# 渐消记忆离散GM(1,1)模型及其递推算法

赵 敏[1,2] 孙棣华[1,2] 樊万梅[1,2] 刘卫宁[2,3]
(重庆大学自动化学院 重庆 400030)[1]
(重庆大学信息物理社会可信服务计算教育部重点实验室 重庆 400030)[2]
(重庆大学计算机学院 重庆 400030)[3]

**摘 要** 考虑新旧数据对预测效果具有不同影响,对原始数据建立了一种改进的滑动平均预处理方法。在此基础上,通过引入遗忘因子对新旧数据进行不同加权,提出了渐消记忆离散GM(1,1)模型。针对GM(1,1)模型求解计算开销大的问题,给出一种渐消记忆离散GM(1,1)模型的在线实时递推预测算法。将该模型及递推算法用于交通事故预测和区域货物周转量预测,结果表明渐消记忆离散GM(1,1)模型加强了模型的实时跟踪能力,在避免矩阵求逆的同时,提高了预测精度。

**关键词** 离散GM(1,1)模型,渐消记忆,递推算法,预测
**中图法分类号** C931 **文献标识码** A

## Fading Memory Discrete GM(1,1) Model and its Recursive Algorithm

ZHAO Min[1,2] SUN Di-hua[1,2] FAN Wan-mei[1,2] LIU Wei-ning[2,3]
(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030, China)[1]
(Key Laboratory of Dependable Service Computing in Cyber Physical Society of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030, China)[2]
(College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)[3]

**Abstract** Considering the different effects of the old and new data on the prediction results, an improved moving-average pretreatment method was established for the original data. On this basis, the forgetting factor was introduced to set different weight for the old and new data, and then the fading memory discrete GM(1,1) model was proposed. To handle with the huge calculational burden of GM(1,1) model, a new online real-time recursive prediction algorithm of the fading memory discrete grey model was presented. The proposed model and recursive algorithm were employed to predict the traffic accidents and the region freight Ton-kilometers. The results show that the real-time tracking ability is enhanced and the prediction precision is improved while solving inverse matrix is avoided.

**Keywords** Discrete GM(1,1) model, Fading memory, Recursive algorithm, Forecast

## 1 引言

作为灰色系统理论的一个重要分支[1-3],灰色模型在众多领域得到了广泛应用[4-9]。离散GM(1,1)模型[10]符合灰色模型的建模机理,可以全面解释原GM(1,1)模型从离散形式到连续形式的转变问题,其模拟和预测效果明显优于经典灰色模型[10,11]。

为了提高模型的预测精度,有学者对离散GM(1,1)模型进行了改进[12-16]。如文献[12]提出的始点固定离散灰色模型和终点固定离散灰色模型,解决了GM(1,1)模型对发展系数的变化依赖性较强的问题;文献[13]建立了非线性离散灰色预测模型,并提出了优化模型的求解算法,在很大程度上提高了模型的模拟精度;文献[14]提出将$X^{(1)}$的第$n$个分量作为灰色微分模型的初始条件与优化背景值相结合的方法,对模型进行了改进,改进后的模型适用于低增长指数序列和高增长指数序列,且拟合精度较高;文献[15]构建了多变量离散灰色模型,并且证明了其与传统$GM(n,h)$模型是等价的,以及模型的模拟和预测只与因变量的数乘变换有关,而与自变量的变换无关,模型的相对误差与所有变量的数乘变换都无关;文献[16]建立了离散最优化灰色模型,并对模型进行了仿射性研究,结果表明,通过仿射变换,可以缩小数据量级,简化建模过程,而不会改变模型的模拟和预测效果。

事实上,随着时间的推移,未来的扰动因素会不断地对系统造成影响,这将导致新旧数据对预测效果具有不同影响,即越新的数据对预测效果影响越大。但在现有的离散GM(1,1)模型中,新旧数据所发挥的作用是同等的,没有区分新旧数

到稿日期:2011-03-19 返修日期:2011-06-04 本文受教育部博士点专项基金(20090191110022),国家高技术研究发展计划(511-0910-1031)和中央高校基本科研业务费(CDJZR10170010)资助。

