近似空间的笛卡尔积粗集模型及其可分解性

吴明芬[1,2] 曹存根[2]

（五邑大学计算机学院 江门 529020）[1] （中国科学院计算技术研究所 北京 100190）[2]

摘 要 为处理人工智能中不精确和不确定的数据和知识，Pawlak提出了粗集理论。之后粗集理论得到拓广，人们提出了许多新的粗集模型。拓展的方法主要有两种，一种是减弱对等价关系的依赖，另一种是把讨论问题的论域从一个拓展到两个。Y. Y. Yao提出了一种基于两个论域的粗集模型。现研究基于两个近似空间的笛卡尔积粗集模型，给出了积近似空间的概念，刻画了可分解集合的上（下）近似、近似精度和粗糙度。最后研究了笛卡尔积粗集模型的可分解问题，给出了一个近似空间积可分解的充分必要条件。

关键词 笛卡尔积，积近似空间，可分解子集，粗糙度，可分解的近似空间

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Cartesian Product Rough Model of Approximation Spaces and Decomposability

WU Ming-fen[1,2] CAO Cun-gen[2]

(School of Computer Science, Wuyi University, Jiangmen 529020, China)[1]

(Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[2]

Abstract Pawlak proposed the rough set model, in order to processing data and knowledge which are imprecise or uncertainty in artificial intelligence. Then, the rough set model has been extended and many new rough set models have been put forward. There are two main methods of extension, one method is to weaken the dependence of equivalence relation, the other is to expand the domain from one to two, and Y. Y. Yao ever proposed a rough set model of two-domain. In this paper, we made some research for cartesian product rough models based on two (finite) approximation spaces, and gave the concept of product approximation space. Afterwards, we described the upper(lower) approximation of decomposable subsets of a cartesian product, and the approximate precision and roughness of decomposable subsets. Finally, we studied the decomposable problem of cartesian product rough models, and obtained the sufficient and necessary conditions of decomposition of a product approximation space.

Keywords Cartesian product, Product approximation space, Decomposable sunset, Roughness, Decomposable approximation space

1 引言与准备知识

1982年，波兰学者Pawlak[1]提出的Rough集理论是一种用来处理不完备、不精确数据的数学工具，该理论已在数据挖掘、机器学习和人工神经网络等诸多领域得到了非常广泛的应用。近年来粗集理论和应用两个方面都得到迅速发展，粗集的概念也有了各种各样的推广。粗集模型的推广一直是粗集理论研究的主流，如，Y. Y. Yao[3]给出了一类基于两个论域（称泛集）的粗集模型，主要在两个有限论域U，W上考虑问题。设R是U到W上的任意二元关系，通常三元组(U, W, R)称为近似空间。文献[4-9]对该模型进行了深入研究，有理论推广、算法实现及应用，获得了一系列有价值的研究成果。考虑两个或多个论域的情形，是希望考虑问题的范围尽可能地大些，以便有更大的应用范围。

多论域的粗糙集模型的另一研究角度是它们的笛卡尔积。文献[10-12]就是从这个角度考虑的，并给出了一些基本概念和基本性质。文献[13]将Pawlak粗糙逻辑中的公式扩展到n个论域的笛卡尔积上，并对n元公式进行了研究。文献[14]是笛卡尔积运算的一个应用。根据以上的分析，本文主要研究Pawlak粗糙集模型的笛卡尔积运算，我们称之为积近似空间，研究它的一些基本性质、积空间中可定义集的分解问题及积近似空间的可分解条件等。这种思想来源于将复杂系统分解成简单系统的合成。这个主题的研究有助于将现实生活中多维对象元组的数据处理问题用一维Pawlak粗糙模型进行合成处理，以有效地提高计算效率和降低计算复杂性。

本文用到粗集的有关知识，其基本概念、基本结论及术语不再详细解释，可参考文献[1,2]。

设U为论域，若R是U上的一个等价关系，则全体等价

到稿日期：2010-03-05 返修日期：2010-06-16 本文受国家自然科学基金资助项目（60773059），广东省科技计划项目资助（2010B010600039），五邑大学重点科研项目资助。

吴明芬（1964－），副教授，硕士生导师，主要研究方向为模糊集、粗糙集理论及其在数据挖掘中的应用，E-mail：mfwu@wyu.edu.cn；**曹存根**（1964－），男，研究员，博士生导师，主要研究方向为大规模知识处理。

