

无向图语言

师海忠

(西北师范大学数学与信息科学学院 兰州 730070)

摘要 无向图是图论中的基本概念,图半群是1991年提出的一个概念,形式语言与自动机理论是计算机科学与技术科学的重要基础理论。借助无向图和图半群,提出了无向图语言的概念,并研究了无向图语言的一个子类——平面图语言,给出了如下结论:一个无向图语言是平面图语言当且仅当它不包含 K_5 语言或 $K_{3,3}$ 语言的剖分图语言。另外提出了几个开问题,其中之一是无向图语言与正则语言、上下文无关语言、上下文有关语言以及短语结构语言有何关系?

关键词 无向图,图半群,无向图语言,平面图语言

中图法分类号 TP301.2 **文献标识码** A

Undirected Graph Languages

SHI Hai-zhong

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract Undirected graph is a elementary concept of graph theory. Graph semigroup is a concept proposed in 1991. A concept of undirected graph language was proposed with undirected graph and graph semigroup. Furthermore, a subclass of undirected graph language, plane graph language was studied. It is proved that a graph language is a plane graph language if and only if it contains no subdivision graph language of K_5 language or $K_{3,3}$ language. In addition, four open problems were proposed. One of them: what is the relations between undirected graph language and regular language, context free language, context sensitive language, phrase structure language, respectively.

Keywords Undirected graph, Graph semigroup, Undirected graph language, Plane graph language

1 引言

形式语言与自动机理论是计算机科学与技术学科的重要基础理论。对语言的研究包括3个方面,即语言的表示、语言是否存在有穷描述以及语言的结构。用文法作为相应语言的有穷描述,不仅可以描述出语言的结构特征,而且可以产生这个语言的所有句子^[10,13]。Petri网是德国学者C. A. Petri于1962年在其博士论文中首次提出的一种自动机模型。由Petri网产生的一类形式语言称为Petri网语言。Petri网语言是Petri网络理论的重要组成^[4,5,11]。图是图论的一个基本概念^[6]。它是为证明图的重构猜想而提出的一个概念^[2,3,6-9,12,14],图半群把无向图和半群联系起来^[2,3]。本文通过图半群这座桥梁把无向图和语言联系起来。由无向图借助于图半群产生的语言称为无向图语言。无向图是无向图语言的一种有穷描述,不仅可以描述无向图语言的结构特征,而且可以产生相应无向图语言的所有句子。研究了无向图语言是平面图语言当且仅当不包含 K_5 语言或 $K_{3,3}$ 语言的剖分图语言。本文第2节介绍无向图语言,第3节介绍平面图语言;最后是结束语。

2 无向图语言

为了给出无向图语言的概念,我们先介绍图半群的概念^[2,3]。本节最后提出几个开问题。

念^[2,3]。本节最后提出几个开问题。

2.1 无向图与图半群

定义1 无向图是一个二元组 (V, E) ,其中集合 V 称为顶点集,集合 E 是 V 中元素组成的某些无序对的集合,称为边集。

下面给出图半群的概念。

定义2^[2,3] 设 V 是非空有限字母表, F_V 是 V 上的自由半群, F_V^* 表示 V 上的自由幺半群, $V^2 = \{uv \in F_V \mid u, v \in V\}$, $E \subseteq V^2$,且若 $uv \in E, \bar{E} = V^2 - E, F_V$ 关于理想 $F_V^* \bar{E} F_V^*$ 的Rees同余记为 ρ_E ,则称商半群 F_V / ρ_E 为有顶点集 V 和边集 E 的图半群,简称图半群,记为 F_V / ρ_E 。 V 中字母称为图半群 F_V / ρ_E 的顶点, V 称为 F_V / ρ_E 的顶点集, E 中元素称为 F_V / ρ_E 的半边。若 $uv \in E$,则称 $\{uv, vu\}$ 为 F_V / ρ_E 的边, $CardV$ 和 $CardE$ 分别记为 F_V / ρ_E 的顶点数和半边数。

命题1^[3] 设 F_V / ρ_E 是图半群,则 $E = V^2 - \bar{E}$,且 F_V / ρ_E 也是有顶点集 V 和边集 \bar{E} 的图半群。

称 F_V / ρ_E 是 F_V / ρ_E 的余图半群,显然 F_V / ρ_E 也是 F_V / ρ_E 的余图半群。

定义3^[3] 一个拟简单图 G 是一个二元组 $(V(G), E(G))$ 。其中 $V(G)$ 是非空有限集, $E(G)$ 是 $V(G)$ 中某些元素的无序对组成的有限集。 $V(G)$ 中的元素称为 G 的顶点, E

到稿日期:2010-07-16 返修日期:2010-12-15 本文受甘肃省自然科学基金(ZS991-A25-017-G)资助。

师海忠(1962—),男,博士,副教授,主要研究方向为形式语言与自动机理论、互连网络理论、组合优化、图半群等,E-mail: haizhong.shi@163.com.

