反馈集问题的研究进展

王建新 江国红 李文军 陈建二

(中南大学信息科学与工程学院 沙 410083)

摘 要 反馈集问题是经典的NP难问题,在电路测试、操作系统解死锁、分析工艺流程、生物计算等领域都有重要应用,按照反馈集中元素类型可分为反馈顶点集(FVS)问题和反馈边集(FAS)问题。人们利用线性规划和局部搜索等技术设计了一系列关于FVS和FAS问题的近似算法,并基于分枝-剪枝策略和加权分治技术提出了FVS问题的精确算法。随着参数计算理论的发展,近年来参数化反馈集问题引起了人们的重视,并取得了很大突破。目前已经证明了无向图和有向图中FVS问题和FAS问题都是固定参数可解的(FPT)。利用树分解、分支搜索、迭代压缩等技术,对无向图FVS问题提出了一系列FPT算法。针对某些特殊的应用,人们开展了对具有特殊性质的图上FVS问题的研究,提出了一些多项式时间可解的精确算法。现首先介绍了在无向图中关于FVS问题的近似算法与精确算法,然后具体分析了FVS问题的参数化算法。进一步阐述了关于有向图和特殊图上FVS问题的研究现状,介绍了FAS问题的研究成果。基于对反馈集问题研究现状的分析,提出了今后FVS问题研究中值得关注的几个方面。

关键词 反馈顶点集,反馈边集,近似算法,精确算法,参数算法

中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Algorithms for Feedback Set Problems: A Survey

WANG Jian-xin Jiang Guo-hong Li Wen-jun CHEN Jian-er

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract Feedback Set problems are classical NP problems, which include Feedback Vertex Set(FVS) and Feedback Arc Set(FAS) problems. There are important applications of these problems in many fields, such as circuit testing, deadlock resolution, analyzing manufacturing processes and computational biology. People have designed many different approximate algorithms based on linear programming and local search approaches, and have found exact solutions by Branch-Prune and Measure-and-Conquer techniques. Recently, Parameterized Feedback Set problems have received considerable attention. The development of parameterized complexity motivates the studies on parameterized Feedback Set problems, especially on parameterized FVS problem. A chain of dramatic improvements on FVS problem in undirected graphs were obtained using different methods, such as tree decomposition, branch-and-search, iterative compression. In this paper, the approximation algorithms and parameter algorithms about FVS problem in general undirected graphs were introduced firstly. Then the research on the FVS problem in directed graphs and special graphs were presented. Moreover, the FAS problems were also discussed. Finally, some future researches with considerable attention on FVS problems were proposed by analyzing the researches on feedback set problems.

Keywords Feedback vertex set, Feedback arc set, Approximation algorithm, Exact algorithm, Parameterized algorithm

1 引言

反馈集(Feedback Set)问题是一个经典的组合优化问题,在电路测试、操作系统解死锁、分析工艺流程、同步系统、人工智能和生物计算等领域都有重要应用[1]。按照反馈集中元素的类型,反馈集问题可划分为反馈顶点集(Feedback Vertex Set,简称FVS)问题和反馈边集(Feedback Arc Set,简称FAS)两个问题。图G的FVS是一个由G中一些顶点构成的集合,从图G中删除该集合中的所有点后,图中不含圈,即图G中的每个圈至少有一个点在FVS中。类似地,FAS是指由G中一些边构成的集合,从图G中删除该集合中的所有边后,图中不含圈。如果图G为带权图,即给每个点(边)分配一个非负实数的权值,那么FVS(FAS)的权值是FVS(FAS)中所有顶点(边)的权值之和。

一般图的最小FVS问题(权值最小或所含顶点数最少的FVS)和有向图的最小FAS问题都是经典的NP-完全问题[2]。本文重点介绍FVS问题的研究成果,包括:无向图、有向图和特殊图的最小FVS问题和参数化FVS问题的相关算