类的集合为$U/R=\{[x]_R|x\in U\}$。它是U上的一个划分，可以得到由U到U/R上的自然映射：$\pi:U\to U/R,\pi(x)=[x]_R$。粗糙集模型可以看成是在较粗的粒度上，即在商空间中对问题进行处理，此时的粒度等级是按等价关系来划分的。一般说来，粒度的选择与划分与问题所属领域的知识密切相关。对于每一个子集$X\subseteq U$，X的R上近似集和R下近似集分别为[1]

$R^{-}(X)=\{x|x\in U,[x]_R\cap X\neq\phi\}$

$R\_(X)=\{x|x\in U,[x]_R\subseteq X\}$

$P(U)$是U的全体子集组成的集合，即U的幂集。

2 近似空间的积空间

下面采用构造性的方法对经典粗糙集模型进行推广，把单一论域的粗糙集模型推广为双(有限)论域的情形，作论域的笛卡尔积运算，并确定其上的等价关系，拓宽了应用的范围。此时的二元关系就成为多个论域笛卡尔乘积到笛卡尔乘积的一个二元关系。

设U,V是两个非空的有限集合，R_1,R_2分别是定义在U,V上的等价关系，则U,V的笛卡尔乘积记为$U\times V=\{(x,y)|x\in U,y\in V\}$。约定$U\times\phi=U\times\phi=\phi\times U=\phi\times\phi=\phi$，则有

$P(U\times V)\supseteq\{X\times Y|X\subseteq U,Y\subseteq V\}$

但是等号不成立。

如设$U=\{1,2\},V=\{1,2\}$，那么有$U\times V=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$，$|P(U\times V)|=16$。$\{X\times Y|X\subseteq U,Y\subseteq V\}=\{\phi,\{\{1\}\times\{1\}\},\{\{1\}\times\{2\}\},\{\{1\}\times\{1,2\}\},\{\{2\}\times\{1\}\},\{\{2\}\times\{2\}\},\{\{2\}\times\{1,2\}\},\{\{1,2\}\times\{1\}\},\{\{1,2\}\times\{2\}\},\{\{1,2\}\times\{1,2\}\}\}$，所以$|\{X\times Y|X\subseteq U,Y\subseteq V\}|=10$。

定理1 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，则$|U\times V|=n\times m$，$|P(U\times V)|=2^{n\times m}$，$|\{X\times Y|X\subseteq U,Y\subseteq V\}|=1+(2^n-1)\times(2^m-1)$。

为了方便描述相关的结果，我们在两个集合之间引入一种“积”运算$\otimes$。

定义1 在任意的两个非空集合U,V之间规定运算$\otimes$，记为$U\otimes V=\{\{x\}\times\{y\}|x\in U,y\in V\}$，$P(U)\otimes P(V)=\{X\times Y|X\in P(U),Y\in P(V)\}$。

对有限个集合$A_i,i=1,2,\cdots n$，规定$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$如下：

$$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i=A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n=\{\{x_1\}\times\{x_2\}\times\cdots\times\{x_n\}|x_1\in A_1,\cdots,x_n\in A_n\}$$

定理2 (1)$U\otimes V=U\times V$；

(2) $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1\in A_1,\cdots,x_n\in A_n\}=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\bigtimes_{i=1}^{n}A_i$；

(3) 如果$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，则$P(U)\otimes P(V)\subset P(U\times V)$，且$|P(U\times V)|=2^{n\times m}$，$|P(U)\otimes P(V)|=(2^n-1)\times(2^m-1)+1$。

证明：(1)，(2)显然。

(3)$P(U)\otimes P(V)=\{X\times Y|X\in P(U),Y\in P(V)\}$，而$|P(U)|=2^n$，$|P(V)|=2^m$，及$X\times\phi=\phi\times Y=\phi\times\phi=\phi$，所以有

$|P(U)\otimes P(V)|=(2^n-1)\times(2^m-1)+1$

定义2 设U,V是两个非空的有限集合，R_1,R_2分别是定义在U,V上的二元关系，记

$$R_1\amalg R_2=\{((x,y),(x',y'))|(x,x')\in R_1,(y,y')\in R_2,x,x'\in U,y,y'\in V\}$$

