

Vague 集模糊熵度量的新构造方法

徐凤生¹ 史开泉^{1,2}

(德州学院数学系 德州 253000)¹ (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)²

摘 要 指出了现有 Vague 集模糊熵定义的不足,分析了其存在不足的根本原因,给出了 Vague 集模糊熵的公理化定义,提出了一种新的 Vague 集模糊熵的计算方法,并证明了其合理性和有效性。

关键词 Vague 集, Fuzzy 集, 隶属函数, 模糊熵

中图法分类号 O144 **文献标识码** A

New Construction Method of Fuzzy Entropy of Vague Sets

XU Feng-sheng¹ SHI Kai-quan^{1,2}

(Department of Mathematics Sciences, Dezhou University, Dezhou 253000, China)¹

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)²

Abstract The drawbacks of existing definition on fuzzy entropy of vague set were pointed out, and the causes of drawback were analyzed. We gave out the axiomatizing definition on fuzzy entropy of vague set, and proposed a new fuzzy entropy of Vague set, and proved its rationality and validity.

Keywords Vague sets, Fuzzy sets, Membership function, Fuzzy entropy

1 引言

Zadeh 于 1965 年提出了 Fuzzy 集理论^[1],它的核心是利用隶属度的概念来描述支持和反对两种信息,即对于论域 U 中的一个 Fuzzy 集,隶属函数 μ_V 给每个对象 u 指定 $[0, 1]$ 中的一个值 $\mu_V(u)$, $\mu_V(u)$ 包含了支持 u 的证据, $1 - \mu_V(u)$ 包含了反对 u 的证据。但现实情况中往往不仅出现元素对模糊概念的支持与反对两个方面,还体现出介于支持与反对之间的踌躇性。如投票模型中有支持与反对两个方面,且有弃权情况发生。这类问题用 Fuzzy 集是无法处理的。Gau 等^[2]在 1993 年提出 Vague 集,给解决投票模型这类问题提出了一个崭新的思路。在一个 Vague 集中,用一个真隶属函数 $t_V(u)$ 和一个假隶属函数 $f_V(u)$ 来描述其隶属度的边界,这两个边界就构成 $[0, 1]$ 的一个子区间 $[t_V(u), 1 - f_V(u)]$, 其中,一个对象的支持度、反对度和未知度分别为 $t_V(u)$ 、 $f_V(u)$ 和 $1 - t_V(u) - f_V(u)$ 。这使 Vague 集在处理不确定性信息时较 Fuzzy 集有更强的表示能力和灵活性。但是对于 Vague 集模糊熵的研究,与 Fuzzy 集相比存在一定的困难。Vague 集的模糊熵不仅来自 Vague 集本身的未知性,还来自 Vague 集存在的不确定性。在文献[3-6]中分别给出了计算 Vague 集模糊熵的方法,但其 Vague 集模糊熵的定义都存在不足和缺陷。本文分析了其存在不足的根本原因,给出了 Vague 集模糊熵的公理化定义,提出了 Vague 集模糊熵计算的新方法,并通过实例说明了其合理性和有效性。

2 Vague 集基本理论

定义 1 设 U 是一个论域,对 U 的任一元素 x , U 中的一

个 Vague 集 V 用一个真隶属函数 t_x 和一个假隶属函数 f_x 表示。 t_x 是从支持 x 的证据所导出的 x 的真隶属度下界, f_x 则是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界, t_x 和 f_x 将区间 $[0, 1]$ 中的实数与 U 中每一元素联系起来,即: $t_x: U \rightarrow [0, 1]$, $f_x: U \rightarrow [0, 1]$, 其中, $t_x + f_x \leq 1$ 。

由 Vague 集的定义可知, Vague 集 V 中任一元素 x 的隶属函数被限制在 $[0, 1]$ 上的一个子区间 $[t_x, 1 - f_x]$ 内, 其中 t_x 是 Vague 集的真隶属函数,它表示支持 $x \in U$ 证据的必要程度; f_x 是 Vague 集的假隶属函数,它表示反对 $x \in U$ 证据的必要程度; $1 - f_x$ 则表示支持 $x \in U$ 的证据的可能程度。