(G)中的元素称为G的边。

定义 4^[3] 称图半群 F_V/ρ_E 是拟简单图 G 的图半群, 如果 $V=V(G)$ 且 $E=\{v_i v_j \in F_V \mid (v_i, v_j) \in E(G)\}$ 。

定义 5^[3] 称拟简单图 G 是图半群 F_V/ρ_E 的图, 如果 $V(G)=V$ 且 $E(G)=\{(v_i, v_j) \mid v_i v_j \in E\}$ 。

命题 2^[2] 图半群和拟简单图是相互唯一确定的。

特别地, 若 $E=\emptyset$ (\emptyset 为空集), 则称 F_V/ρ_E 是平凡图半群。若 $E=V^2$, 则称 F_V/ρ_E 为拟完全图半群。若 F_V/ρ_E 是非拟完全图半群, 那么存在 $v_i v_j \in \bar{E}$, $v_i v_j$ 所在同余类记为 0, 显然 $0 \in F_V/\rho_E$ 。

性质 1^[3] 设 F_V/ρ_E 是非拟完全图半群, 则 F_V/ρ_E 中, 有 0, 且对任意 $f(\rho_E) \in F_V/\rho_E$, 有 $0f(\rho_E)=f(\rho_E)0=0$ 。

2.2 图半群语言和无向图语言

下面引入图半群语言和无向图语言的概念。

定义 6 设 F_V/ρ_E 是图半群, 则称语言 $\{f \in F_V \mid f(\rho_E) \in F_V/\rho_E \text{ 且 } f(\rho_E) \neq 0\}$ 为图半群语言, 记为 $L(F_V/\rho_E)$ 。

定义 7 设 G 是拟简单图, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则称图半群语言 $L(F_V/\rho_E)$ 为无向图语言, 记为 $L(G)$ 。V 和 E 分别称为无向图语言 $L(G)$ 的顶点和半边集; $CardV$ 和 $CardE$ 分别称为 $L(G)$ 的顶点数和半边数, 无向图 G 称为 $L(G)$ 的图形表示。

下面举几个图语言的例子。

例 1 G 为 n 个顶点的空图, $V(G)=\{1, 2, \dots, n\}$, $E(G)=\emptyset$, G 的图半群 $F_V/\rho_E=\{1(\rho_E), 2(\rho_E), 3(\rho_E), \dots, n(\rho_E), 0\}$, $L(G)=\{1, 2, \dots, n\}$, 称为空图语言。特别地, $n=1$ 时, G 为平凡图, 设 $V(G)=\{1\}$, 那么 $E(G)=\emptyset$, 则 G 的图半群为 $F_V/\rho_E=\{1(\rho_E), 0\}$, 无向图语言 $L(G)=\{1\}$, 称为平凡图语言。

例 2 G 为有一个顶点和一条边(有环)的图, 即 $V(G)=\{1\}$, $E(G)=\{(1, 1)\}$, 则 G 的图半群为 $F_V/\rho_E=\{1(\rho_E), 1^2(\rho_E), 1^3(\rho_E), \dots\}$, 无向图语言 $L(G)=\{1^n \mid n \in N\}$, 其中 N 为自然数集。

例 3 K_5 为 5 个顶点的完全无向图, $V(K_5)=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E(K_5)=\{(i, j) \mid i, j \in V(K_5) \text{ 且 } i \neq j\}$, 则无向图语言 $L(K_5)$ 称为 K_5 语言。 $L(K_5)$ 的图形表示如图 1(a) 所示。

例 4 $K_{3,3}$ 为 6 个顶点的完全无向二部分图 ($\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\}$), 无向图语言 $L(K_{3,3})$ 称为 $K_{3,3}$ 语言。 $L(K_{3,3})$ 的图形表示如图 1(b) 所示。

