

基于 Petri 网的顺序资源分配系统活性的一个性质

岳 昊

(漳州师范学院计算机科学与工程系 漳州 363000)

摘 要 具有多资源需求和柔性加工路径的顺序资源分配系统(Sequential Resource Allocation Systems with Multiple Resource Acquisitions and Flexible Routings, C/D-RAS)是一类较复杂的、更为一般的资源分配系统。考察了两个与 C/D-RAS 密切相关的活性问题。借助这两个 C/D-RAS 的 Petri 网模型来定义标识 S^3PGR^2 网对 $((N_1, M_{01}), (N_2, M_{02}))$, 由标识 S^3PGR^2 网中资源种类、数量的守恒性和变迁使能的一个充分必要条件, 证明 (N_1, M_{01}) 和 (N_2, M_{02}) 的合法变迁发生序列是一致的, 据此得出的最终结论是 (N_1, M_{01}) 和 (N_2, M_{02}) 具有相同的活性。最后, 简要提及本结论的应用。

关键词 Petri 网, 资源分配系统, 活性

Property of Liveness in Sequential Resource Allocation Systems Based on Petri Net

YUE Hao

(Department of Computer Science and Engineering, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract Sequential Resource Allocation Systems with Multiple Resource Acquisitions and Flexible Routings (C/D-RAS) are a kind of common system with higher complexity. The liveness problems of two C/D-RAS were investigated in this paper. The Petri net models of the two C/D-RAS were defined as the marked S^3PGR^2 nets pair, which is denoted by $((N_1, M_{01}), (N_2, M_{02}))$. With the help of the resource conversation attribute of the marked S^3PGR^2 nets and a sufficient and necessary condition of transition enabling, it was proved that the legal firing sequences of transitions in (N_1, M_{01}) and (N_2, M_{02}) are consistent. As a result, the final conclusion tells us that (N_1, M_{01}) is live, if and only if (N_2, M_{02}) is live. Finally, the potential application of the conclusion was briefly introduced.

Keywords Petri net, Resource allocation systems, Liveness

1 引言

顺序资源分配系统(Sequential Resource Allocation Systems, S-RAS)的活性问题是离散事件系统理论中的一个重要问题, 近年来备受关注^[1-7]。人们可以选用多种形式化方法来解决这个问题, 如 Petri 网(Petri net, PN)、有限自动机、有向图, 其中 PN 方法因为能用一种模块化和系统的方法来描述所建模系统操作的不同方面和多种特征而成为流行、应用广泛的数学工具^[1]。

基于资源分配需求结构, 文献[2]提及对 S-RAS 分类的方法。S-RAS 被分为 4 类: i) 单个(single-unit SU) S-RAS; ii) 单类型(single-type ST) S-RAS; iii) Conjunctive(C) RAS; iv) Conjunctive / Disjunctive(C/D) RAS, 以下简称 C/D-RAS。其中, C/D-RAS 就是具有多资源需求和柔性加工路径的顺序资源分配系统(Sequential Resource Allocation Systems with Multiple Resource Acquisitions and Flexible Routings, C/D-RAS), 是一类更复杂的、更为一般的资源分配系统。事实上, 在 C/D-RAS 中, 每一个工件的每一个加工处理过程(或称操作)都可能需要多个多种类型的资源。

由于 C/D-RAS 的复杂性, 因此目前学术界对于其活性问题的研究所做的工作较少。已有的研究结果包括的文献[2]提出 C/D-RAS Petri 网模型 S^3PGR^2 网的一个多项式时间复杂度的死锁避免策略; 文献[3]针对 C/D-RAS 的 Petri 网模型 S^3PR 网, 引入一个活性特征, 并且设计出一个可以成功禁止死锁相关状态的迭代方法。在系统 Petri 网模型中, 信标的可控制性同系统活性使能监督控制器的设计存在密切关系。文献[4]将 S^3PR 网中基本信标^[5]的相关理论推广至 S^3PGR^2 网中, 讨论了 S^3PGR^2 网中信标的可控制性。

本文研究对象是两个具有一定关系的标识 S^3PGR^2 网 C/D-RAS Petri 网模型 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_1$ 与 $\mathcal{N}_2$ 具有相同的操作库所和变迁, $\mathcal{N}_2$ 具有较多的资源库所、较复杂的网结构和较大的网规模。我们证明了 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 具有相同的活性。

2 基本概念和定义

假设读者对 Petri 网的基本概念、基本理论、C/D-RAS 及其 Petri 网模型标识 S^3PGR^2 网已有所了解, 详细内容请参见文献[2]。下面只给出同本文密切相关的一些基本概念和定义。

到稿日期: 2010-05-02 返修日期: 2010-10-13 本文受国家自然科学基金项目(60673053), 福建省教育厅资助科技项目(JK2010037)资助。

岳 昊(1980—), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为制造系统控制与优化调度、智能交通运输系统、信息安全、Petri 网理论与应用, E-mail: yuehao_1980@126.com。