若 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则 U 上的 Vague 集 A 记为:

$$A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, 1 - f_{x_i}] / x_i$$

若 $x = [t_x, 1 - f_x]$, 记 $\pi_x = 1 - t_x - f_x$, 称 π_x 为 x 的未知信息, $|t_x - f_x|$ 为 x 的不确定信息。

定义 2 一个 Vague 集 A 的补集 $\bar{A}$ 定义为:

$$t_{\bar{A}} = f_A, 1 - f_{\bar{A}} = 1 - f_A$$

定义 3 称 Vague 集 A 包含于 Vague 集 B , 记作 $A \subseteq B$, 如果 $t_A(x_i) \leq t_B(x_i)$, 且 $1 - f_A(x_i) \leq 1 - f_B(x_i)$ 。

3 现有 Vague 集模糊熵的不足

已知论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A = \sum_{i=1}^n [t_{x_i}, 1 - f_{x_i}] / x_i$ 是论域 U 上的 Vague 集, 文献[3-6]中给出的 Vague 集模糊熵计算公式如下:

$$VE_1(A) = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n - \sum_{i=1}^n |t_{x_i} - f_{x_i}|}{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n + \sum_{i=1}^n |t_{x_i} - f_{x_i}|} \quad (1)$$

$$VE_2(A) = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i}^2 + n - \sum_{i=1}^n (t_{x_i} - f_{x_i})^2}{2n} \quad (2)$$

$$VE_3(A) = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n - \sum_{i=1}^n |t_{x_i} - f_{x_i}| (1 + t_{x_i} + f_{x_i}) / 2}{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n + \sum_{i=1}^n |t_{x_i} - f_{x_i}| (1 + t_{x_i} + f_{x_i}) / 2} \quad (3)$$

$$VE_4(A) = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n - \sum_{i=1}^n |t_{x_i}^2 - f_{x_i}^2|}{\sum_{i=1}^n \pi_{x_i} + n + \sum_{i=1}^n |t_{x_i}^2 - f_{x_i}^2|} \quad (4)$$

下面通过例子来说明已有 Vague 集模糊熵计算方法存在的局限性和不足。

例 1 设 $x=[0.3, 0.3]$, $y=[0.2, 0.3]$, 使用已有方法得出的模糊熵如表 1 所列。

表 1 现有几种 Vague 值模糊熵计算方法比较

	VE ₁	VE ₂	VE ₃	VE ₄
x	0.429	0.42	0.429	0.429
y	0.375	0.38	0.397	0.419

用投票模型来解释上面所得结果,即 x 是 3 人支持、7 人反对、无人中立,而 y 是 2 人支持、7 人反对、1 人中立。很显然, x 中所有人都有自己的见解,要么同意,要么反对,而 y 中还有中立的情况。因此,按照直觉判断, x 的模糊性肯定比 y 的要小。然而,由表 1 可以看出,文献[3-6]的方法计算出的结果与实际刚刚相反。这说明文献[3-6]的方法存在着一定的局限性和不足。下面分析存在这种局限性和不足的根本原因。文献[3]中 Vague 值模糊熵定义中的条件“当 $t_y \leq f_y$ 时有 $x \leq y$, 或当 $t_y \geq f_y$ 时有 $y \leq x$, 那么 $VE(x) \leq VE(y)$ ”,实际上等价于“若 $|t_x - f_x| \geq |t_y - f_y|$, 则 $VE(x) \leq VE(y)$ ”,它只考虑了不确定信息对其模糊熵的影响,而没有考虑未知信息对其模糊熵的影响。为了克服这种不足,文献[5]中对这个条件进行了修正,将其改为“若 $t_x \neq f_x, t_y \neq f_y$, 当 $\pi_x > \pi_y$ 时, $VE(x) > VE(y)$ ”和“若 $t_x \neq f_x, t_y \neq f_y$, 当 $\pi_x = \pi_y, |t_x - f_x| < |t_y - f_y|$ 时, $VE(x) > VE(y)$ ”。显然,这个定义考虑了未知信息对其模糊熵的影响。但这个条件同样存在问题,下面通过例子说明。