到稿日期:2010-02-26 返修日期:2010-05-05 本文受国家自然科学基金(60773111)和国家教育部创新团队资助计划(IRT0661)资助。

王建新(1969—),男,博士,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究方向为虚拟实验环境、网络计算技术、网络优化理论等,E-mail:jxwang@mail.csu.edu.cn;**江国红**(1985—),女,硕士生,主要研究方向为参数计算、计算机理论;**李文军**(1984—),男,硕士生,主要研究方向为参数计算、计算机理论;**陈建二**(1954—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为生物信息学、计算机理论、计算复杂性及优化。

法，同时也介绍了有向图中 FAS 问题的研究进展。以下给出反馈集相关问题的具体定义。

图 $G=(V,E)$ 为一个含有 n 个顶点的图，V 是 G 的顶点集，E 是边集。设 $W\subseteq V$，$G[W]=(W,E_W)$ 为由顶点子集 W 导出的图 G 的子图，其中边集合 $E_W=\{(u,v)\mid u,v\in W$ 且 $(u,v)\in E\}$。$V(G)$ 表示图 G 的顶点集合。

定义 1(含顶点数最少的 FVS，简称 MFVS)　给定一个含有 n 个顶点的图 G，求一个含顶点数最少的 FVS。

定义 2(权值最小的 FVS，简称 MWFVS)　给定一个顶点带权的图 G，求一个权值最小的 FVS。

一般图上的 MFVS 和 MWFVS 问题的前期研究主要集中在近似算法和精确算法。近年来，人们将 FVS 问题的研究转移到对该问题的参数化求解，参数化 FVS 问题的定义如下。

定义 3(参数化不带权 FVS，简称 PFVS)　给定含有 n 个顶点的图 G 和一个非负整数 k，能否在图 G 中找到一个含顶点数不超过 k 的 FVS。

如果一个参数化 NP 难问题在时间 $f(k)n^{O(1)}$ 内可解，其中 $f(k)$ 是仅关于 k 的一个函数，那么称此问题是固定参数可解的(Fixed-Parameter Tractable，简称 FPT)[3]。文献[3,4]证明了无向图中 PFVS 问题是 FPT 问题，文献[5]证明有向图中 PFVS 问题也是 FPT 问题。

对于参数化带权 FVS 问题，对参数 k 有两种选取方式，一种是 k 为 FVS 的权值，一种是 k 为 FVS 的大小，定义分别为：

定义 4(参数为 FVS 权值的带权 FVS，简称 PW-FVS)　给定含有 n 个顶点的带权图 G 和非负实数 k，能否在图 G 中找到一个权值不超过 k 的 FVS。

当顶点权值为不小于 1 的实数时，Raman 等提出无向图中 PW-FVS 问题的 FPT 算法，并证明顶点权值为任意实数时，PW-FVS 问题不是 FPT 问题[6]。

定义 5(参数为 FVS 中顶点数目的带权 FVS，简称 PW-MFVS)　给定含有 n 个顶点的带权图 G 和一个非负整数 k，能否在图 G 中找到一个权值最小的含顶点数目不大于 k 的 FVS。

Chen 等证明了无向图中 PW-MFVS 问题是 FPT 问题，并提出了其 FPT 算法[7]。

对于 FAS 问题也有类似于 FVS 问题的以上各类定义。MFAS 和 MWFAS 分别为边数最少的 FAS 问题和权值最小的 FAS 问题，PFAS 为边数不超过 k 的 FAS 问题，PW-FAS 为权值不超过 k 的 FAS 问题，PW-MFAS 为边数不超过 k 的权值最小的 FAS 问题。

本文第 2 节介绍无向图中最小 FVS 问题的研究现状；第 3 节给出了无向图中 PFVS 问题的研究现状；第 4 节主要描述有向图中 FVS 的研究现状；第 5 节主要介绍特殊图中 FVS 问题的研究现状；第 6 节讨论了 FAS 问题的研究现状；最后给出了今后 FVS 问题研究中值得关注的几个问题。