例 5 两个顶点的完全无向图 K_2 , $V(K_2)=\{1, 2\}$, $E(K_2)=\{(1, 2)\}$, K_2 的图半群为 $F_V/\rho_E=\{0, 1(\rho_E), 2(\rho_E), (12)^n(\rho_E), (21)^m(\rho_E), (12)^p 1(\rho_E), (21)^q 2(\rho_E) \mid m, n, p, q \in N\}$, 无向图语言 $L(K_2)=\{1, 2, (12)^n, (21)^m, (12)^p 1, (21)^q 2 \mid m, n, p, q \in N\}$ 。 $L(K_2)$ 的图形表示如图 1(c) 所示。

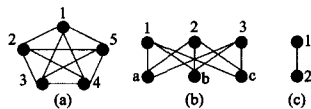


图 1 无向图语言的有穷描述

显然, 图 1(a), (b), (c) 分别是无向图语言 $L(K_5)$, $L(K_{3,3})$, $L(K_2)$ 的有穷描述。

命题 3 顶点集为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的无向图语言共有 $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 种。

证明: 该无向图语言的边有如下 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 条:

$11, 12, 13, \dots, 1n$

$22, 23, \dots, 2n$

...

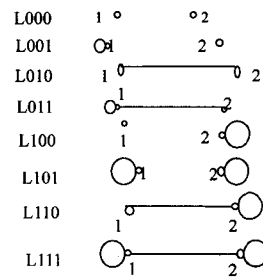
nm

组成无向图语言的边集时, 每条边有两种可能: 要么选入这条边, 要么不选这条边。故组成的边集共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 种,

选入这条边用 1 来表示, 不选这条边用 0 来表示, 而 $\frac{1}{2}n(n+1)$

这条从左到右确定了 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个位置。 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 位二进制数从低位到高位, 每一个二进制数决定一个边集, 故共有 $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 种语言分别用这个二进制数来表示。

推论 1 顶点集为 $\{1, 2\}$ 的无向图语言共有 8 种, 具体如下:



我们提出两个开问题:

开问题 1 无向图语言与正则语言、上下文无关语言、上下文有关语言以及短语结构语言有何关系?

开问题 2 无向语言与有限状态机、栈自动机、线性界限自动机以及图灵机有何关系?

3 平面图语言

定义 8 一个图半群 F_V/ρ_E 称为是平面图半群, 如果 F_V/ρ_E 的图能画在平面上使得它的边仅在端点相交。

定义 9^[6] 一个无向图称为是平面图, 如果该无向图能画在平面上使得它的边仅在端点处相交。

命题 4 i) 如果 G 是一个拟简单图, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则 F_V/ρ_E 是平面图半群当且仅当 G 是平面图;

ii) 如果 F_V/ρ_E 是一个图半群, G 是 F_V/ρ_E 的图, 则 F_V/ρ_E 是平面图半群当且仅当 G 是平面图。

设 F_V/ρ_E 是一个平面图半群, G 是 F_V/ρ_E 的图, 则 G 一定是平面图, G 的面数 $\Phi(G)$ 称为 F_V/ρ_E 的面数, 记为 $\Phi(F_V/\rho_E)$ 。显然, $\Phi(F_V/\rho_E)=\Phi(G)$ 。

定义 10 设 F_V/ρ_E 是一个图半群, $L(F_V/\rho_E)$ 是 F_V/ρ_E 的语言, 如果 F_V/ρ_E 是平面图半群, 则称 $L(F_V/\rho_E)$ 为平面图半群语言, 记为 $LP(F_V/\rho_E)$ 。

设 F_V/ρ_E 是一个平面图半群, G 是 F_V/ρ_E 的图。 F_V/ρ_E 的面数 $\Phi(F_V/\rho_E)$ 称为平面图语言 $LP(F_V/\rho_E)$ 的面数, 记为 $\Phi(LP(F_V/\rho_E))$ 。显然, $\Phi(LP(F_V/\rho_E))=\Phi(F_V/\rho_E)=\Phi(G)$ 。

定义 11 设 G 是一个拟简单图, 如果 G 是平面图, 则称图语言 $L(G)$ 是平面图语言, 记为 $LP(G)$ 。

易知, 推论 1 中描述的 8 种语言均是平面图语言。

命题 5 设 G 是一个拟简单图, 如果 F_V/ρ_E 是 G 的平面图半群, 则图半群语言 $L(F_V/\rho_E)$ 是平面图半群语言当且仅当无向图语言 $L(G)$ 是平面图语言。

设 G 是一个平面图, 则 G 的面数称为平面图语言 $LP(G)$ 的面数, 记为 $\Phi(LP(G))$ 。显然, $\Phi(LP(G)) = \Phi(G)$ 。