例 2 设 $x=[0.8, 1]$, $y=[0.7, 0.8]$, 利用文献[5]中 Vague 值模糊熵的公式计算可得: $VE(x) = 0.25 < VE(y) = 0.4$, 而此时 $\pi_x = 0.2 > \pi_y = 0.1$, 显然与文献[5]中模糊熵定义中的条件矛盾。

通过进一步分析发现,文献[5]中定义 1 的条件(4)是不对的,文献[5]中定理的证明也存在错误。

例 3 设 $x=[0.5, 0.5]$, $y=[0.3, 0.7]$, 使用已有方法得出的模糊熵如表 2 所列。

表 2 现有几种 Vague 值模糊熵计算方法比较

	VE ₁	VE ₂	VE ₃	VE ₄
x	1	0.5	1	1
y	1	0.58	1	1

用投票模型来解释上面所得结果,即 x 是 5 人支持、5 人反对、无人中立,而 y 是 3 人支持、3 人反对、4 人中立。很显然, x 中所有人都有自己的见解,要么同意,要么反对,而 y 中还有中立的情况。因此,按照直觉判断, x 的模糊性肯定比 y 的要小。然而,由表 2 可以看出,式(1)、式(3)和式(4)计算出的结果完全一样,不符合人们的直觉,只有式(2)计算出的结果与人们的直觉相一致。导致上述方法出现上述情况的原因

是:这些方法只考虑了真假隶属度对其模糊熵的影响,而没有考虑不确定信息对其模糊熵的影响。

综上所述,对于 Vague 集的模糊熵,既存在未知模糊性,又存在不确定模糊性。Vague 集的模糊性必须同时考虑这两个方面,既要考虑在未知信息相同的情况下,模糊熵与不确定信息的关系,又要考虑在不确定信息相同的情况下,模糊熵与未知信息的关系。为了给出 Vague 集模糊熵的合理化定义,下面对投票模型各种情况下反映出的信息情况进行分析。假定 10 个人对某一个方案进行投票,作为最终决策,投票结果反映出来的信息有多少?在文献[7]中 7 种情况的基础上,下面分 9 种情况讨论。

- (1) $[1, 1]$ 表示全部同意。
- (2) $[0, 0]$ 表示全部反对。
- (3) $[0, 1]$ 表示全部弃权。
- (4) $[0.5, 0.5]$ 表示同意数和反对数相等,没有弃权票。
- (5) $[0.3, 0.7]$ 表示同意数和反对数均为 3,弃权数为 4。

上述 5 种结果中,(1)和(2)是最容易作出决策的。(3)全部弃权,是最大的未知信息,其结果毫无倾向性,难以作出决策。(4)和(5)同意数和反对数相同,双方势均力敌,难以作出决策。以上(3)、(4)、(5)反映的是最难作出决策的情况,此时的信息量最大,但由于(3)全部未知,(4)中每个人都有自己的见解,(5)中 3 人支持,3 人反对,4 人弃权,因此(3)的模糊性最大,(5)的模糊性次之,而(4)的模糊性最小,只有当全部未知时,模糊熵达到最大值 1。

(6) $[0.3, 0.6]$ 表示同意数为 3,反对数为 4,弃权数为 3; $[0.4, 0.7]$ 表示同意数为 4,反对数为 3,弃权数为 3。这两种情况尽管在同意数和反对数上有差异,但弃权数相同,反映出来的信息量是一样的。

(7) $x=[0.4, 0.7]$, $y=[0.5, 0.9]$, x 的同意数大于反对数, y 与 x 相比同意数增加反对数减少,因此 y 是一个比 x 更便于决策的投票结果。同样的对投票结果 $x=[0.3, 0.6]$ 和 $y=[0.2, 0.4]$, x 的同意数小于反对数, y 与 x 相比同意数减少反对数增加,因此 y 是一个比 x 更便于决策的投票结果。这两种情况下, x 的信息量比 y 的信息量大。

(8) $x=[0.2, 0.7]$, $y=[0.4, 0.9]$, x 和 y 的弃权数相同,但 x 同意与反对的差异小于 y 同意与反对的差异,因此 y 是一个比 x 更便于决策的投票结果。此时, x 的信息量比 y 的信息量大。