称$R_1\amalg R_2$为关系R_1与R_2的积，是笛卡尔积$U\times V$上的一个二元关系。

定理3 (1)如果R_1,R_2分别是U,V上的等价关系，则$R_1\amalg R_2$是$U\times V$上的等价关系。(2)对任意$(x,y)\in U\times V$，则$[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$，而且

$$(U\times V)/R_1\amalg R_2=\{[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}|x\in U,y\in V\}=\{[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}|[x]_{R_1}\in U/R_1,[y]_{R_2}\in V/R_2\}=U/R_1\otimes V/R_2$$

证明：从定义1、定义2及等价关系的定义可以直接验证结论。

此时，我们称近似空间$(U\times V,R_1\amalg R_2)$为近似空间$(U,R_1)$，$(V,R_2)$的积近似空间。很自然地可以推广至有限个近似空间的情形。

设(U_i,R_i)，$i=1,2,\cdots k$为近似空间，即R_i是论域U_i上的二元关系，记

$$R_1\amalg R_2\amalg\cdots\amalg R_k=\coprod_{i=1}^{k}R_i=\{((x_1,x_2,\cdots,x_k),(x_1',x_2',\cdots,x_k'))|(x_i,x_i')\in R_i,x_i,x_i'\in U_i,i=1,2,\cdots,k\}$$

定理4 (1)如果R_i是$U_i,i=1,2,\cdots,k$上的等价关系，则$\coprod_{i=1}^{k}R_i$是笛卡尔积$U_1\times U_2\times\cdots\times U_k=\bigtimes_{i=1}^{k}U_i$上的等价关系。(2)对任意$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\bigtimes_{i=1}^{k}U_i$，则$[(x_1,x_2,\cdots,x_k)]_{\coprod_{i=1}^{k}R_i}=\bigtimes_{i=1}^{k}[x_i]_{R_i}$，而且$\bigtimes_{i=1}^{k}U_i/\coprod_{i=1}^{k}R_i=\bigotimes_{i=1}^{k}(U_i/R_i)$。

此时，称近似空间$(\bigtimes_{i=1}^{k}U_i,\coprod_{i=1}^{k}R_i)$为$k$个近似空间$(U_i,R_i)$，$i=1,2,\cdots k$的积近似空间。

3 积近似空间的性质

本节中研究积近似空间中集合上、下近似的基本性质(以两个近似空间的积为例)。

定义3 在积近似空间$(U\times V,R_1\amalg R_2)$中，对任意$M\subseteq U\times V$，则$M$关于等价关系$R_1\amalg R_2$的下、上近似表示为

$$(R_1\amalg R_2)_{-}(M)=\{(x,y)|[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}\subseteq M,x\in U,y\in V\}=\bigcup\{[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}|[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}\subseteq M,x\in U,y\in V\}$$

$$(R_1\amalg R_2)^{-}(M)=\{(x,y)|[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}\cap M\neq\phi,x\in U,y\in V\}=\bigcup\{[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}|[(x,y)]_{R_1\amalg R_2}\cap M\neq\phi,x\in U,y\in V\}$$

定理5 设$M\subseteq U\times V$，如果存在$X\in P(U),Y\in P(V)$，使得$M=X\times Y$，则

$$(1)(R_1\amalg R_2)_{-}(M)=(R_1\amalg R_2)_{-}(X\times Y)=\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}=\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A$$

$(2)(R_1\amalg R_2)^{-}(M)=(R_1\amalg R_2)^{-}(X\times Y)$

$$= \bigcup_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,\,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2} [x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$$

$$= \bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2} A$$

证明：(1)据定义 3，

$$(R_1\Pi R_2)_-(M)=(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y) =\bigcup\{[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\mid[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\subseteq X\times Y,x\in U,y\in V\}$$