定义 12^[9] 设 F_V/ρ_E 是一个图半群, 对任意 $u, v \in V$, 称 u 和 v 在 F_V/ρ_E 中连通, 如果存在 $f(\rho_E) \in F_V/\rho_E$ 满足:

- i) $f(\rho_E) = v_i_1 v_i_2 \cdots v_i_k(\rho_E)$, 其中 $v_i_j \in V, j = 1, 2, \dots, k$;
- ii) $f(\rho_E) \neq 0$ (如果 F_V/ρ_E 中有 0);
- iii) $v_i_1 = u, v_i_k = v$ 。

进而称 $f(\rho_E)$ 为 F_V/ρ_E 中的 (u, v) 连通元。

定义 13 设 F_V/ρ_E 是一个图半群, 如果对任意 $v_i, v_j \in V, v_i$ 和 v_j 在 F_V/ρ_E 中是连通的, 则称 F_V/ρ_E 为连通的图半群。

命题 6^[9] 设 G 是一个拟简单图, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则 F_V/ρ_E 是连通图半群当且仅当 G 是连通图。

定义 14 设 F_V/ρ_E 是一个图半群, 如果 F_V/ρ_E 是连通的图半群, 则称图半群语言 $L(F_V/\rho_E)$ 为连通图半群语言, 记为 $LC(F_V/\rho_E)$ 。

定义 15 设 G 是一个拟简单图, 如果 G 是连通图, 则称图语言是连通图语言, 记为 $LC(G)$ 。

由命题 6 知:

命题 7 设 G 是一个拟简单图, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则称图半群语言 $L(F_V/\rho_E)$ 是连通图半群语言当且仅当无向图语言 $L(G)$ 是连通图语言。

定理 1^[6] 设 G 是一个平面图, 则

$$v - \epsilon + \Phi = 2$$

式中, v, ϵ 和 Φ 分别是 G 的顶点数、边数和面数。

由定理 1^[6]、命题 5、命题 6 以及命题 7 可得:

定理 2 设 G 是简单连通平面图, 则图语言 $L(G)$ 是简单连通平面图语言, $\text{Card}V - \frac{1}{2}\text{Card}E + \Phi(L(G)) = 2$ 。

式中, $\text{Card}V, \text{Card}E$ 和 $\Phi(L(G))$ 分别称为 $L(G)$ 的顶点数、半边数和面数。

定理 3^[6] 如果 G 是一个简单平面图, G 的顶点数 $v \geq 3$, 则

$$\epsilon \leq 3v - 6$$

式中, ϵ 是 G 的边数。

由定理 3、命题 5、命题 6 以及命题 7 立即可得:

定理 4 如果 G 是一个简单平面图, 则无向图语言 $L(G)$ 是简单平面图语言, 且 $\text{Card}E \leq 2(3\text{Card}V - 6)$ 。

式中, $\text{Card}E$ 和 $\text{Card}V$ 分别是 $L(G)$ 的半边数和顶点数。

证明: 设 v 和 ϵ 分别为简单平面图 G 的顶点数和边数, $\text{Card}V$ 和 $\text{Card}E$ 分别为简单平面图语言 $L(G)$ 的顶点数和半边数, 则 $\text{Card}V = v, \text{Card}E = 2\epsilon$ 。因此

$$\text{Card}E = 2\epsilon \leq 2(3v - 6) = 2(3\text{Card}V - 6)。$$

定义 16^[6] 设 F_V/ρ_E 是一个图半群, $v \in V$, 则 v 的度 $d_F(v)$ 就是 $\text{Card}\{vv_i \mid vv_i \in E\}$, 其中 $\text{Card}\{vv_i \mid vv_i \in E\}$ 就是集合 $\{vv_i \mid vv_i \in E\}$ 的基数。

我们记 Δ_F 和 δ_F 分别表示 F_V/ρ_E 中顶点的最大度和最小度。

定义 17 设 G 是一个拟简单图, $L(G)$ 是 G 的无向图语言, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则 $L(G)$ 的顶点 v 的度 $d_L(v)$ 定义为 F_V/ρ_E 的顶点 v 的度 $d_F(v)$ 。

我们记 Δ_L 和 δ_L 分别表示 $L(G)$ 中顶点的最大度和最小

度, Δ 和 δ 分别为 G 的最大度和最小度。

命题 8 设 G 是一个简单图, $L(G)$ 是 G 的无向图语言, F_V/ρ_E 是 G 的图半群, 则

- i) $\Delta_L = \Delta_F = \Delta$;
- ii) $\delta_L = \delta_F = \delta$ 。

定理 5^[6] 设 G 是一个简单平面图, 则 $\delta \leq 5$ 。

由定理 5^[6] 及命题 6, 我们有:

- 定理 6** i) 如果 F_V/ρ_E 是一个简单平面图半群, 则 $\delta_F \leq 5$;
- ii) 如果 $L(G)$ 是一个简单平面图语言, 则 $\delta_L \leq 5$ 。

定理 7^[6] K_5 是非平面图。

由命题 4 及命题 5 知:

命题 9 设 G 是一个拟简单图, $L(G)$ 是 G 的无向图语言, 则无向图语言 $L(G)$ 是平面图语言当且仅当 G 是平面图。

由定理 7 及命题 9 知:

定理 8 K_5 语言 $L(K_5)$ 是非平面图语言。

定理 9^[6] $K_{3,3}$ 是非平面图。

由定理 9 及命题 9 知:

定理 10 $K_{3,3}$ 语言 $L(K_{3,3})$ 是非平面图语言。

定义 18^[6] 设 e 是无向图 G 的一条边, e 称为被剖分, 是指删去它, 并换上一条连接它的两个端点而长为 2 的路, 该路的内部顶点是一个新顶点, 如图 2 所示。

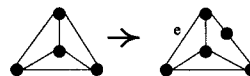


图 2 一条边的剖分

定义 19^[6] 无向图 G 的一个剖分图是指把 G 的边进行一系列剖分而得到的一个图。

K_4 的一个剖分图在图 3 中给出。

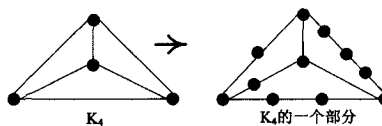


图 3 K_4 剖分图

定义 20 设 $L(G)$ 是一个无向图语言, 一个无向图语言 $L(G')$ 称为 $L(G)$ 的剖分图语言, 如果 G' 是 G 的剖分图。

定理 11^[6] 一个无向图是平面图当且仅当它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图。

由定理 11 及定义 20 知:

定理 12 一个无向图语言是平面图语言当且仅当它包含 K_5 语言或 $K_{3,3}$ 语言的剖分图语言。

平面图语言作为一种语言, 它与乔姆斯基谱系有什么关系呢? 我们提出以下开问题:

开问题 3 平面图语言与正则语言、上下文无关语言、上下文有关语言以及短语结构语言有何关系?

开问题 4 平面图语言与有限状态机、栈自动机、线性界线自动机以及图灵机有何关系?

结束语 对语言的研究, 主要包含 3 个方面:

首先, 如何给出一个语言的表示。


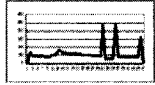

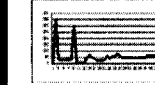

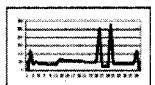


第二个问题是, 一个给定的语言是否存在有穷描述。

第三个问题是具有有穷表示的语言的结构是什么样的?

本文提出了两个概念——图半群语言和无向图语言。这

(下转第 274 页)

表2 相同数字不同字体的一维轮廓势能折线图相似度比较

Font	image	line chart	image	line chart
Times New Roman				
Black				

只对数字不同字体的轮廓势能具有较高的相似度是不够的,轮廓势能需要应用到其它领域,还需要进一步的实验证明。图6给出了一组具有5度偏转幅度的飞机3D模型,运用轮廓势能方法运算得到的图7(a)-(d)对应轮廓图6(c)、(f)、(i)、(l)具有的轮廓势能折线图。图7展现了具有微小偏转的同一目标的势能折线具有极大的相似度。轮廓势能可以有效识别出目标图像。

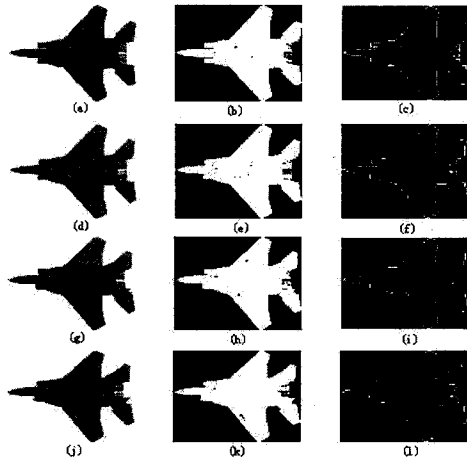


图6 有5度偏转的飞机模型和轮廓图

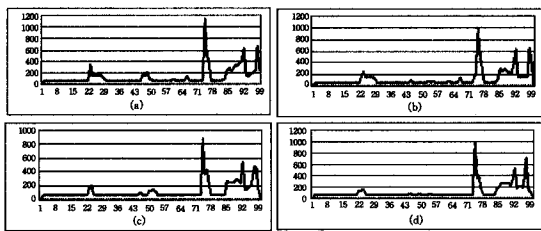


图7 相似度极大的势能折线图

(上接第261页)