**赵 敏**(1980-),女,博士,讲师,主要研究方向为交通信息智能分析与挖掘、数字图像处理,E-mail:zhaomin@cqu.edu.cn;**孙棣华**(1962-),男,博士,教授,主要研究方向为智能交通系统、交通信息智能分析与挖掘。

据在预测中重要程度的不同。离散 GM(1,1)模型只是把新的数据加入原始数据序列中重新建模[5]，当新数据加入后需要重新计算参数。此外，模型求解每次都需要计算矩阵的逆，且算法重复计算多、运算复杂、计算开销大。

针对上述问题，本文借鉴渐消记忆的最小二乘法递推算法的建模思想[17]，通过对新旧数据进行不同加权，引入遗忘因子，建立渐消记忆离散 GM(1,1)模型，并进一步给出 GM(1,1)模型的在线实时递推预测算法，以削弱离散 GM(1,1)模型中旧数据的作用和提高模型实时跟踪数据的能力，以期离散 GM(1,1)模型在加入新数据后的模拟预测能够取得更好的效果。

## 2 渐消记忆离散灰色 GM(1,1)模型

### 2.1 数据预处理

离散灰色 GM(1,1)模型在处理波动比较大的数据时，由于预测精度不高，因此本文提出了数据预处理算法来消除数据序列波动比较大时所带来的影响。

建模机理如下。原始数据序列：$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$。则：

$$x'^{(0)}(t)=\frac{n*x^{(0)}(t-1)+x^{(0)}(t)+(1-n)*x^{(0)}(t+1)}{2},\quad 0<n<0.5 \tag{1}$$

两端点的计算公式：

$$x'^{(0)}(1)=\frac{3*x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)}{4} \tag{2}$$

$$x'^{(0)}(n)=\frac{x^{(0)}(n-1)+3*x^{(0)}(n)}{4} \tag{3}$$

经过预处理后生成的新序列 $X'^{(0)}=\{x'^{(0)}(1),x'^{(0)}(2),\cdots,x'^{(0)}(n)\}$极大地弱化了原始序列的过度波动。图 1 给出了原始数据序列和预处理后的数据序列波动效果图，其中原始序列为 $x=[3.1676\ 3.317\ 3.3645\ 3.3574\ 3.435\ 3.4524\ 3.4879\ 3.4974]$。

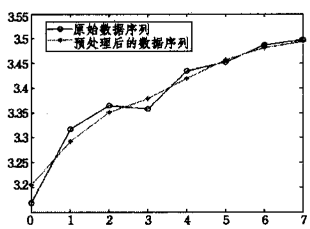


图 1 原始数据序列和预处理后的数据序列比较图

### 2.2 渐消记忆离散灰色 GM(1,1)模型

建模思想：在渐消记忆离散灰色 GM(1,1)模型进行预测时，由已知初始数据序列中的数据建立初始的离散预测模型；通过引入遗忘因子，突出当前数据的作用，同时体现出对旧数据的逐步衰减作用，建立能充分反映系统当前特性的模型，通过建立的预测模型预测一个值，然后将这个预测值补加到已知数列中，在线求解离散 GM(1,1)模型的参数；接着再建立离散 GM(1,1)模型预测下一个数据，然后再把新的预测数据部加到数列中，再求解模型参数，这样渐消记忆，逐个预测，直到完成预测目标为止。