由定理 3(2)，有$[x,y]_{R_1\Pi R_2}=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}\subseteq X\times Y$，所以$[x]_{R_1}\subseteq X$，$[y]_{R_2}\subseteq Y$，因此$[x]_{R_1}\subseteq R_{1-}(X)$，$[y]_{R_2}\subseteq R_{2-}(Y)$。故$[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1$，$[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2$，即$[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2$，所以

$$(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y)$$

$$=\bigcup\{[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\mid[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\subseteq M,x\in U,y\in V\}$$

$$\subseteq\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,\,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$$

$$=\bigcup_{[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$$

$$=\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A$$

反之，对任意$A\in(R_{1-}(X)/R_1)\otimes(R_{2-}(Y)/R_2)$，则存在$[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1\subseteq U/R_1$，$[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2\subseteq V/R_2$，使得$A=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$，$[x]_{R_1}\subseteq X$，$[y]_{R_2}\subseteq Y$。所以$A=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}=[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\subseteq X\times Y$，故

$$A=[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\subseteq(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y)=(R_1\Pi R_2)_-(M)$$

综上所述，

$$(R_1\Pi R_2)_-(M)=(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y)=\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A \triangleq\bigcup(R_{1-}(X)/R_1)\otimes(R_{2-}(Y)/R_2)$$

(2)由定义 3，

$$(R_1\Pi R_2)^-(M)=(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)=\bigcup\{[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\mid[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\cap(X\times Y)\neq\phi,x\in U,y\in V\}$$

由定理 3(2)，我们有$[x,y]_{R_1\Pi R_2}\cap M=([x]_{R_1}\times[y]_{R_2})\cap(X\times Y)\neq\phi$，所以$[x]_{R_1}\cap X\neq\phi$，$[y]_{R_2})\times Y\neq\phi$，因此有$[x]_{R_1}\subseteq R_1^-(X)$，$[y]_{R_2}\subseteq R_2^-(Y)$，故$[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1$，$[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2$，即

$$[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}\in(R_1^-(X)/R_1)\otimes(R_2^-(Y)/R_2)$$

所以

$$(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)\subseteq\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,\,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}\subseteq\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A$$

反之，对任意$A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2$，存在

$[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1\subseteq U/R_1$，

$[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2\subseteq V/R_2$。

使$A=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$。因此$[x]_{R_1}\cap X\neq\phi$，$[y]_{R_2}\cap Y\neq\phi$，所以

$$([x]_{R_1}\times[y]_{R_2})\cap(X\times Y)=[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\cap(X\times Y)\neq\phi$$

由定理 3(2)及定义 3

$$A=[(x,y)]_{R_1\Pi R_2}\subseteq(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)=(R_1\Pi R_2)^-(M)。$$

综上所述，

$$(R_1\Pi R_2)^-(M)=(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)=\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A\triangleq\bigcup(R_1^-(X)/R_1)\otimes(R_2^-(Y)/R_2)$$

注意：当$M\subseteq U\times V$不能分解为$M=X\times Y$时，可能对任意的$X\subseteq U,Y\subseteq V$，

$$(R_1\Pi R_2)_-(M)\neq\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A \triangleq\bigcup(R_{1-}(X)/R_1)\otimes(R_{2-}(Y)/R_2)$$

$$(R_1\Pi R_2)^-(M)\neq\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A \triangleq\bigcup(R_1^-(X)/R_1)\otimes(R_2^-(Y)/R_2)$$

例 1　设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，$V=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$，及$U/R_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_6,x_8\},\{x_4,x_5\},\{x_7\}\}$，$V/R_2=\{\{y_1,y_3\},\{y_2,y_4\},\{y_5\}\}$，取$M=\{(x_1,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_1),(x_2,y_3),(x_3,y_2),(x_3,y_5),(x_6,y_5),(x_8,y_5)\}$。

则对$\forall X\subseteq U$，$\forall Y\subseteq V$，$M\neq X\times Y$，且

$$(R_1\Pi R_2)_-(M)\neq\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A$$

$$(R_1\Pi R_2)^-(M)\neq\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A$$

因为，由M的形式知，$\forall X\subseteq U$，$\forall Y\subseteq V$，$M\neq X\times Y$。

由定义 3 可知

$$(R_1\Pi R_2)_-(M)=([x_1]_{R_1}\times[y_1]_{R_2})\cup([x_3]_{R_1}\times[y_5]_{R_2})$$

$$(R_1\Pi R_2)^-(M)=([x_1]_{R_1}\times[y_1]_{R_2})\cup([x_3]_{R_1}\times[y_5]_{R_2})\cup([x_3]_{R_1}\times[y_2]_{R_2})$$