2　无向图中的 MFVS 和 MWFVS 问题

本节主要介绍无向图中 MFVS 和 MWFVS 问题的研究成果，主要有近似算法和精确算法。

(1)近似算法

由于 FVS 问题是 NP 完全问题，除非 $NP=P$，否则 FVS 问题不可能有多项式时间算法，因此前期人们对最小 FVS 问题(包括 MFVS 和 MWFVS 问题)研究主要集中在多项式时间可解的近似算法。近似算法在最差情况下找到的近似解与最优解的比值为算法的近似度，近似算法主要以近似度作为算法的衡量指标。关于 MFVS 和 MWFVS 问题近似算法的研究成果比较见表 1，对于 MWFVS 问题，近似算法的近似度为近似解与最优解的权值的比值，对于 MFVS 问题，近似度为近似解与最优解所含顶点数目的比值。

表 1　FVS 近似算法的近似度比较

作者/文献	MWFVS	MFVS
Erdös，Pósa[8]	——	$\log n$
Monien，Schulz[9]	——	$\sqrt{\log n}$
Bar-Yehuda，et al[10]	$\min(2\Delta^2,4\log n)$	4
Becker，Geiger[11]	2	2
Bafna[12]	$2-2/(2\Delta-2)$	$2-2/(2\Delta-2)$

Erdös 和 Pósa 早在 1962 年就提出了无向图 MFVS 问题的近似度为 $\log n$ 的近似算法[8]。他们得出性质：对于顶点度数大于 2 的图，图中最短圈的长度不超过 $2\log n$。算法首先将图 G 简化为度数大于 2 的图 G'，找出图 G' 中最短圈 C，然后把 C 中点全部加入 FVS，并从图 G' 中删除，重复以上过程直到图中不含有圈，这样得到近似度为 $2\log n$ 的近似算法。1981 年，Monien 和 Schulz 在 Erdos 和 Posa 的算法基础上进行了改进，提出无向图 MFVS 的近似度为 $\sqrt{\log n}$ 的近似算法[9]。

Bar-Yehuda 等对 MWFVS 利用原始对偶算法(primal-dual algorithm)提出了近似度为 $\min(2\Delta^2,4\log n)$ 的近似算法，其中 Δ 为图 G 中顶点的最大度数；对于 MFVS 问题提出近似度为 4 的近似算法[10]。

Becker 和 Geiger 利用贪心法，提出无向图 MWFVS 和 MFVS 近似度为 2 的近似算法[11]。Bafna 将点覆盖的近似算法中所用的"局部近似"理论一般化，对无向图 MWFVS 和 MFVS 提出了近似度为 $2-2/(2\Delta-2)$ 的近似算法，其中 Δ 为图 G 中顶点的最大度数[12]。Chudak 等从原始对偶方法的角度解释了文献[11,12]的近似算法[13]。

(2)精确算法

近似算法只能得到近似解而无法得到精确解，甚至许多问题很难求得近似解。于是，人们开展了对 FVS 精确算法的研究。很明显，通过找 n 个点的 2^n 个子集就可以找到最小的 FVS。

由于 MFVS 问题与最大导出森林(MIF)问题等价，不在图的 MIF 中的点集构成图的 MFVS，即通过求图的 MIF 可以求得 MFVS。Razgon 等用分枝-剪枝策略(Branch—Prune)找 MIF，算法时间复杂度为 $O(1.8899^n)$，其中 n 是 G 中顶点数目[14]。在 Razgon 等算法基础上，Fomin 等通过改进算法的分支过程，利用加权分治(Measure and Conquer)技术对 MFVS 提出了时间复杂度为 $O(1.7548^n)$ 的精确算法[15]。

3　无向图中的 PFVS 问题

在实际应用中，图比较复杂且图中顶点数 n 往往比较大，FVS 的所有精确算法都无法应用于实际。但在很多实际应用中，FVS 的大小 k 比 n 小很多，而且有些应用不一定要找最小的 FVS，而只要求小于某个值的 FVS，于是人们将 FVS 问