建模机理如下。

**定义 1** 设序列 $X'^{(0)}=\{x'^{(0)}(1),x'^{(0)}(2),\cdots,x'^{(0)}(n)\}$为原始序列，称序列

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots x^{(1)}(n)\}$$

$$x^{(1)}(i)=\sum_{j=1}^{i}x'^{(0)}(j),\ i=1,2\cdots n$$

为序列 $X'^{(0)}$ 的一次累加生成(1-AGO)。

**引理** 设 $A,B,C,D$ 都是适当维数的矩阵，则 $(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(DA^{-1}B+C^{-1})^{-1}DA^{-1}$。

若 $\Theta=[a,b]^{\mathrm{T}}$ 为参数列，且

$$Z_n=[x^{(1)}(2),x^{(1)}(3),\cdots,x^{(1)}(n)]^{\mathrm{T}}$$

$$M=\begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

则离散 GM(1,1)模型：

$$x^{(1)}(k+1)=ax^{(1)}(k)+b(1) \tag{4}$$

其最小二乘估计参数列满足：

$$\hat{\Theta}=(M^{\mathrm{T}}M)^{-1}M^{\mathrm{T}}Z \tag{5}$$

## 3 渐消记忆离散灰色 GM(1,1)模型的递推求解

对上述的待辨识向量Θ用最小二乘解递推公式实现在线递推求解，从而得到模型的递推算法。递推的推导过程如下。

选用如下准则函数：

$$J_m=\varepsilon^{\mathrm{T}}W_k\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\mu^{n-i}\varepsilon^2(i) \tag{6}$$

其中，$w_n=\begin{bmatrix} w(1) & & 0 \\ & w(2) & \\ 0 & & w(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu^{n-1} & & & \\ & \mu^{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^{0} \end{bmatrix}$，$0<\mu\leqslant 1$。

在准则函数中，对各个观测数据按幂指数加权，数据愈“旧”权愈小，引进的遗忘因子 $\mu$(一般取 0.9～0.99)，使老的数据逐渐从记忆中消失。

加权最小二乘参数估计的批量处理算法为：

$$\hat{\Theta}_n=(M_n^{\mathrm{T}}W_nM_n)^{-1}M_n^{\mathrm{T}}W_nZ_n=(\Phi_n{}^{\mathrm{T}}\Phi_n)^{-1}\Phi_nY_n=p_n\Phi_nY_n \tag{7}$$

其中，

$$Y_n=W_nZ_n \tag{8}$$

$$\Phi_n=W_nM_n \tag{9}$$

$$p_n=[\Phi_n^{\mathrm{T}}\Phi_n]^{-1} \tag{10}$$

由式(8)，式(9)有：

$$Y_{n+1}=\begin{bmatrix}\mu Y_n\\ \cdots \\ y_{n+1}\end{bmatrix},\Phi_{n+1}=\begin{bmatrix}\mu\Phi_n\\ \cdots \\ \varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

其中，$y_{n+1}=x^{(0)}(k_{n+1})\Delta k_{n+1}$，$\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}=[-z^{(1)}(k_{n+1}),\Delta k_{n+1}]$。

由式(10)有：

$$p_{n+1}=[\Phi_{n+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{n+1}]^{-1}=\left\{[\mu\Phi_n^{\mathrm{T}}\ \vdots\ \varphi_{n+1}]\begin{bmatrix}\mu\Phi_n\\ \cdots \\ \varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$=[\mu^2P_n^{-1}+\varphi_{n+1}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}]^{-1} \tag{11}$$

令 $A=\mu^2P_n^{-1}$，$B=\varphi_{n+1}$，$c=1$，$D=\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}$，根据引理有：

$$p_{n+1}=\frac{1}{\mu^2}p_n-\frac{1}{\mu^4}p_k\varphi_{n+1}[1+\frac{1}{\mu^2}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}p_n\varphi_{n+1}]^{-1}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}p_n$$

$$=\frac{1}{\mu^2}[I-p_n\varphi_{n+1}(\mu^2+\frac{1}{n^2}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}p_n\varphi_{n+1})^{-1}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}]p_n \quad (12)$$

由式(7)有：

$$\hat{\Theta}_{n+1}=p_{n+1}\Phi_{n+1}Y_{n+1} \quad (13)$$

将式(12)代入式(13)得：

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{n+1}&=p_{n+1}[\mu^2 p_n^{-1}\hat{\Theta}_n+\varphi_{n+1}y_{n+1}]\\&=\hat{\Theta}_n+p_{n+1}\varphi_{n+1}[y_{n+1}-\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}\hat{\Theta}_n]\\&=\hat{\Theta}_n+g_{n+1}[y_{n+1}-\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}\hat{\Theta}_n]\end{aligned} \quad (14)$$