所以对$\forall A\subseteq U/R_1$，$B\subseteq V/R_2$，$(R_1\Pi R_2)_-(M)\neq\bigcup(A\otimes B)$，$(R_1\Pi R_2)^-(M)\neq\bigcup(A\otimes B)$。

即对$\forall X\subseteq U$，$\forall Y\subseteq V$，$(R_1\Pi R_2)_-(M)\neq\bigcup(R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2)$，$(R_1\Pi R_2)^-(M)\neq\bigcup(R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2)$。

定义 4　称$U/R_1\otimes V/R_2$中的元素为积近似空间$(U\times V,R_1\Pi R_2)$的基本知识，$\forall M\subseteq U\times V$，$M$关于$R_1\Pi R_2$上、下近似是积近似空间中基本知识的并集。

在积近似空间$(U\times V,R_1\Pi R_2)$中，关于$R_1\Pi R_2$的上、下近似的基本性质显然是成立的。在实际应用中，很多时候我们对$U\times V$可分解的子集$M=X\times Y$更加有兴趣，即集合$P(U)\otimes P(V)=\{X\times Y\mid X\in P(U),Y\in P(V)\}$中的元素。下面进一步研究它们的性质。

定理 6　(1)$M=X\times Y$是$R_1\Pi R_2$-可定义的，当且仅当X是R_1可定义的，且Y是R_2可定义的。(2)$M=X\times Y$是$R_1\Pi R_2$-粗糙的，当且仅当X是R_1粗糙的或Y是R_2粗糙的。

证明：(1)$M=X\times Y$是$R_1\Pi R_2$-可定义的，当且仅当$(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y)=(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)$。由定理 5 知，$(R_1\Pi R_2)_-(X\times Y)=\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A$，$(R_1\Pi R_2)^-(X\times Y)=\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A$。由$R_{1-}(X)/R_1\subseteq R_1^-(X)/R_1$，$R_{2-}(Y)/R_2\subseteq R_2^-(Y)/R_2$及$\bigcup_{A\in R_{1-}(X)/R_1\otimes R_{2-}(Y)/R_2}A=\bigcup_{A\in R_1^-(X)/R_1\otimes R_2^-(Y)/R_2}A$。

当且仅当

$$R_{1-}(X)/R_1=R_1^-(X)/R_1,\quad R_{2-}(Y)/R_2=R_2^-(Y)/R_2$$

即X是R_1可定义的，且Y是R_2可定义的。

(2) 由(1)可得结论。

定义 5 在积近似空间 $(U\times V,R_1\amalg R_2)$ 中，$\forall M\subseteq U\times V$，$M$ 关于 $R_1\amalg R_2$ 的近似精度为

$$\alpha_{R_1\amalg R_2}(M)=\frac{|(R_1\amalg R_2)_-(M)|}{|(R_1\amalg R_2)^-(M)|}$$

反映了上、下近似对集合 M 的近似程度。

定理 7 在积近似空间 $(U\times V,R_1\amalg R_2)$ 中，如果 M 是 $U\times V$ 的可分解子集，即 $\exists X\subseteq U,Y\subseteq V$，使得 $M=X\times Y$，则 $\alpha_{R_1\amalg R_2}(X\times Y)=\alpha_{R_1}(X)\cdot\alpha_{R_2}(Y)$。

证明：因为 $M=X\times Y$，由定理 5，

$$(R_1\amalg R_2)_-(X\times Y)=\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$$

$$(R_1\amalg R_2)^-(X\times Y)=\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$$

而

$$R_{1-}(X)=\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1}[x]_{R_1}$$

$$R_1^-(X)=\bigcup_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1}[x]_{R_1}$$

$$R_{2-}(Y)=\bigcup_{[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}[y]_{R_2}$$

$$R_2^-(Y)=\bigcup_{[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}[y]_{R_2}$$

所以

$$\begin{aligned}&|(R_1\amalg R_2)_-(X\times Y)|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}|[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}|[x]_{R_1}|\cdot|[y]_{R_2}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|(R_1\amalg R_2)^-(X\times Y)|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}|[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}|[x]_{R_1}|\cdot|[y]_{R_2}|\end{aligned}$$

$$|R_{1-}(X)|=\sum_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1}|[x]_{R_1}|$$

$$|R_1^-(X)|=\sum_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1}|[x]_{R_1}|$$

$$|R_{2-}(Y)|=\sum_{[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}|[y]_{R_2}|$$

$$|R_2^-(Y)|=\sum_{[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}|[y]_{R_2}|$$