题参数化。以下介绍参数化 FVS 问题的算法。

人们对无向图参数化 FVS 问题进行了大量的研究，FVS 问题的 FPT 算法主要研究成果比较见表 2。

表 2 FVS 的参数算法比较

问题	文献	时间复杂度	主要技术
PFVS	[3,4]	$O(17(k^4)!\ n^{O(1)})$	树分解
	[16]	$O((2k+1)^k n^2)$	分支搜索
	[17]	$O(\max\{12^k,(4\log k)^k)\} n^{2.376})$	
	[18]	$O((2\log k+2\log\log k+18)^k n^2))$	
	[6]	$O((12\log k/\log\log k+6)^k n^c)$	
	[20]	$O((37.7)^k n^2)$	迭代压缩
	[21]	$O((10.6)^k n^3)$	
	[7]	$O(5^k kn^2)$	迭代压缩与分支
PW-FVS	[6]	$O((24\log k/\log\log k+12)^k n^\omega)$	分支搜索
PW-MFVS	[7]	$O(5^k kn^2)$	迭代压缩与分支

Downey 和 Fellows[3]，Bodlaender[4] 证明了无向图中 PFVS 问题是 FPT 问题。其中文献[4]指出：如果从图 G 中可以找到 $k+1$ 个点不相交的圈，那么图 G 的 FVS 肯定大于 k；如果找不到图 G 的 $k+1$ 个点不相交的圈，那么可以在 $O(n)$ 时间内找到一个宽度不大于 $12(k+1)^2-27(k+1)+16$ 的树分解。如果把 k 看作常数，利用动态规划技术，可以在线性时间内找到一个最优的 FVS，由此得出 PFVS 问题是 FPT 问题。

文献[16-18,6]中的 FPT 算法均采用了分支搜索技术。首先找出图中最短圈（图中最短圈可在 $O(\min\{mn,n^\omega\})$ 时间内找出，n^ω 为求两个 n 维矩阵乘积的时间[19]）或近似最短的圈 C（最短圈的长度加 1 的圈，在 $O(n^2)$ 时间内可以找出这样的圈[19]），然后对圈 C 上的点进行分支，即选取圈 C 上各顶点 v，将 v 加进 FVS 并将实例简化为 $(G\backslash v,k-1)$，最后求实例 $(G\backslash v,k-1)$ 的 FVS，算法时间复杂度取决于最短圈的上界。Downey 和 Fellows 得出结论：对于度数不小于 3 的图，如果存在一个含 k 个顶点的 FVS，则图中最短圈的长度不超过 $2k$，并据此结论提出了一个时间复杂度为 $O((2k+1)^k n^2)$ 的 FPT 算法[16]。Raman 等得出结论：对于度数不小于 3 的图，当 $k\leqslant c\sqrt{n}$ 且最短圈的长度大于 12 时，图 G 的 FVS 大于 k；当 $k>c\sqrt{n}$ 时，图中最短圈的长度不超过 $4\lg k$。由此可知，图中最短圈的长度不超过 $\min\{12,4\lg k\}$，从而提出了一个时间复杂度为 $O(\max\{12^k,(4\lg k)^k\}n^\omega)$ 的 FPT 算法[17]。基于文献[17]的研究工作，Kanj 等利用极值图理论得出以下结论：对于一个顶点度数至少为 3 的图 G，假设 FVS 最少含 r 个点，$n\geqslant3$，则图 G 存在一个长度不超过 $\max\{2\lg r+17,2\lg n-10\}$ 的圈；如果图 G 中所有圈的长度大于 $\max\{12,\lg n\}$，则 $\lg n\leqslant\lg r+\lg\lg r+13$，由此提出了一个时间复杂度为 $O((2\lg k+12\lg\lg k+18)^k n^2)$ 的 FPT 算法[18]。文献[6]中得出结论：如果图 G 中顶点的度数至少是 3，且最小 FVS 的大小为 $n^{1-\varepsilon}/3$，则图 G 中存在一个长度不超过 $6/\varepsilon$ 的圈（$1/2\leqslant\varepsilon\leqslant1$），从而提出一个时间复杂度为 $O((12\log k/\log\log k+6)^k n^\omega)$ 的 FPT 算法。同时文献[6]中对 PW-FVS（权值不大于 k 的 FVS 问题）也进行了分析：对于顶点权值都为大于 1 的实数的带权无向图 G，如果图 G 中顶点的度数至少是 3 且 MFVS 的大小为 $n^{1-\varepsilon}/3$，则图 G 中存在一个长度不超过 $12/\varepsilon$ 的圈（$0<\varepsilon<1$），从而得到 PW-FVS 问题的时间复杂度为 $O((24\log k/\log\log k+12)^k n^\omega)$ 的 FPT 算法；对于顶点权值都为一般实数的带权无向图 G，除非 P=NP，否则 PW-FVS 问题不存在 FPT 算法。