其中，

$$g_{n+1}=p_{n+1}\varphi_{n+1}=p_n\varphi_{n+1}(\mu^2+\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}p_n\varphi_{n+1})^{-1} \quad (15)$$

将式(12)代入式(9)得：

$$p_{n+1}=\frac{1}{\mu^2}[I-g_{n+1}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}]p_n \quad (16)$$

于是由式(14)，式(15)和式(16)得到递推公式如下：

$$\hat{\Theta}_{n+1}=\hat{\Theta}_n+g_{n+1}[y_{n+1}-\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}\hat{\Theta}_n] \quad (17)$$

$$g_{n+1}=\frac{p_n\varphi_{n+1}}{\mu^2+\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}p_n\varphi_{n+1}} \quad (18)$$

$$p_{n+1}=\frac{1}{\mu^2}[I-g_{n+1}\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}]p_n \quad (19)$$

利用式(17)一式(19)可以求得辨识参数$\hat{\Theta}_{n+1}=[\hat{a},\hat{b}]^{\mathrm{T}}$，则解得方程(1)的解为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=ax^{(0)}(1)+\frac{1-a^k}{1-a}\cdot b, k=1,2,\cdots,n-1 \quad (20)$$

还原到原始数据为：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k) \quad (21)$$

原始数据序列先经过数据预处理，然后按定义 1 得到一次累加生成序列，就可建立渐消记忆离散 GM(1,1)模型递推算法，具体步骤如下：

(1)先取一批观测量(取 $n=3$)，用批处理最小二乘式(3)求得$\hat{\theta}_n$，利用式(20)、式(21)求得前 $n$ 个预测值，利用式(10)求得 $p_n$。

(2)从第 $n+1$ 个数据开始，$y_{n+1}=x^{(0)}(k_{n+1})\Delta k_{n+1}$，$\varphi_{n+1}^{\mathrm{T}}=[-z^{(1)}(k_{n+1}),\Delta k_{n+1}]$，然后代入递推式(17)一式(19)可求得$\hat{\theta}_{n+1}$。

(3)将新求得的辨识参数代入式(20)求得 $\hat{x}^{(1)}(k_{n+2})$，然后利用式(21)可求得 $x^0(k_{n+2})$得预测值$\hat{x}^0(k_{n+2})$。若还需要预测下一个值，则转步骤(2)。

## 4 应用实例与分析

### 4.1 交通事故预测

形成交通事故的因素很多，包括人、车、路、气候等，它具有很大的随机性、模糊性和偶然性，故可把交通事故系统作为一个灰色系统[5]。本文以交通事故预测来检验模型，我国 2001－2009 年的交通事故次数见表 1。

表 1 我国 2001－2009 年的交通事故次数

| 年份 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 次数(万) | 76.0327 | 77.3137 | 66.7160 | 56.7753 | 45.0254 |
| 年 份 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | |
| 次数(万) | 37.8781 | 32.7209 | 26.5204 | 23.8351 | |

实验平台采用 MATLAB2007a，分别利用文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型和本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型，对交通事故发生次数进行预测，分析比较它们的模型精度和对数据变化的跟踪能力。用 2001－2004 年的数据建立模型，用 2005－2009 年的数据作为模型的检验数据，取 $n=0.42$，$u=0.9$，预测结果及模型精度检验值比较见表 2、表 3、图 2 和图 3。

表 2 预测结果表

| 年份 | 真实值(万次) | 文献[10]离散 GM(1,1)预测模型 | | 渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 预测值(万次) | 相对误差(%) | 预测值(万次) | 相对误差(%) |
| 2005 | 45.0254 | 48.7954 | 8.37 | 46.5841 | 3.46 |
| 2006 | 37.8781 | 41.8573 | 10.51 | 38.3924 | 1.36 |
| 2007 | 32.7209 | 35.9057 | 9.73 | 31.6168 | 3.37 |
| 2008 | 26.5204 | 30.8003 | 16.14 | 26.7698 | 0.94 |
| 2009 | 23.8351 | 26.4209 | 10.85 | 22.7268 | 4.65 |