因此

$$\begin{aligned}&|(R_1\amalg R_2)_-(X\times Y)|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}|[x]_{R_1}|\cdot|[y]_{R_2}|\\&=\Big(\sum_{[x]_{R_1}\in R_{1-}(X)/R_1}|[x]_{R_1}|\Big)\cdot\Big(\sum_{[y]_{R_2}\in R_{2-}(Y)/R_2}|[y]_{R_2}|\Big)\\&=|R_{1-}(X)|\cdot|R_{2-}(Y)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|(R_1\amalg R_2)^-(X\times Y)|\\&=\sum_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1,[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}|[x]_{R_1}|\cdot|[y]_{R_2}|\\&=\Big(\sum_{[x]_{R_1}\in R_1^-(X)/R_1}|[x]_{R_1}|\Big)\cdot\Big(\sum_{[y]_{R_2}\in R_2^-(Y)/R_2}|[y]_{R_2}|\Big)\\&=|R_1^-(X)|\cdot|R_2^-(Y)|\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\alpha_{R_1\amalg R_2}(X\times Y)&=\frac{|(R_1\amalg R_2)_-(X\times Y)|}{|(R_1\amalg R_2)^-(X\times Y)|}\\&=\frac{|R_{1-}(X)|\cdot|R_{2-}(Y)|}{|R_1^-(X)|\cdot|R_2^-(Y)|}=\alpha_{R_1}(X)\cdot\alpha_{R_2}(Y)\end{aligned}$$

定义 6 在积近似空间 $(U\times V,R_1\amalg R_2)$ 中，$\forall M\subseteq U\times V$，$M$ 关于 $R_1\amalg R_2$ 的粗糙度为

$$\rho_{R_1\amalg R_2}(M)=\frac{|(R_1\amalg R_2)^-(M)|-|(R_1\amalg R_2)_-(M)|}{|(R_1\amalg R_2)^-(M)|}$$

定理 8 在积近似空间 $(U\times V,R_1\amalg R_2)$ 中，如果 M 是 $U\times V$ 的可分解子集合，即 $\exists X\subseteq U,Y\subseteq V$，使得 $M=X\times Y$，则 $\rho_{R_1\amalg R_2}(X\times Y)=\rho_{R_1}(X)+\rho_{R_2}(Y)-\rho_{R_1}(X)\cdot\rho_{R_2}(Y)$。

证明：因为 $\rho_{R_1\amalg R_2}(M)=1-\alpha_{R_1\amalg R_2}(M)$，根据定理 7 及等式 $\forall a,b\in[0,1]$，有

$$1-ab=(1-a)+(1-b)-(1-a)(1-b)$$

因此结论成立。

由此可见，可分解集 $M=X\times Y$ 在积近似空间 $(U\times V,R_1\amalg R_2)$ 上的粗糙度取决于 X,Y 在各自的近似空间 (U,R_1)，(V,R_2) 上的粗糙程度。

4 可分解的积近似空间

上节讨论的双论域上的粗糙集模型是由单论域上的粗糙集模型诱导出的，即考虑的是论域 U,V 上的等价关系 R_1,R_2 诱导出 $U\times V$ 上的等价关系 $R_1\amalg R_2$。现在研究问题的逆，即对 $U\times V$ 中的任一等价关系 R，可否找到对应的 R_1,R_2，使得 $R=R_1\amalg R_2$？

定义 7 设 R 是 $U\times V$ 上的等价关系，如果存在 U,V 上的等价关系 R_1,R_2，使得近似空间 $(U\times V,R)=(U\times V,R_1\amalg R_2)$，则称近似空间 $(U\times V,R)$ 是积可分解的，也称等价关系 R 是积可分解的。

设 R 是 $U\times V$ 上的一个等价关系，定义 R_1,R_2 如下：

$$R_1=\{(x,x')\mid x,x'\in U,\exists(x,y),(x',y')\in U\times V,((x,y),(x',y'))\in R\}$$

$$R_2=\{(y,y')\mid y,y'\in V,\exists(x,y),(x',y')\in U\times V,((x,y),(x',y'))\in R\}$$