随着迭代压缩技术的提出，人们开始将迭代压缩技术应用于 FVS 问题，具体可描述为：首先考虑由图 G 中一部分点导出的子图 G_0，F 为图 G_0 的 k 大小的 FVS，然后往 G_0 中添加一个 $V(G)-V(G_0)$ 中点 v，$G_0=G[V(G_0)\cup\{v\}]$，则 $F=F\cup\{v\}$ 为图 G_0 的 $k+1$ 大小的 FVS。基于 F 找图 G_0 中不大于 k 的 FVS F'，接着继续往图 G_0 添加新点，重复以上过程，直到 G_0 等于 G 且找到了图 G 的不大于 k 的 FVS。如果对于某个 G_0 找不到不大于 k 的 FVS，停止算法并说明图 G 不存在不大于 k 的 FVS。给定一个图 $G(V,E)$ 和图 G 的大小为 $k+1$ 的 FVS F，图 G 中不大于 k 的 FVS F' 可以看成由 F 的子集 F_1 和 $V-F$ 的子集 F_2 的并集构成，即 $F'\cap F=F_1$，$F'\cap(V-F)=F_2$。F_1 可通过穷举 F 的不大于 k 的子集找到，如果某个子集 F_1 是图 G 的 FVS 与 F 的交集，则 F 被划分为两个子集 F_1 和 $S(S=F-F_1)$，且 F_1 是图 $G[F]$ 的 FVS，$G[S]$ 是森林，可知图 $G[V-F_1]$ 的 FVS 与 F_1 的并集将是图 G 的 FVS。由此可知，找图 G 的不大于 k 的 FVS F' 的问题可以转化为找图 $G[V-F_1]$ 的不大于 $|S|-1$ 的 FVS F_2 的问题，其中 F_2 是 $V-F$ 的子集。文献[20,21]都是通过穷举 $V-F$ 所有不大于 $|S|-1$ 的子集找图 $G[V-F_1]$ 的 FVS F_2。其中，文献[20]证明 $|V-F|\leqslant14|S|\leqslant14k+14$，求得算法时间为 $O((37.7)^k n^2)$；文献[21]证明出 $|V-F|\leqslant4k$，求得算法时间为 $O((10.567)^k n^3)$。Chen 等在利用迭代压缩的基础上，利用分支搜索技术提出 PFVS 问题时间复杂度为 $O(5^k kn^2)$ 的 FPT 算法，并首次对带权图提出 PW-MFVS（权值最小的含有顶点数不超过 k 的 FVS）问题的 FPT 算法，算法时间复杂度也为 $O(5^k kn^2)$[7]。