2.1 Petri 网基本概念与相关术语

四元组 $\mathcal{N}=(P, T, W, M_0)$ 称为一个加权 Petri 网, 其中 P 是库所集, T 是变迁集, $W: (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ 是流关系, $N=(P, T, W)$ 是基网, $M_0: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ 是网的初始标识, 标识 M 可用一个 $|P|$ (其中符号 $|$ 表示求取集合中元素的个数) 维非负整数向量表示, $M(p)$ 表示在标识 M 下库所 p 中的标记 (token) 数。

定义 $|P|$ 行、 $|T|$ 列的整数矩阵 $A=A^+-A^-$ 为 $\mathcal{N}$ 的关联矩阵, 其中 $A^+(p, t)=W(t, p)$, $A^-(p, t)=W(p, t)$ 。

$M[t >]$ 表示变迁 t 在标识 M 下是使能的, $R(N, M)$ 表示所有能从 M 可达的标识之集。

给定变迁发生系列 $\sigma \in T^*$ (其中 T^* 表示变迁集 T 的闭包), 称 $|T|$ 维非负整数向量 X 为 σ 的发生数向量, 其中 $\#(t_i / \sigma) = X(i)$, $i=1, 2, \dots, |T|$, 即 X 中的第 i 个分量等于 t_i 在 σ 中出现的次数。

$\mathcal{N}=(P, T, W, M_0)$ 为一个加权 Petri 网, M_0 为初始标识, $t \in T$ 。如果对任意 $M \in R(N, M_0)$, 都存在 $M' \in R(N, M)$, 使得 $M'[t >]$, 则称变迁 t 为活的。如果每个 $t \in T$ 都是活的, 则称 $\mathcal{N}$ 为活的 Petri 网, 或称 Petri 网 $\mathcal{N}$ 为活的。

2.2 C/D-RAS 及其 Petri 网模型

C/D-RAS 包含 m 种不同的资源, 其类型集记为 $R=\{r_i, i=1, 2, \dots, m\}$ 。系统资源的容量都有限, 每一类资源的容量是一个整数。系统可以加工 n 种不同类型的工件, 工件类型集为 $Q=\{q_j, j=1, 2, \dots, n\}$ 。每一种类型的工件可能有多于一条的加工路径, 并且可以在加工过程中选择加工路径。

一个 q_j 类型工件的一条加工路径 w_{ji} 是由 s 个加工处理过程 (或称操作) 组成的, 操作序列为 $w_{ji} = v_{j0} v_{j1} v_{j2} \dots v_{js} v_{j0}$ 。除了操作 v_{j0} 以外, 每一个操作需要若干种类型的资源, 每一种类型的资源需要若干个单位。 v_{jk} 为第 k 个操作, $k=1, 2, \dots, s$, 这个操作的资源需求情况用一个以集合 R 为序标的 m 维非负整数向量 $a_{v_{jk}}$ 来表达, 其中 $a_{v_{jk}}[r_u]$ (或记为 $a_{v_{jk}}[u]$) 记录了操作 v_{jk} 需要多少个单位的 r_u 类型的资源, $u=1, 2, \dots, m$ 。 v_{j0} 是为了建模方便而增加的虚拟操作, 每一种类型的工件只有一个虚拟操作, 表示工件在等待加工开始或已完成所有加工操作。虚拟操作不需要任何类型的资源, 为了统一记号以方便说明问题, 对于 v_{j0} , 记 $a_{v_{j0}} = \vec{0}$ (m 维全 0 向量)。

沿用文献 [2] 中的相关定义, C/D-RAS 的 Petri 网模型就是加权 Petri 网:

$$\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)=(N, M_0)$$

它被称为具有一般资源需求的简单顺序加工进程系统 (System of Simple Sequential Processes with General Resource Requirement), 简记为标识 S^3PGR^2 网。其中, R 是为资源建模的资源库所组成的集合, 称为资源库所集或资源集。操作库所集 P_S 是为操作建模的库所组成的集合, P_0 是为虚拟操作建模的进程空闲库所组成的集合。

对于 $p \in (P_S \cup P_0)$, 若 p 为之建模的操作或虚拟操作是 v , 则记号 a_p 表示 v 的资源需求情况, 即 $a_p = a_v$ 。事实上, a_p 也是一个以集合 R 为序标的 m 维非负整数向量。对于 $\forall r \in R$, $a_p[r] = a_v[r]$ 记录了操作 v 需要多少个单位的 r 类型的资源。

T 中变迁的发生表示工件加工处理过程的推进。具体来说, 每个变迁的引发对应于相应工件前一个操作的完成和下

一个操作的开始。

$$W=W_S \cup W_R$$

式中, $W_S: ((P_S \cup P_0) \times T) \cup (T \times (P_S \cup P_0)) \rightarrow \{0, 1\}$ 。