显然 R_1,R_2 分别是 U,V 上的二元关系。

定理 9 如果 R 是 $U\times V$ 上的等价关系，则 R_1,R_2 分别是 U,V 上的等价关系，而且 $R\subseteq R_1\amalg R_2$。

证明：(1) $\forall x\in U,y\in V$，因为 R 是自反的，所以 $((x,y),(x,y))\in R$，由 R_1,R_2 的定义可知，R_1,R_2 是自反的。

(2)因为 R 是对称的，所以 R_1,R_2 是对称的。

(3)如果 $x,x',x''\in U$，$(x,x'),(x',x'')\in R_1$，则存在 $\exists(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in U\times V$，使得 $((x,y),(x',y'))$，$((x',y'),(x'',y''))\in R$。

因为 R 是传递的，所以 $((x,y),(x'',y''))\in R$。由 R_1 的定义可知 R_1 是传递的。同理可知 R_2 是传递的。

(4) 对任意 $((x,y),(x',y'))\in R$，由 R_1,R_2 的定义可知，$(x,x')\in R_1$，$(y,y')\in R_2$。再由 $R_1\amalg R_2$ 的定义 2，$((x,y),(x',y'))\in R_1\amalg R_2$。所以 $R\subseteq R_1\amalg R_2$。

下面举例说明，定理 9 中的等号未必成立。

例 2 设 $U=\{x_1,x_2,x_3\}$，$V=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$(U\times V)/R=\{\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_3),(x_2,y_4)\},\{(x_1,y_3),(x_1,y_4),(x_2,y_1),(x_2,y_2)\},\{(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\}\}$。

则 $U/R_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\}$，$V/R_2=\{\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\}$，且 $R\subset R_1\amalg R_2$。

因为

(下转第 245 页)

信息学报,2004,18(6):1-9

[5] 崔世起,刘群,孟遥,等.基于大规模语料库的新词检测[J].计算机研究与发展,2006,43(5):927-932

[6] Li Hong-qiao, Huang Chang-ning, Gao Jian-feng, et al. The use of SVM for Chinese new word identification[C]//Processing of *2004 International Joint Conference on Natural Language*. China, 2004:723-732

[7] 闫蓉,张蕾.基于遗传算法的汉语未登录词识别[J].计算机应用与软件,2008,25(7):88-90

[8] 新名词网[EB/OL]. http://www.xinmingci.com/,2010-01-06

[9] 刘吉艳.汉语新词语词群现象研究[D].上海:上海外国语大学,2008

[10] 黄昌宁,赵海.由字构词——中文分词新方法[C]//中文信息处理前沿进展——中国中文信息学会二十五周年学术会议.2006

(上接第 228 页)

$$(U\times V)/(R_1\amalg R_2)=\{\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_3),(x_2,y_4),(x_1,y_3),(x_1,y_4),(x_2,y_1),(x_2,y_2)\},\{(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\}\}$$

$$=\{\{x_1,x_2\}\times\{y_1,y_2,y_3,y_4\},\{x_3\}\times\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\}$$

所以 $R\subseteq R_1\amalg R_2$,但是 $R\neq R_1\amalg R_2$。

定理 10 R 是 $U\times V$ 上的等价关系,则 R 是积可分解,即 $R=R_1\amalg R_2$ 充分必要条件是 $[(x,y)]_R=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$,$\forall x\in U,\forall y\in V$。

证明:(1)根据定理 3(2),必要性显然成立。

(2)由定理 9,只要证明 $R_1\amalg R_2\subseteq R$,从而充分性成立。以下是证明过程。

对任意$((x,y),(x',y'))\in R_1\amalg R_2$,有$(x,x')\in R_1$,$(y,y')\in R_2$。所以 $x,x'\in[x]_{R_1}$,$y,y'\in[y]_{R_2}$,则 $(x,y),(x',y),(x,y'),(x',y')\in[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$。

由条件$[(x,y)]_R=[x]_{R_1}\times[y]_{R_2}$,我们有

$$(x,y),(x',y),(x,y'),(x',y')\in[(x,y)]_R$$

即$((x,y),(x',y'))\in R$,故 $R_1\amalg R_2=R$。

定理 11 R 是 $U\times V$ 上的等价关系,则 R 不是积可分解的充分必要条件是存在 $x_1,x_2,x_{11},x_{22}\in U$,$y_1,y_2,y_{11},y_{22}\in V$,使得$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\notin R$,但$((x_1,y_{11}),(x_2,y_{22}))\in R$,$((x_{11},y_1),(x_{22},y_2))\in R$。