另外，人们也研究了无向图中带权和不带权 FVS 问题的随机参数算法。Becker 等提出：对不带权图，找到一个含 k 个顶点的 FVS 的概率至少为 $1-(1-1/4^k)^{c4^k}$，其中 c 为一个任意的大于 1 的常数，算法时间复杂度为 $O(4^k kn^2)$；对带权图，找到一个权值最小的含有顶点数不超过 k 的 FVS 的概率至少为 $1-(1-1/6^k)^{c6^k}$，算法时间复杂度为 $O(6^k kn^2)$[22]。

FVS 问题的核心化是参数化 FVS 问题的重要研究内容。如果在求解 FVS 之前，利用核心化算法对问题规模进行简化，将大大提高求解 PFVS 的效率。Fellows 首次证明 PFVS 问题存在多项式的核，核大小为 $O(k^{11})$[23]。Bodlaender 对简化规则进行改进且对图进行新的结构划分，得到大小为 $O(k^3)$ 的核[24]。在文献[23,24]中提出的规约规则基础上，Thomassé 最近基于 Hall 的 Matching 理论及 Gallai 的关于 A-path（端点在集合 A 中，中间点不在 A 中的路径）的 Min/Max 结论，新增了一条规约规则，得到 $O(k^2)$ 的核[25]。

4 有向图中的 FVS 问题

Karp 在 1972 年证明了有向图的 FVS 问题是 NP-完全问题[2]。对有向图的 FVS 问题的研究进展较为缓慢，主要包括近似算法、精确算法和参数算法的研究，但在精确算法的研究中没有提出有效的技术对其时间复杂度进行分析。

Leighton 等对有向图 MFVS 问题提出了近似度为 $O(\log^2 n)$ 的近似算法[26]。Even 等提出了有向图 MFVS 问题和 MWFVS 问题近似度为 $O(\log n\cdot\log\log n)$ 的近似算法[27]。文献[28]对有向图 MWFVS 问题提出近似度为不超过图中最长简单圈长度的近似算法。

Smith 和 Walford 首次提出有向图 MFVS 的精确算法，算法对图进行划分，得到的运行时间是指数时间，但是对于一些特殊图可以在多项式时间内返回一个最优解[29]。之后人们提出的基于枚举的精确算法都是通过对图进行简化使算法得以改进。Cheng 利用枚举和简化方法对算法进行了改进[30]。Orenstein 等利用基于图简化和有效的图划分的枚举过程，提出一种求解 MFVS 的算法[31]。但是这些文献只对算法子过程进行了时间复杂度分析，都没有提出一种有效的方法计算整个算法的时间复杂度。

有向图 PFVS 是否是 FPT 问题曾经在很长时间内都是个开放性难题。2008 年，Chen 等在文献[5]中证明了 PFVS 问题是 FPT 问题，并提出了一个时间复杂度为 $O(4^k k!\, n^{O(1)})$ 的 FPT 算法。算法包含以下 4 个步骤：首先，利用迭代压缩技术，将问题转化为有向图 PFVS 规约问题(DFVS REDUCTION)：输入一个有向图 D、参数 k 和 D 的一个 $k+1$ 大小的 FVS F，找图 D 的不大于 k 的 FVS。其次，通过穷举 F 中不大于 k 的子集 I(最多 $2k+1$ 个)，将有向图 PFVS 规约问题转化为不相交的有向图 PFVS 规约问题(DISJOINT DFVS REDUCTION)：给定有向图 D 的一个 $k+1$ 大小的 FVS F，找图 D 中不大于 k 且与 F 不相交的 FVS。再次，将给定的 FVS F 中的点排序(有 $(k+1)!$ 种排序)，对每种排序，根据有向图中 FVS 问题与 Multicut 问题的关系，将不相交的有向图 PFVS 规约问题转化为带限制条件的分割问题(SKEW SEPARATOR)：给定两个只包含 F 中点的集合序列$[S_1,\cdots,S_l]$和$[T_1,\cdots,T_l]$，最多删除图 D 中 k 个不属于 F 的点，使得对于 $i\geqslant j$，S_i 和 T_j 间没有路径。最后，参照文献[32]中对于参数化 Multicut 问题所用的算法技术，可在 $O(4^k n^{O(1)})$ 时间求解带限制条件的分割问题。最终得到了一个时间复杂度为 $O(4^k k!\, n^{O(1)})$ 的有向图 PFVS 问题的 FPT 算法。