两个概念在形式语言、图半群、图论以及字组合等学科之间架起了一座立交桥,以上这些理论通过这座立交桥可以相互渗透,共同发展。本文提出4个开问题,对这4个开问题的回答将会形成新的、有趣的研究课题。

参考文献

- [1] Du Ding-zhu, Ko Ker-I. Problem solving in Automata, languages and complexity[M]. New York: Wiley&Sons, 2001
- [2] 堵丁柱,师海忠. 图的可重构的充要条件[J]. 科学通报, 1997, 42(16): 1719-1721
- [3] 师海忠, 祁永谨. 图半群[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 1991, 27(2): 17-23
- [4] Peterson J. Petri Net Theory and the Modeling of Sciences[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981
- [5] Hack M. Petri Net languages [R]. Computation Structures Group Memo 124, Project MAC. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1975

结束语 经实验证明,势能理论是一种较好的目标特征提取和分类的方法。把势能理论应用到轮廓特征中,能有效区分不同种类目标,又能较好地抵抗由于目标图像发出平移、旋转、微偏转等不良因素带来的对识别率的影响。轮廓势能方法可广泛应用于航空、医疗、交通、军事领域关于图像处理的工作中。一维轮廓势能和二维轮廓势能分别适合应用到哪些类型的目标图像中,还有待进一步研究。

参考文献

- [1] 陈振学,刘成云,常发亮. 基于生物视觉显著性的车辆车型识别[J]. 计算机科学, 2010, 37(2): 207-208
- [2] Yi-fei Z, et al. Medical Image Retrieval Method Using Boundary Shape Feature[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2010, 31(1): 134-137
- [3] 周涛,张艳宁,袁和金. 基于聚类分析和集成神经网络的序列图像多目标识别算法[J]. 计算机科学, 2009, 36(3): 215-219
- [4] Yu Li, Wang Run-sheng. Shape Representation Based on Mathematical Morphology[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26: 1354-1363
- [5] Yu Li, Wang Run-sheng, Fangjian H. Shape Detection Based on Mathematical Morphology [J]. Optical Engineering, 2005, 44(12): 127-203
- [6] Gonzalez R C, Woods R E, Eddins S L, et al. Digital Image Processing Using MATLAB. 2004[M]. Prentice Hall: NJ, 2004
- [7] Xue-zhi W, et al. Improved Algorithm of Wavelet Feature Extraction and Its Application[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2009, 30(2): 336-340
- [8] Li Z, Li Y, Xiao L. The character characteristic extraction based on projection characterist and wavelet analysis[J]. Journal of Shandong Jianzhu University, 2007, 3(22): 247-251
- [9] Ping Z, Guangyao O. The signal characteristics extraction techniques based on fractal geometry and their applications[J]. Journal of Naval University of Engineering, 2001, 13(1): 1-7
- [10] Gonzalez R C, Woods R E, et al. Digital Image Processing (2nd ed)[M]. Prentice Hall: NJ, 2002
- [11] 雷宝权,杨丽华,程咏梅. 基于 SVM 与颜色/纹理组合特征的景物识别算法[J]. 计算机科学, 2009, 36(10): 274-276

- [6] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application[M]. New York: Elsevier, 1976
- [7] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory[M]. London: Academic Press, 1976
- [8] 师海忠. 图半群的度向量[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 1991, 27(4): 12-14
- [9] 师海忠. 完全图半群和连通图半群[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 1994, 30(4): 23-27
- [10] Hopcroft J, Ullman J. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation[M]. American: Addison-wesly Publishing Company, 1979
- [11] 蒋昌俊, 刘关俊. Petri 网语言的 Pumping 引理[J]. 计算机学报, 2006, 29(2): 274-278
- [12] Lallement G. Semigroups and Combinatorial Applications[M]. New York: John Wiley&Sons, 1979
- [13] 蒋宗礼, 姜守旭. 形式语言与自动机理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003
- [14] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009