证明:(1)充分性,只需证明 $R\subset R_1\amalg R_2$ 即可。R_1,R_2 的定义及由条件可知$(x_1,x_2)\in R_1$,$(y_1,y_2)\in R_2$,从而 $x_1,x_2\in[x_1]_{R_1}$,$y_1,y_2\in[y_1]_{R_2}$,故$(x_2,y_2)\in[x_1]_{R_1}\times[y_1]_{R_2}$,但$(x_2,y_2)\notin[(x_1,y_1)]_R$。由定理 10 知,$R$ 不是积可分解的。

(2) 由 R 不是积可分解的,则 $R\subset R_1\amalg R_2$。故存在 x_1,$x_2\in U$,$y_1,y_2\in V$,使$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R_1\amalg R_2$,但是$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\notin R$,由 R_1,R_2 的定义可知,存在 $x_{11},x_{22}\in U$,$y_{11},y_{22}\in V$,使得$((x_1,y_{11}),(x_2,y_{22}))\in R$,$((x_{11},y_1),(x_{22},y_2))\in R$。因此结论成立。

推论 1 R 是 $U\times V$ 上的等价关系,则 R 是积可分解的充分必要条件是如果 $x_1,x_2,x_{11},x_{22}\in U$,$y_1,y_2,y_{11},y_{22}\in V$,使得$((x_1,y_{11}),(x_2,y_{22}))\in R$,$((x_{11},y_1),(x_{22},y_2))\in R$,那么$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R$。

结束语 粗糙集的理论研究有两条途径:一条是从论域上的二元关系出发构造各种粗糙集模型,称之为构造性方法;另一条途径是把上、下近似作为基本概念,利用一个公理集来刻画上、下近似算子,揭示公理集性方法。本文对不同论域上的近似空间进行笛卡尔合成,得到有限个近似空间的积近似空间,研究了它的一些基本性质,特别对可分解子集的上、下近似进行了刻画,研究了它的近似精度和粗糙度与分解式的关系。进一步地考察了一个笛卡尔积上的近似空间的可分解性。后期的研究可以从以下几方面展开,继续完善本粗糙集模型及其扩展:研究笛卡尔积粗糙集模型的公理化刻画及具体算法实现,结合文献[13,14]等研究这种推广模型的应用。由于我们的讨论是基于两(有限)个互不相同的论域,因而使得构造性方法在实际中具有更广泛的应用领域。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough Set[J]. International Joumal of Computer and Information Science, 1982(5):341-356

[2] 张文修,吴志伟,梁吉业,等.粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社,2001

[3] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universe[J]. Internat. J. Approx. Reason, 1996, 15:291-317

[4] Yao Y Y, Lingras P J. Interpretations of Belief Functions in the Theory of Rough Sets[J]. Information Sciences, 1998, 104:81-106

[5] Li T J. Rough approximation operators on two universes of discourse and their fuzzy extensions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159:3033-3050

[6] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. On characterizations of (I,T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 154:76-102

[7] 邱雅竹,付蓉.两个论域上的粗糙集模型及其应用[J].四川师范大学学报:自然科学版,2005,28(1):15-18

[8] 高明,王继成.双论域下粗糙集数据约简方法研究[J].计算机工程与应用,2009,45(2):144-146

[9] 刘贵龙.基于两个集合上粗集模型的算法实现[J].计算机科学,2006,33(3):181-184

[10] 余扬.双论域的粗糙集模型[J].科学技术与工程,2005,5(10):661-662

[11] 何薇薇.多论域粗糙集模型及其应用[J].科学技术与工程,2006,6(19):3013-3016

[12] 杨勇,李廉.双论域上粗糙集的矩阵定义[J].计算机工程与应用,2007,43(25):1-3

[13] 闫林,王全蕊,刘延.Rough 逻辑公式的语义分析及基于语义分析推理的研究[J].模式识别与人工智能,2006,19(4):433-438

[14] 陈卫东,张维明.笛卡尔积运算对数据库数据质量的传递影响[J].计算机科学,2008,35(6):210-213