(9) $x=[0.1, 0.7]$, $y=[0.3, 0.5]$, x 同意与反对的差异与 y 同意与反对的差异相同,但 x 的弃权数大于 y 的弃权数, x 的未知信息大于 y 的未知信息,因此 y 是一个比 x 更便于决策的投票结果。此时, x 的信息量比 y 的信息量大。

结合上述情况,对文献[3,5]中的定义进行了修正,给出了 Vague 集模糊熵更合理的公理化定义,提出了一种新的 Vague 集模糊熵的计算公式,并证明了其有效性和合理性。

4 一种 Vague 集的新模糊熵

首先,在上面分析的基础上,给出 Vague 集模糊熵的公理化定义如下:

定义 4 称函数 $VE:VS(U) \rightarrow [0, 1]$ 为 Vague 值 x 的模糊熵,如果其满足下列条件:

- (1) $VE(x) = 0$ ($[t_x, 1 - f_x] = [0, 0]$ 或 $[t_x, 1 - f_x] = [1, 1]$).

$$(2) VE(x)=1 \Leftrightarrow t_x=f_x=0.$$

$$(3) VE(x)=VE(\bar{x}).$$

(4) 若 $\pi_x=\pi_y$, 则 $|t_x-f_x|>|t_y-f_y|$ 时, $VE(x)<VE(y)$.

(5) 若 $|t_x-f_x|=|t_y-f_y|$, 则 $\pi_x>\pi_y$ 时, $VE(x)>VE(y)$.

定义 5 称函数 $VE:VS(U)\rightarrow[0,1]$ 为 Vague 集 A 的模糊熵, 如果其满足下列条件:

$$(1) VE(A)=0 \Leftrightarrow [t_A(x_i), 1-f_A(x_i)]=[0,0] \text{ 或 } [t_A(x_i), 1-f_A(x_i)]=[1,1].$$

$$(2) VE(A)=1 \Leftrightarrow t_A(x_i)=f_A(x_i)=0.$$

$$(3) VE(A)=VE(\bar{A}).$$

(4) 若 $\pi_A(x_i)=\pi_B(x_i)$, 则 $|t_A(x_i)-f_A(x_i)|>|t_B(x_i)-f_B(x_i)|$ 时, $VE(A)<VE(B)$.

(5) 若 $|t_A(x_i)-f_A(x_i)|=|t_B(x_i)-f_B(x_i)|$, 则 $\pi_A(x_i)>\pi_B(x_i)$ 时, $VE(A)>VE(B)$.

定理 1 已知 $x=[t_x, 1-f_x]$, 令 $VE(x)=\frac{1-|t_x-f_x|+2\pi_x}{2-|t_x-f_x|+\pi_x}$, 则 $VE(x)$ 是满足定义 4 的 Vague 值 x 的模糊熵.

证明: (1) $VE(x)=0 \Leftrightarrow 1-|t_x-f_x|+2\pi_x=0$, 从而有 $x=[0,0]$ 或 $x=[1,1]$. (2) $VE(x)=1 \Leftrightarrow 1-|t_x-f_x|+2\pi_x=2-|t_x-f_x|+\pi_x \Leftrightarrow \pi_x=1$, 于是 $t_x=f_x=0$, 从而 $x=[0,1]$. (3) 由定义易得. (4) 若 $\pi_x=\pi_y \neq 0$, 当 $|t_x-f_x|>|t_y-f_y|$ 时, 有 $VE(x)-VE(y)=\frac{(\pi_x-1)(|t_x-f_x|-|t_y-f_y|)}{(2-|t_x-f_x|+\pi_x)(2-|t_y-f_y|+\pi_y)}<0$, 于是 $VE(x)<VE(y)$. (5) 若 $|t_x-f_x|=|t_y-f_y| \neq 0$, 则 $\pi_x>\pi_y$ 时, 有 $VE(x)-VE(y)=\frac{(3-|t_x-f_x|)(\pi_x-\pi_y)}{(2-|t_x-f_x|+\pi_x)(2-|t_y-f_y|+\pi_y)}>0$, 于是 $VE(x)>$

$$VE(y).$$

定理 2 已知设 $A=\sum_{i=1}^n[t_A(x_i), 1-f_A(x_i)]/x_i$, 令 $VE(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nVE(x_i)$, 则 $VE(A)$ 是满足定义 4 的 Vague 集 A 的模糊熵.