为系统中的工件加工路径 (工作流逻辑) 建模, $W_R: (P_R \times T) \cup (T \times P_R) \rightarrow Z^+ \cup \{0\}$ (其中 Z^+ 为正整数集) 为系统中的工件对资源的利用与释放建模。 M_0 为初始标识, 表示系统的初始状态。

性质 1^[2] $\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)=(N, M_0)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网, $t \in T$, 则 $|t \cap (P_S \cup P_0)| = 1$, $|t' \cap (P_S \cup P_0)| = 1$ (其中符号 $|$ 表示求取集合中元素的个数)。

定义 1 $\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)=(N, M_0)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网, $t \in T$, 由性质 1 知 $|t \cap (P_S \cup P_0)| = 1$, $|t' \cap (P_S \cup P_0)| = 1$, 因此不妨设 $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t' \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$ 。对于 $\forall M \in R(N, M_0)$, 若 $M(p_1) \geq 1$, 则称 t 在标识 M 下是操作使能的; 若 $\forall r \in t \cap R$, 有 $M(r) \geq W(r, t)$, 则称 t 在标识 M 下是资源使能的。

性质 2 $\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)=(N, M_0)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网, $t \in T$, $M \in R(N, M_0)$, 则 t 在标识 M 下是使能的, 当且仅当 t 在标识 M 下同时是操作使能的和资源使能的。

3 标识 S^3PGR^2 网对其性质

$\mathcal{N}$ 是一个 C/D-RAS Petri 网模型标识 S^3PGR^2 网, $\mathcal{N}$ 中的一个变迁 t 如图 1 所示。

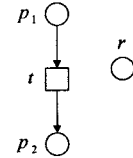


图 1 引理 1 示意图

设 t 前集中的操作库所为 p_1 , 后集中的操作库所为 p_2 (p_1 和 p_2 也可能是进程空闲库所), 若 r 是 t 前集中的任意一个资源库所, 则有 $a_{p_2}[r] > a_{p_1}[r]$; 若 r 不是 t 前集中的资源库所, 则有 $a_{p_2}[r] \leq a_{p_1}[r]$ 。也就是说, 对于系统中的任意一个资源 r , $a_{p_2}[r] > a_{p_1}[r]$ 当且仅当 r 在 t 的前集之中。下面用引理的形式量化地描述 p_1 与 p_2 的资源需求情况。引理的依据是标识 S^3PGR^2 网对资源利用与释放的建模规则, 读者不难理解引理的正确性, 因而我们没有给出形式化证明。

引理 1 一个标识 S^3PGR^2 网 $\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)$, $t \in T$, $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t' \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$, 则

$$\begin{cases} a_{p_2}[r] = a_{p_1}[r] + W(r, t), & \text{若 } r \in t \cap R \text{ (情况 1)} \\ a_{p_1}[r] = a_{p_2}[r] + W(t, r), & \text{若 } r \in t' \cap R \text{ (情况 2)} \\ a_{p_2}[r] = a_{p_1}[r], & \text{若 } r \in R \setminus (t \cup t') \text{ (情况 3)} \end{cases}$$

在 C/D-RAS 运行过程中, 系统中的资源既不会减少, 也不会增多, 只可能因为被正在加工处理的工件占用, 而暂时不能被其它的工件得到。因而系统中资源的种类是不变的, 每一种资源的数量也都是恒定的。我们用下面的引理形式化地说明这个事实, 读者不难理解其正确性, 故在此略去证明过程。

引理 2 $\mathcal{N}=(P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0)=(N, M_0)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网, 其中 N 是其基网, $M \in R(N, M_0)$ 是一个可

达标识,则对于 $\forall r \in R$, 有 $M_0(r) = M(r) + \sum_{p \in P_S \cup P_0} (a_p[r]M(p))$ 。

下面的引理 3 给出标识 S^3PGR^2 网中变迁使能的一个充分必要条件。

引理 3 $\mathcal{N} = (P_S \cup P_0 \cup R, T, W, M_0) = (N, M_0)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网, 其中 N 是其基网, $M \in R(N, M_0)$ 是一个可达标识, $t \in T$, $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$, 则 $M[t >]$ (即 t 在 M 下可以发生), 当且仅当 $M(p_1) \geq 1$, 且对于 $\forall r \in R$, 有 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$ 。

证明: ($\Rightarrow$) 已知 $M[t >]$, 对于 $\forall r \in R$, 分 3 种情况讨论。

1) 若 $r \in t \cap R$, 则由 $M[t >]$, 知 $M(r) \geq W(r, t)$, 故 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq W(r, t) + a_{p_1}[r]$ 。由引理 1 的情况 1 知, 上式右端等于 $a_{p_2}[r]$, 因此 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$ 。

2) 若 $r \in t \cap R$, 则由引理 1 的情况 2 知, $a_{p_1}[r] = a_{p_2}[r] + W(t, r)$, 因此亦有 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$ 。