表 3 模型精度检验值比较表

| 模型 | 平均相对误差(%) | 后验差比值 | 小误差概率 |
|---|---|---|---|
| 文献[10]离散 GM(1,1)预测模型 | 11.12 | 0.0705 | 1 |
| 渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型 | 2.76 | 0.1077 | 1 |

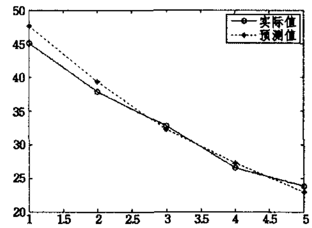


图 2 渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型

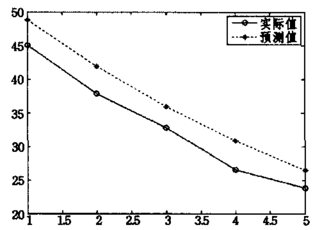


图 3 离散 GM(1,1)预测模型

根据文献[5]中的离散灰色 GM(1,1)模型的评价指标，由表 3 可以得到渐消记忆离散 GM(1,1)模型是残差合格模型，模型精度等级为一级。

由表 2 和表 3 可得，文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型和本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型的平均误差分别为 11.12%和 2.76%，表明渐消记忆离散 GM(1,1)模型具有更好的预测精度。此外，随着预测时间的增加，离散 GM(1,1)预测模型预测误差也逐渐增加，尤其是在数据波动较大时，预测误差更大，说明采用离散 GM(1,1)预测模型预测时，不能跟踪交通事故的变化，而渐消记忆离散 GM(1,1)模型克服了离散 GM(1,1)预测模型的缺点，对于较远年份的交通事故预测和波动较大的交通事故预测同样适用。

图 2 和图 3 分别给出的是文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型和本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型的预测值和实际值曲线。由图 2 可知，渐消记忆离散 GM(1,1)模型能够很好地跟踪交通事故的变化，且预测误差较小；文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型虽然能够跟踪交通事故的变化，但是预测误差较大。由此可以看出，无论是在预测误差精度或是跟踪交通事故变化的能力方面，渐消记忆离散 GM(1,1)模型都优于文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型。

### 4.2 区域货物周转量预测

区域货物周转量是某个区域内所有运输方式产生的货物

周转量总和，具有很大的随机性、模糊性和偶然性，故可用灰色模型对区域货物周转量进行预测。以湖南省 1997－2006 年货物周转量(见表 4)为实验数据。

表 4　湖南省 1997－2006 年货物周转量(亿 t. Km)

| 年份 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|
| 数据 | 986 | 969 | 981.3 | 1066.4 | 1111.6 |
| 年份 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
| 数据 | 1213.1 | 1350.6 | 1552.4 | 1628.6 | 1776.05 |

采用与交通事故预测相同的实验平台，对区域货物周转量进行预测，分析比较文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型和本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型的模型精度和对数据变化的实时跟踪能力。用 1997－2000 年的数据建立模型，用 2001－2006 年的数据作为模型的检验数据，取 $n=0.48$，$u=0.98$，预测结果及模型精度检验值比较见表 5、表 6、图 4 和图 5。

表 5　预测结果表

| 年份 | 真实值(亿 t・Km) | 文献[10]离散 GM(1,1)预测模型 | | 渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 预测值(亿 t・Km) | 相对误差(%) | 预测值(亿 t・Km) | 相对误差(%) |
| 2001 | 1111.6 | 1108.0 | 0.33 | 1117.0 | 0.49 |
| 2002 | 1213.1 | 1163.6 | 4.08 | 1185.8 | 2.25 |
| 2003 | 1350.6 | 1222.1 | 9.52 | 1303.5 | 3.49 |
| 2004 | 1552.4 | 1283.5 | 17.32 | 1490.0 | 4.02 |
| 2005 | 1628.6 | 1347.9 | 17.23 | 1672.1 | 2.67 |
| 2006 | 1776.05 | 1415.6 | 20.29 | 1797.0 | 1.18 |

表 6　模型精度检验值比较表

| 模型 | 平均相对误差(%) | 后验差比值 | 小误差概率 |
|---|---|---|---|
| 文献[10]离散 GM(1,1)预测模型 | 11.46 | 1.1234 | 1 |
| 渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型 | 2.35 | 0.0868 | 1 |