5 特殊图中的 FVS 问题

对于特殊图上的 FVS 问题，人们也进行了大量的研究。某些特殊的应用对应一些在具有特殊性质的图上的 FVS 问题，而特殊图上的 FVS 问题比一般图上的 FVS 问题更容易，使得在特定条件下解决 FVS 问题显得更有意义。本节列举了一些特殊图上的 FVS 问题，除了锦标赛图和平面图上的 FVS 问题是 NP 难问题外，其它特殊图上的许多 FVS 问题都是多项式可解的，下面分别简要阐述各特殊图中 FVS 问题的研究现状。表 3 列出了多项式时间可解的特殊图上 FVS 问题的主要研究成果。

表 3 多项式时间可解的特殊图上 FVS 问题的主要研究成果

特殊图类别	MWFVS	MFVS
可简化流图	$O(mn^2\log(n^2/m))$[47]	线性时间[46]
弦图	——	多项式[48,49]
排列图	$O(nm)$[52]	——
区间图	$O(n\sqrt{\log C})$[55]	$O(n+m)$[55]
AT-Free 图	——	$O(n^8 m^2)$[56]
钻石图	线性时间[57]	——
凸二分图	$O(\lvert A\rvert^3+\lvert A\rvert^2\lvert E\rvert)$[59]	——
Cocomparability 图	$O(n^2 m)$[59]	——

(1) 锦标赛图上的 FVS 问题

锦标赛图(Tournament)$T=(V,E)$指任意两个顶点之间有且仅有一条有向边的图。锦标赛图上的 FVS 问题是 NP-完全问题[33]。对于锦标赛图上的 MWFVS 问题，文献[34]利用局部近似技术给出一个近似度为 2.5 的近似算法。

只有当锦标赛图 T 中存在有向三角形时，图 T 中才存在有向圈。那么，对于锦标赛图 T 上的 PFVS 问题，通过找出图 T 中一个有向三角形然后再对三角形上的点进行分支，容易得出时间为 $O(3^k n^3)$ 的 FPT 算法[35]。在锦标赛图上的 FVS 问题也可以看作 3-Hitting Set 问题(FVS 是锦标赛图中所有有向三角形的 Hitting Set)，利用文献[36]中 3-Hitting Set 问题的 FPT 算法，可在 $O(2.076^k+n^3)$ 时间内求解锦标赛图上的 PFVS 问题。Dom 对锦标赛图上的 PFVS 问题利用迭代压缩技术提出时间为 $O(2^k\cdot n^2(\log n+k))$ 的 FPT 算法，同时将问题核心化，得到大小为 $O(k^3)$ 的核[37]。

Raman 对锦标赛图上的 PW-FVS 问题进行了研究[38]：当顶点权值为正整数时，PW-FVS 问题的难度和 PFVS 问题的难度一样，通过转化，可以利用 3-Hitting Set 的 FPT 算法；对于顶点权值为不小于 1 的实数的锦标赛图，提出了一个时间复杂度为 $O(2.4143^k n^\omega)$ 的 FPT 算法，其中 n^ω 为求矩阵乘积的时间；根据文献[33]关于 FVS 问题的规约，证明了顶点权值为一般实数的锦标赛图上的 PW-FVS 问题不是 FPT 的，除非 P=NP。