3) 若 $r \in R \setminus (t \cap R)$, 则由引理 1 的情况 3 知, $a_{p_1}[r] = a_{p_2}[r]$, 同样有 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$ 。

($\Leftarrow$) 已知对于 $\forall r \in R$, 有 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$, 又由引理 1 的情况 1 知, 对于 $\forall r \in t \cap R$, $a_{p_2}[u] = a_{p_1}[u] + W(r, t)$, 因此, 对于 $\forall r \in t \cap R$, 有 $M(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r] = a_{p_1}[r] + W(r, t)$, 故 $M(r) \geq W(r, t)$, t 是资源使能的, 结合 $M(p_1) \geq 1$ 知 $M[t >]$ 。

定义 2 考察两个 C/D-RAS, 它们分别对应两个标识 S^3PGR^2 网 $\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup R_1, T, W_1, M_{01}) = (N_1, M_{01})$ 和 $\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (R_1 \cup R_2), T, W_2, M_{02}) = (N_2, M_{02})$, 其中 $\mathcal{N}_1$ 的资源集为 R_1 , $\mathcal{N}_2$ 的资源集为 $(R_1 \cup R_2)$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ 。对于任意一个操作 $p \in P_S \cup P_0$, a_p 是一个以 R_1 为序标的非负整数向量, 表示在 $\mathcal{N}_1$ 中 p 的资源需求情况; $\hat{a}_p$ 是一个以 $(R_1 \cup R_2)$ 为序标的非负整数向量, 表示在 $\mathcal{N}_2$ 中 p 的资源需求情况。 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 满足以下条件:

1) $\forall p \in P_S \cup P_0, \forall t \in T$, 有 $W_2(p, t) = W_1(p, t)$, $W_2(t, p) = W_1(t, p)$ 。这说明两个系统的工件加工路径(工作流逻辑)是相同的。

2) 存在一个从 R_2 到 R_1 的一一对应的映射(即双射) $f: R_2 \rightarrow R_1$, 使得对于 $\forall p \in P_S \cup P_0$, 有

$$\begin{cases} \hat{a}_p[r] = a_p[r], & \text{若 } r \in R_1 \\ \hat{a}_p[r] \leq a_p[f(r)], & \text{若 } r \in R_2 \end{cases}$$

3) 对于 $\forall p \in P_S \cup P_0$, 有

$$M_{02}(p) = \begin{cases} M_{01}(p), & \text{若 } p \in P_S \cup P_0 \cup R_1 \\ M_{01}(f(p)), & \text{若 } p \in R_2 \end{cases}$$

则称 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 为一个标识 S^3PGR^2 网对, 记为 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 。

例 1 见图 2 所示的网系统实例:

$$\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (P_W \cup P_R), T, W_2, M_{02}) = (N_2, M_{02})$$

它是采用文献[2]提出的 C/D-RUN 死锁避免策略而产生的 S^3PGR^2 网受控系统, 其中

$$P_S = \{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}\}$$

$$P_0 = \{p_{10}, p_{20}\}, P_W = \{w_1, w_2, w_3\}, P_R = \{r_1, r_2, r_3\}$$

T, W_2, M_{02} 如图 2 所示。

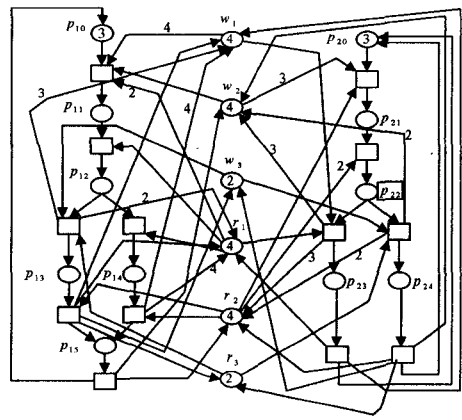


图 2 一个 S^3PGR^2 网 $\mathcal{N}_2$ (取自文献[2])

如文献[2]中所述, 若将 P_W 中的库所看成资源, 则 $\mathcal{N}_2$ 也是一个 S^3PGR^2 网。我们将 P_W 记为资源集 R_1 , 将 P_R 记为资源集 R_2 。 $\mathcal{N}_2$ 中各个操作的资源需求情况为

$$\begin{aligned} \hat{a}_{p_{10}} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0), \hat{a}_{p_{11}} = (4, 1, 0, 2, 0, 0) \\ \hat{a}_{p_{12}} &= (4, 1, 0, 3, 0, 0), \hat{a}_{p_{13}} = (1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ \hat{a}_{p_{14}} &= (4, 1, 0, 4, 0, 0), \hat{a}_{p_{15}} = (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ \hat{a}_{p_{20}} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0), \hat{a}_{p_{21}} = (0, 3, 0, 0, 1, 0) \\ \hat{a}_{p_{22}} &= (0, 3, 0, 0, 3, 0), \hat{a}_{p_{23}} = (1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \hat{a}_{p_{24}} &= (0, 1, 1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

