n=60$, 模型 $G(n,k,m)$ 的随机实例集上WP算法的收敛性

综上所述,当 $a=m/n > 3.9$ 时,由模型 $G(n,k,m)$ 产生随机3-SAT实例,WP算法在该实例上高概率不收敛。根据上述转换关系,可以将一个3-SAT实例在多项式时间内转换为一个与之等价的(3,4)-SAT实例,WP算法在(3,4)-SAT实例上高概率收敛。

结束语 本文分析了WP算法的收敛性,通过将一个3-SAT实例在多项式时间内转换为一个(3,4)-SAT实例,分析WP算法在这种具有规则结构的因子图实例(3,4)-SAT上的收敛性。通过这种转换,相比3-SAT实例,WP算法在(3,4)-SAT实例上的收敛性有较大提高。通过实验分析发现:WP算法在(3,4)-SAT上高概率收敛。那么,存在一个问题:随机(3,4)-SAT实例是否有可满足性相变存在? 本文进一步的工作是:(1)构造随机(3,4)-SAT实例产生模型,分析该模型的可满足性相变;(2)分析WP算法求解(3,4)-SAT实例的有效性,并给出严格的理论证明过程。

参考文献

[1] Martin D, Alan F, Michael M. A probabilistic analysis of randomly generated binary constraint satisfaction[J]. Theory Computer Science, 2003, 290: 1815-1828
 [2] Creignou N, Eaude H. The SAT-UNSAT transition for random

- constraint satisfaction problems [J]. *Discrete Mathematics*, 2009, 309:2085-2099
- [3] Martin O C, Monasson R, Zecchina R. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization[J]. *Theory Computer Science*, 2001, 265:3-67
- [4] Tsang E. A glimpse of constraint satisfaction[J]. *Artificial Intelligence Review*, 1999, 13:215-277
- [5] Bourgain J. Sharp thresholds of graph properties and the k -SAT problem[J]. *Journal of The American Mathematical Society*, 1999, 12(4):1017-1054
- [6] Kirkpatrick S, Selman B. Critical behavior in the satisfiability of random Boolean Formulae[J]. *Science*, 1994, 264(5163):1297-1301
- [7] Mertens S, Mezard M, Zecchina R. Threshold values of random k -SAT from the cavity method[J]. *Random Structure Algorithms*, 2006, 28:340-373
- [8] Kaporis A, Kirousis L, Lalas E. The probabilistic analysis of a greedy satisfiability algorithm[J]. *Random structures & Algorithms*, 2006, 28(4):444-480
- [9] Dubois O, Boufkhad Y, Mandler J. Typical random 3-sat formulae and the satisfiability threshold[J]. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 2003, 10(7):1-2
- [10] Moskewicz M W, Madigan C F, Zhao Y, Chaff: Engineering an efficient SAT solver[C]//*Proceedings of the 38th annual Design Automation Conference*. New York, ACM, 2001:530-535
- [11] Aurell E, Gordon U, Kirkpatrick S. Comparing beliefs, surveys, and random walks[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2004, 17(1):1-8
- [12] Mezard M, Parisi G. The cavity method at zero temperature[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2003, 111(1/2):1-34
- [13] Mezard M, Zecchina R. Random k -satisfiability problem: From an analytic solution to an efficient algorithm[J]. *Physical Review E*, 2002, 66(5):56-126
- [14] Maneva E, Mossel E, Wainwright M. A new look at survey propagation and its generalizations[J]. *Journal of the ACM*, 2007, 54(4):1089-1098
- [15] Braunstein A, Mezard M, Zecchina R. Survey propagation: An algorithm for satisfiability[J]. *Random Structures and Algorithms*, 2005, 27(2):201-226
- [16] Montanari A. Message passing algorithms: A success looking for theoreticians[C]//*Proc. of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2010)*. New York, ACM, 2010:37-38
- [17] Yedidia J S, Freeman W T, Weiss Y. Understanding belief propagation and its generalizations[J]. *Artificial Intelligence*, 2003, 8(1):239-269
- [18] Mezard M, Parisi G, Zecchina R. Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems[J]. *Science*, 2002, 297(5582):812-815
- [19] Cjvas J, Furtlehner C, Mezard M, et al. Survey propagation decoding through distributed local computations[J]. *Journal of Statistic Mathematics*, 2005, 2005(11):11016
- [20] Braunstein A, Zecchina R. Survey and belief propagation on random k -SAT[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2004, 2919(1):519-528
- [21] Xu Ke, Li Wei. Exact phase transitions in random constraint satisfaction problems [J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2000, 12(1):93-103
- [22] Xu Ke, Li Wei. Many hard examples in exact phase transitions [J]. *Theory Computer Science*, 2006, 355(1):291-302
- [23] Xu Ke, Boussemart F, Hemery F, et al. Random constraint satisfaction: Easy generation of hard instances[J]. *Artificial Intelligence*, 2007, 171(1):514-534
- [24] 赵春艳, 郑志明. 一种基于变量熵求解约束满足问题的置信传播算法[J]. *中国科学 F: 信息科学*, 2012, 42(9):1170-1180
- [25] 殷明浩, 周俊萍, 孙吉贵, 等. 求解 QBF 问题的启发式调查传播算法[J]. *软件学报*, 2011, 22(7):1538-1550
- [26] Kschischang F, Frey B, Loeliger H. Factor graph and the sum-product algorithm[J]. *Information Theory*, 2001, 47(1):498-519
- [27] Weiss Y. Correctness of local probability propagation in graphical models with loops[J]. *Neural Computation*, 2000, 12(1):1-41
- [28] Weiss Y, Freeman W T. Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology [J]. *Neural Computation*, 2001, 13(10):2173-2200
- [29] Tatikonda S, Jordan M I. Loopy belief propagation and Gibbs measure[C]//*Proceedings of the 18th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. 2002:493-500
- [30] Heskes T. On the uniqueness of loopy belief propagation fixed points[J]. *Neural Computation*, 2004, 16:2379-2413
- [31] Ihler A T. Loopy belief propagation: Convergence and effects of message errors[J]. *Machine Learning Research*, 2005, 6:905-936
- [32] Mooij J M, Kappen H J. Sufficient conditions for convergence of the sum-product algorithm[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53:4422-4437
- [33] Shi Xiang-qiong, Schonfeld D, Tuninetti D. Message error analysis of loopy belief propagation for the sum-product algorithm [J]. *Computer and Information Science*, 2010, 1009:1-30
- [34] Gamarnik D, Shah D, Wei Y. Belief propagation for min-cost network flow: Convergence and correctness[J]. *Operations Research*, 2012, 60(2):410-428
- [35] Brunsch T, Cornelissen K, Manthey B, et al. Smoothed analysis of BP for minimum cost flow and matching[J]. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 2013, 17(6):647-670
- [36] Norshams N, Wainwright M J. Stochastic belief propagation: A low complexity alternative to the sum product algorithm[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(4):1981-2000
- [37] Feige U, Mossel E, Vilenchik D. Complete convergence of message passing algorithms for some satisfiability problems[J]. *Theory of computing*, 2013, 9(19):617-651
- [38] 王晓峰, 许道云, 韦立. 随机可满足实例集上警示传播算法的收敛性[J]. *软件学报*, 2013, 24(1):1-11
- [39] 许道云, 王晓峰. 一个正则 NP-完全问题及其不可近似性[J]. *计算机科学与探索*, 2013, 7(8):691-697