对于例 1, 利用本文给出的模糊熵计算公式计算可得 $VE(x)=0.375, VE(y)=0.41$; 对于例 2, 利用本文给出的模糊熵计算公式计算可得 $VE(x)=0.5, VE(y)=0.75$. 它克服了已有算法的不足, 计算结果符合客观实际.

结束语 本文指出了现有 Vague 集模糊熵定义存在的不足和缺陷^[3-6], 并分析了存在这种不足的根本原因. 给出了 Vague 集模糊熵的公理化定义, 提出了一种 Vague 集的新模糊熵, 并通过实例说明了其合理性和有效性.

参考文献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inform and Control, 1965, 8: 338-356
- [2] Gau Wen-lung, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614
- [3] 黄国顺, 刘云生. 关于 Vague 集的模糊熵[J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(33): 48-50
- [4] 朱六兵, 杨斌, 陈纪东. Vague 集模糊熵的构造方法研究[J]. 模式识别与人工智能, 2006, 19(14): 481-488
- [5] 李天志, 梁家荣, 范平, 等. Vague 集的模糊熵[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(10): 93-95
- [6] 范平, 梁家荣, 李天志. Vague 集的新模糊熵[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(13): 179-181
- [7] 范九伦. Vague 集上模糊熵的几点注记[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(4): 105-110
- [8] 科学, 2009, 36(1): 171-176
- [9] Xu Yang, Ruan Da, Kerre E E, et al. α -resolution principle based on lattice-valued propositional logic $LP(X)$ [J]. Information Sciences, 2000, 130(4): 195-222
- [10] Xu Yang, Ruan Da, Kerre E E, et al. α -resolution principle based on first-order lattice-valued logic $LF(X)$ [J]. Information Sciences, 2001, 132(4): 221-239
- [11] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20-27
- [12] 周平, 姜明, 孙西芃. 格值一阶逻辑系统 $LF(X)$ 中带广义量词的 α 归结原理[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(5): 10-15
- [13] 夏世芬, 秦应兵, 徐扬. 格值命题逻辑系统中基于滤子的 MP 归结演绎[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(1): 1-5
- [14] 李晓冰, 邱小平, 徐扬. 格值命题逻辑系统 $L_{2n+1}P(X)$ 中基于半正则广义文字的自动推理算法[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(4): 21-26
- [15] 徐扬, 秦克云. 格值命题逻辑(I)[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 123-128
- [16] 秦克云, 徐扬. 格值命题逻辑(II)[J]. 西南交通大学学报, 1994, 29(2): 22-27
- [17] 张家锋, 徐扬. 格值命题逻辑系统 $LP(X)$ 中一类子句集的语义归结方法[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2010, 29(5): 767-770
- [1] Robinson J P. A machine-oriented logic based on the resolution principle[J]. Journal of ACM, 1965, 12(1): 23-41
- [2] 刘叙华, 姜云飞. 定理机器证明[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 84-91
- [3] 刘叙华. 一种新的语义归结原理—IDI-归结[J]. 吉林大学学报, 1978, 23(2): 112-117
- [4] 刘叙华, 肖红. 算子 Fuzzy 逻辑和 λ -归结方[J]. 计算机学报, 1989, 12(2): 81-91
- [5] 潘正华. 中介谓词逻辑系统的 λ -归结[J]. 软件学报, 2003, 14(3): 345-349
- [6] Guller D. On the refutational completeness of signed binary resolution and hyper-resolution[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(8): 1162-1176
- [7] Komendantskaya E. Sound and Complete SLD-Resolution for Bi-lattice-Based Annotated Logic Programs[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2009, 225(10): 141-159
- [8] 闫林, 刘清, 庞善起. 基于粒语义推理的粒归结研究[J]. 计算机

(上接第 203 页)

泛的广义子句集上的 α -语义归结方法以及设计有效的归结自动推理算法将是下一步的工作.

参考文献