下面再考察图 3 所示的网系统。

$$\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup P_W, T, W_1, M_{01}) = (N_1, M_{01})$$

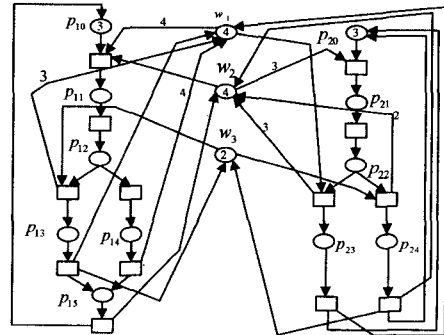


图 3 一个 S^3PGR^2 网 $\mathcal{N}_1$

其中 P_S 与 P_0 如前所述, $P_W = \{w_1, w_2, w_3\} = R_1$ 是资源集, 则 $\mathcal{N}_1$ 是一个 S^3PGR^2 网。 $\mathcal{N}_1$ 中各个操作的资源需求情况为

$$\begin{aligned} \hat{a}_{p_{10}} &= (0, 0, 0), \hat{a}_{p_{11}} = (4, 1, 0), \hat{a}_{p_{12}} = (4, 1, 0) \\ \hat{a}_{p_{13}} &= (1, 1, 1), \hat{a}_{p_{14}} = (4, 1, 0), \hat{a}_{p_{15}} = (0, 1, 0) \\ \hat{a}_{p_{20}} &= (0, 0, 0), \hat{a}_{p_{21}} = (0, 3, 0), \hat{a}_{p_{22}} = (0, 3, 0) \\ \hat{a}_{p_{23}} &= (1, 0, 0), \hat{a}_{p_{24}} = (0, 1, 1) \end{aligned}$$

根据定义 2 可知 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, 其中从资源集 P_R (即 R_2) 到资源集 P_W (即 R_1) 的一一对应的映射为 $f: R_2 \rightarrow R_1$, 具体是

$$f(r_1) = w_1, f(r_2) = w_2, f(r_3) = w_3$$

性质 3 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, $\mathcal{N}_2$ 的关联矩

$$\text{阵是 } A_2 = \begin{matrix} P_S \cup P_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} A_{11}^T \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A_1 = \begin{matrix} P_S \cup P_0 \\ R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} A_{11}^T \\ A_{21} \end{bmatrix} \text{ 是 } \mathcal{N}_1 \text{ 的关联矩}$$

矩阵。

下面的引理 4 和引理 5 说明, 对于一个标识 S^3PGR^2 网对 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 而言, $\mathcal{N}_1$ 的一个可达标识 M_1 , 和 $\mathcal{N}_2$ 的一个对应可达标识 M_2 之间存在某种密切的关系。

引理 4 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, 其中 $\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup R_1, T, W_1, M_{01})$, $\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (R_1 \cup R_2), T, W_2, M_{02})$, $\forall \sigma \in T^*$ (其中 T^* 表示变迁集 T 的闭包)。若 $M_{01}[\sigma > M_1, M_{02}[\sigma > M_2$, 则对于 $\forall p \in P_S \cup P_0$, 有 $M_1(p) = M_2(p)$; 对于 $\forall r \in R_1$, 亦有 $M_1(r) = M_2(r)$ 。

证明: 设 $|T|$ 维非负整数列向量 X 为 σ 的发生数向量, 则由 $M_{01}[\sigma > M_1$ 知

$$M_1 = M_{01} + \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} X \quad (1)$$

式中, $A_1 = \begin{pmatrix} P_S \cup P_0 \\ R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}^T$ 是 $\mathcal{N}_1$ 的关联矩阵。

由 $M_{02}[\sigma > M_2$ 知

$$M_2 = M_{02} + \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix} X \quad (2)$$

式中, $A_2 = \begin{pmatrix} P_S \cup P_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix}^T$ 是 $\mathcal{N}_2$ 的关联矩阵。

又根据定义 2 中的条件 3) 知, 对于 $\forall p \in P_S \cup P_0 \cup R_1$, $M_{01}(p) = M_{02}(p)$ 。结合式(1)和式(2)可知, 对于 $\forall p \in P_S \cup P_0$, 有 $M_1(p) = M_2(p)$; 对于 $\forall r \in R_1$, 亦有 $M_1(r) = M_2(r)$ 。

引理 5 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, 其中

$\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup R_1, T, W_1, M_{01})$, $\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (R_1 \cup R_2), T, W_2, M_{02})$, $t \in T^*$ $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t^* \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$, $\forall \sigma \in T^*$ 。若 $M_{01}[\sigma > M_1, M_{02}[\sigma > M_2$, 且 $M_1(p_1) \geq 1$, 则对于 $\forall r \in R_2$, 有

$$M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)]$$

证明: 一方面, $M_{01}[\sigma > M_1$, 结合引理 2 知, 对于 $\forall r \in R_2$, 资源 $f(r) \in R_1$ 是守恒的, 即 $M_{01}(f(r)) = M_1(f(r)) + \sum_{p \in P_S \cup P_0} (a_p[f(r)]M_1(p))$, 故

$$M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)] = M_{01}(f(r)) - \sum_{p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}} (a_p[f(r)]M_1(p)) - (M_1(p_1) - 1)a_{p_1}[f(r)] \quad (3)$$