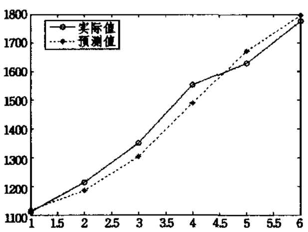


图 4　渐消记忆离散 GM(1,1)预测模型

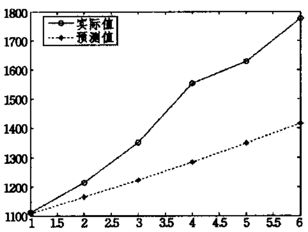


图 5　离散 GM(1,1)预测模型

根据文献[5]中的离散灰色 GM(1,1)模型的评价指标，由表 6 可以得到渐消记忆离散 GM(1,1)模型是残差合格模型，模型精度等级为一级。由表 5 和表 6 可得，相较于文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型，渐消记忆离散 GM(1,1)模型具有更好的预测精度。

图 4 和图 5 分别给出的是本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型和文献[10]的离散 GM(1,1)预测模型的预测值和实际值曲线。由图 4 可以看出，渐消记忆离散 GM(1,1)模型能够很好地跟踪数据的变化，而且预测误差较小；由图 5 可以看出，随着预测时间的增加，离散 GM(1,1)预测模型预测误差也逐渐增加，尤其是在数据波动较大时，预测误差更大，说明采用离散 GM(1,1)预测模型预测时，不能跟踪区域货物周转量的变化，而渐消记忆离散 GM(1,1)模型克服了离散 GM(1,1)预测模型的缺点，对于较远年份的区域货物周转量预测和波动较大的预测同样适用。

**结束语**　实验结果表明，本文提出的渐消记忆离散 GM(1,1)模型较离散 GM(1,1)模型预测误差更低，模型精度更高，对递增和递减数列都有较好的预测效果，并且能实时地跟踪数据的变化，避免了矩阵求逆运算。

## 参考文献


[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2002

[2] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2002

[3] 刘思峰，党耀国，方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2004

[4] 同小军，陈绵云，周龙. 关于灰色模型的累加生成效果[J]. 系统工程理论与实践，2002，22(11)：121-125

[5] 池自英，池彭军. 新陈代谢离散灰色预测 M D GM(1,1)模型及其应用[J]. 数学的实践与认识，2009，39(1)：26-30

[6] 刘淑环，焦宝聪. 北京市道路交通事故灰色预测模型的构建与应用[J]. 数学的实践与认识，2009，39(9)：115-122

[7] 李刚，黄同愿，闫河，等. 公路交通事故预测的灰色残差模型[J]. 交通运输工程学报，2009，9(5)：88-93

[8] 周刚，王弘宇，胡春雪，等. 应用灰色新陈代谢 GM(1,1)模型预测中长期城市需水量[J]. 中国农村水利水电，2005(8)：16-18

[9] 王正新，党耀国，刘思峰. 两阶段灰色模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践，2008，28(11)：109-114

[10] 谢乃明，刘思峰. 离散 GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践，2005，25(1)：93-99

[11] 谢乃明，刘思峰. 离散灰色模型的拓展及其最优化求解[J]. 系统工程理论与实践，2006，26(6)：108-112

[12] 谢乃明，刘思峰. 一类离散灰色模型及其预测效果研究[J]. 系统工程学报，2006，21(5)：520-523

[13] 姚天祥，刘思峰. 改进的离散灰色预测模型[J]. 系统工程，2007，25(9)：103-106

[14] 张怡，魏勇，熊常伟. 灰色模型 GM(1,1)的一种新优化方法[J]. 系统工程理论与实践，2007，27(4)：141-146

[15] 谢乃明，刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. 系统工程理论与实践，2008，28(6)：143-150

[16] 谢乃明，刘思峰. 离散灰色模型的仿射特性研究[J]. 控制与决策，2008，23(2)：200-203

[17] 杨承志，孙棣华，张长胜. 系统辨识与自适应控制[M]. 重庆：重庆大学出版社，2003