另一方面, $M_{02}[\sigma > M_2$, 结合引理 2 知, 对于 $\forall r \in R_2$, 资源 r 是守恒的, 即 $M_{02}(r) = M_2(r) + \sum_{p \in P_S \cup P_0} (\hat{a}_p[r]M_2(p))$, 故

$$M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] = M_{02}(r) - \sum_{p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}} (\hat{a}_p[r]M_2(p)) - (M_2(p_1) - 1)\hat{a}_{p_1}[r] \quad (4)$$

分别比较式(3)等号右端和式(4)等号右端的 3 项内容:

1) 第 1 项内容, 对于 $\forall r \in R_2$, 由定义 2 中的条件 3) 知 $M_{02}(r) = M_{01}(f(r))$ 。

2) 第 2 项内容, 对于 $\forall p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}$, 由引理 4 知 $M_1(p) = M_2(p)$ 。对于 $\forall r \in R_2$, $\forall p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}$, 由定义 2 中的条件 2) 知, $\hat{a}_p[r] \leq a_p[f(r)]$, 因此有 $\sum_{p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}} (a_p[f(r)]M_1(p)) \geq \sum_{p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}} (\hat{a}_p[r]M_2(p))$ 。

$$(r)]M_1(p)) \geq \sum_{p \in P_S \cup P_0 \setminus \{p_1\}} (\hat{a}_p[r]M_2(p)) \geq 0。$$

3) 第 3 项内容, 由引理 4 结合 $M_1(p_1) \geq 1$, 知 $M_1(p) = M_2(p) \geq 1$, 又由定义 2 中的条件 2) 知, 对于 $\forall r \in R_2$, 有 $\hat{a}_{p_1}[r] \leq a_{p_1}[f(r)]$, 因此

$$(M_1(p_1) - 1)a_{p_1}[f(r)] \geq (M_2(p_1) - 1)\hat{a}_{p_1}[r] \geq 0$$

综合 1), 2), 3) 可知, 对于 $\forall r \in R_2$, 有 $M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)]$ 。

下面的引理 6 告诉我们, 若 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, 则 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 的合法变迁发生序列是一致的。

引理 6 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对, 其中 $\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup R_1, T, W_1, M_{01}) = (N_1, M_{01})$, $\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (R_1 \cup R_2), T, W_2, M_{02}) = (N_2, M_{02})$, $\sigma \in T^*$, 则 σ 在 $\mathcal{N}_1$ 中可以发生, 当且仅当 σ 在 $\mathcal{N}_2$ 中可以发生。即 $M_{01}[\sigma >$ 当且仅当 $M_{02}[\sigma >$ 。

证明: 若 $|\sigma| = 0$ (记号 $|\sigma|$ 是指变迁序列 σ 的长度), 则 σ 为空串, 引理显然成立。若 $|\sigma|$ 是一个正整数, 则对 $|\sigma|$ 用数学归纳法证明:

(1) 当 $|\sigma| = 1$ 时, σ 中只有一个变迁, 设为 t , 并记 $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t^* \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$ 。

先证必要性。已知在 $\mathcal{N}_1$ 中, 有 $M_{01}[t >$, 则 $M_{01}(p_1) \geq 1$

且 $t \in (P_0)^*$, $p_1 \in P_0$, $a_{p_1} = \vec{0}$, 而由 $M_{01}[t >$ 结合引理 3 知, 对于 $\forall r \in R_1$, 有 $M_{01}(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r]$, 因此对于 $\forall r \in R_1$, 有 $M_{01}(r) \geq a_{p_2}[r]$ 。在 $\mathcal{N}_2$ 中, 有

$$M_{02}(p_1) = M_{01}(p_1) \geq 1$$

且以下两条结论成立:

1) 对于 $\forall r \in R_1$, $M_{01}(r) = M_{02}(r)$, $\hat{a}_{p_2}[r] = a_{p_2}[r]$, 结合 $M_{01}(r) \geq a_{p_2}[r]$ 知 $M_{02}(r) \geq \hat{a}_{p_2}[r]$ 。

2) 对于 $\forall r \in R_2$, $M_{02}(r) = M_{01}(f(r))$, $\hat{a}_{p_2}[r] \leq a_{p_2}[f(r)]$, 结合 $M_{01}(f(r)) \geq a_{p_2}[f(r)]$ 知 $M_{02}(r) \geq \hat{a}_{p_2}[r]$ 。综合以上两点可知, 在 $\mathcal{N}_2$ 中, 对于 $\forall r \in R_1 \cup R_2$, 均有 $M_{02}(r) \geq \hat{a}_{p_2}[r]$, 结合 $p_1 \in P_0$, $\hat{a}_{p_1} = \vec{0}$, 知 $M_{02}(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq \hat{a}_{p_2}[r]$, 由引理 3 知 $M_{02}[t >$ 。

充分性类似可证。

(2) 假设 $|\sigma| = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 那么当 $|\sigma| = k + 1$ 时, 设 $\sigma = \sigma_1 t$, $|\sigma_1| = k$ 。

先证必要性。已知在 $\mathcal{N}_1$ 中, 有 $M_{01}[\sigma >$, 则 $M_{01}[\sigma_1 > M_1[t >$, 由于 $|\sigma_1| = k$, 因此根据归纳假设, 有 $M_{02}[\sigma_1 > M_2$ 。下面证明在 (N_2, M_2) 中, 有 $M_2[t >$ 。设 $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, $t^* \cap (P_S \cup P_0) = \{p_2\}$, 则由 $M_1[t >$ 根据引理 3 知 $M_1(p_1) \geq 1$, 且对于 $\forall r \in R_1$, 有

$$M_1(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r] \quad (5)$$

由 $\sigma \in T^*$, $M_{01}[\sigma_1 > M_1, M_{02}[\sigma_1 > M_2$, 根据引理 4 知, 对于 $\forall p \in P_S \cup P_0$, 有 $M_1(p) = M_2(p)$, 对于 $\forall r \in R_1$, 亦有 $M_1(r) = M_2(r)$ 。在 $\mathcal{N}_2$ 中, 考虑以下 3 点:

1) 由于 $t \cap (P_S \cup P_0) = \{p_1\}$, 则 $p_1 \in P_S \cup P_0$, 根据引理 4 知 $M_2(p_1) = M_1(p_1) \geq 1$, 因此 t 在 M_2 下是操作使能的。

2) 对于 $\forall r \in R_1$, 根据引理 4 知 $M_2(r) = M_1(r)$, 又由 $r \in R_1$, 根据定义 2 中的条件 2) 知 $\hat{a}_{p_1}[r] = a_{p_1}[r]$, $\hat{a}_{p_2}[r] = a_{p_2}[r]$ 。

$[r]$,因此结合式(5)知

$$M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] = M_1(r) + a_{p_1}[r] \geq a_{p_2}[r] = \hat{a}_{p_2}[r]$$

3)对于 $\forall r \in R_2$,则根据引理 5 知

$$M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)] \quad (6)$$

由于 $f(r) \in R_1$,且 $M_1[t] >$,根据引理 3 知

$$M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)] \geq a_{p_2}[f(r)] \quad (7)$$

由 $f(r) \in R_1$,根据定义 2 中的条件 2)知

$$a_{p_2}[f(r)] \geq \hat{a}_{p_2}[r] \quad (8)$$

结合式(6)、式(7)和式(8)知

$$M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq M_1(f(r)) + a_{p_1}[f(r)] \geq a_{p_2}[f(r)] \geq \hat{a}_{p_2}[r]$$

由以上 3 点中的 2)和 3)知,对于 $\forall r \in R_1 \cup R_2$,皆有 $M_2(r) + \hat{a}_{p_1}[r] \geq \hat{a}_{p_2}[r]$,再结合 1),根据引理 3 知,在 (N_2, M_2) 中,有 $M_2[t] >$ 。

充分性类似可证。

由上述(1)和(2),根据数学归纳法知结论成立。

定理 1 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对,其中

$$\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup R_1, T, W_1, M_{01})$$

$$\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (R_1 \cup R_2), T, W_2, M_{02})$$

则 $\mathcal{N}_1$ 是活的,当且仅当 $\mathcal{N}_2$ 是活的。

证明:($\Rightarrow$)已知 $\mathcal{N}_1$ 是活的,在 $\mathcal{N}_2$ 中,对于 $\forall M_{12} \in R(N_2, M_{02})$, $\forall t \in T$,设 $M_{02}[\sigma_1] > M_{12}$,根据引理 6 知,在 $\mathcal{N}_1$ 中 σ_1 也可以发生, $M_{01}[\sigma_1] > M_{11}$ 。由于 $\mathcal{N}_1$ 是活的,因此存在 $\sigma_2 \in T^*$,使得 $M_{11}[\sigma_2] > M_{21}[t]$,因而 $M_{01}[\sigma_1 \sigma_2 t] >$,由引理 6 知,在 $\mathcal{N}_2$ 中 $\sigma_1 \sigma_2 t$ 也可以发生, $M_{02}[\sigma_1] > M_{12}[\sigma_2] > M_{22}[t]$ 。综上所述可知,在 $\mathcal{N}_2$ 中,对于 $\forall t \in T$, $\forall M_{12} \in R(N_2, M_{02})$,存在一个可达标识 M_{22} ,使得 $M_{22}[t] >$, t 在 $\mathcal{N}_2$ 中是活的, $\mathcal{N}_2$ 是活的。

($\Leftarrow$)类似可证。

4 实例

见图 2 所示的网系统实例。

$$\mathcal{N}_2 = (P_S \cup P_0 \cup (P_W \cup P_R), T, W_2, M_{02}) = (N_2, M_{02})$$

如前所述,它是采用文献[2]提出的 C/D-RUN 死锁避免策略而产生的 S^3PGR^2 网受控系统,其中

$$P_S = \{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}\}$$

$$P_0 = \{p_{10}, p_{20}\}$$

$$P_W = \{w_1, w_2, w_3\}$$

$$P_R = \{r_1, r_2, r_3\}$$

T, W_2, M_{02} 如图 2 所示。

如文献[2]中所述,若将 P_W 中的库所看成资源,则 $\mathcal{N}_2$ 也是一个 S^3PGR^2 网。我们将 P_W 记为资源集 R_1 ,将 P_R 记为资源集 R_2 。

可以应用本文所提出的结论(即定理 1),来说明 $\mathcal{N}_2$ 是活的。具体做法如下:

考察如图 3 所示的网系统

$$\mathcal{N}_1 = (P_S \cup P_0 \cup P_W, T, W_1, M_{01}) = (N_1, M_{01})$$

其中, P_S 与 P_0 如前所述, $P_W = \{w_1, w_2, w_3\} = R_1$ 是资源集,则 $\mathcal{N}_1$ 是一个 S^3PGR^2 网,如上述分析,根据定义 2 可知 $(\mathcal{N}_1,$

$\mathcal{N}_2)$ 是一个标识 S^3PGR^2 网对。

另一方面,由于 $\mathcal{N}_1$ 中不会出现资源的循环等待, $\mathcal{N}_1$ 是活的,因此由本文定理 1 知 $\mathcal{N}_2$ 也是活的。

结束语 本文的研究对象是两个与 C/D-RAS 密切相关的活性问题。这两个 C/D-RAS 的工件加工路径(工作流逻辑)是相同的,并且其中一个系统比另一个系统具有更多的资源以及更复杂的资源使用与释放情况。文中通过考察采用 Petri 网形式化方法为这两个系统建立的模型,揭示出所研究的两个 C/D-RAS 具有相同的活性。

结论的实际应用包括:1)由于两个系统具有相同的活性,因此人们可以通过判定规模较小、结构较简单系统的活性,来判断规模较大、结构较复杂系统的活性。2)在 C/D-RAS 的活性使能控制策略的设计过程中,如果将控制库所看成是资源,则利用本文结论将有可能减少控制库所的数目,从而使得活性使能控制器的规模更小。3)在 C/D-RAS 的一个多项式时间复杂度 DAP(死锁避免策略, Deadlock Avoidance Policy) C/D-RUN 的证明过程中,文献[2]是采用死标识信标(deadly marked siphon)^[2]的方法。然而,利用本文结论,可以构造出一个相当简便的证明思路。

以上 3 条应用中,后两条的详细论述超出了本文题目的范围,是下一步工作的方向,在此仅简要提及。

参考文献

- [1] Li Z W, Zhou M C, Wu N Q. A Survey and Comparison of Petri Net-based Deadlock Prevention Policies for Flexible Manufacturing Systems[J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. C. Applications and Reviews, 2008, 38(2): 173-188
- [2] Park J, Reveliotis S A. Deadlock avoidance in sequential resource allocation systems with multiple resource acquisitions and flexible routings[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, 46: 1572-1583
- [3] Tricas F, Garcia-Valles F, Colom J M, et al. A Petri Net Structure-based Deadlock Prevention Solution for Sequential Resource Allocation Systems[C]//Proc of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation. New York: IEEE Computer Press, 2005: 271-277
- [4] Chao D Y. Controllability for siphons in $S^3PGR^2[C]$ //Proc of IEEE Conference on the Emerging Technologies & Factory Automation(ETFA 2009). Oakland: IEEE Computer Press, 2009: 22-25
- [5] Li Z W, Zhou M C. Elementary siphons of Petri nets and their application to deadlock prevention in flexible manufacturing systems[J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A. Syst., Humans, 2004, 34(1): 38-51
- [6] Xing Keyi, Zhou Meng-chu, Liu Huixia, et al. Optimal Petri-Net-Based Polynomial-Complexity Deadlock-Avoidance Policies for Automated Manufacturing Systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2009, 39(1): 188-199
- [7] Ezpeleta J, Colom J M, Martinez J. A petri net based deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems[J]. IEEE Trans. Robot. Automat., 1995, 11: 173-184
- [8] Li Jiao. A method for verifying deadlock freedom and liveness of petri nets[C]//IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2008: 209-211