二分锦标赛图(Bipartite Tournament)是有向的完全二分图，且两个端点之间只有一条有向边。Cai 等证明二分锦标赛图上的 MFVS 问题是 NP-完全问题，并提出了一个近似度为 3.5 的近似算法[39]。和一般锦标赛上的 FVS 问题一样，二分锦标赛图上的 PFVS 问题可转化为 4-Hitting Set 问题。对于二分锦标赛图上的 PW-FVS 问题，参照文献[40]中带权 4-Hitting Set 的 FPT 算法，能得出时间复杂度为 $O(3.12^k n^4)$ 的 FPT 算法。Sasatte 利用二分锦标赛图中圈的 packing 和 covering 的 MIN-MAX 关系，对于权值为整数的 PW-FVS 问题提出了一个时间复杂度为 $O(3^k n^2+n^3)$ 的 FPT 算法[41]。

(2) 平面图上的 FVS 问题

平面图的定义：若能把图 G 画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称 G 可嵌入平面，或称 G 是可平面图。可平面图在平面的一个嵌入称为平面图。

Yannakakis 证明了平面图(有向和无向)上的 FVS 问题是 NP 难问题。即使每个顶点的入度和出度的大小都不超过 3，有向平面图上的 FVS 问题也是 NP 难问题[42]。

对于无向平面图上的 MWFVS 问题，Bar-Yehuda 给出了一个近似度为 10 的近似算法[10]。Goemans 和 Williamson 利用原始对偶方法给出了一个近似度为 9/4 的近似算法[43]。Chudak 同样运用原始对偶方法将此近似度改进到 2[13]。

Ton Kloks 等在文献[44]中主要运用树分解技术，利用平面图上 FVS 的大小与树宽之间的关系，对平面图 PFVS 问题提出时间复杂度为 $O(c^{\sqrt{k}\log k}+n)$ 的 FPT 算法，并给出了一个大小为 $O(k^3)$ 的核。Bodlaender 等利用局部简化技术，提出多条简化规则，得到了一个大小为 $112k$ 的线性核[45]。

(3) 可简化流图上的 FVS 问题

可简化流图(Reducible Flow Graph)的定义：对于一个有根节点的有向图 G，如果从它的根出发，利用深度优先搜索所得到的有向无环图是唯一的，那么图 G 就是可简化流图。

对于可简化流图上的 MFVS 问题，Shamir 给出了一个线性时间算法[46]。而 Ramachandran 对于可简化流图上的

MWFVS 问题，给出了一个时间复杂度为 $O(mn^2\log(n^2/m))$ 的多项式时间算法[47]。

(4) 弦图上的 FVS 问题

弦图(Chordal Graph)的定义：图 G 是一个弦图，当且仅当图 G 中所有长度不小于 4 的圈含有弦。

对于弦图上的 MFVS 问题 Yannakakis 和 Gavril 首次给出了一个多项式时间的算法[48]，而 Corneil 和 Fonlupt 将弦图上的 MFVS 问题作为弦图上的团覆盖问题的特例，也给出了一个相应的多项式时间算法[49]。

(5) 排列图上的 FVS 问题

排列图(Permutation Graph)的定义：给定数字 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 π，将此排列构造出无向图 $G[\pi]=(V,E)$，V 是顶点集$\{1,2,\cdots,n\}$，E 是边集：$(i,j)\in E$ 当且仅当$(i-j)(\pi_i-\pi_j)<0$。如果存在一个排列 π，使得图 G 全等于 $G[\pi]$，那么图 G 就是一个排列图。

对于排列图上的 MWFVS 问题，在 1987 年 Brandstädt 和 Kratsch 利用动态规划技术给出了一个时间复杂度为 $O(n^6)$ 的算法[50]。在 1992 年，Brandstädt 将结果改进为 $O(n\bar{m})$，其中 $\bar{m}$ 是排列图 G 的补图中边的数目[51]。1994 年，Daniel Liang 利用动态规划技术提出了一个时间复杂度为 $O(nm)$ 的算法[52]。

(6) 区间图上的 FVS 问题

区间图(Interval Graph)的定义：对于无向图 $G(V,E)$，如果能使得顶点集合 V 与实轴上的区间集合 I 形成如下的一一对应关系：两顶点相邻当且仅当它们对应的区间的交集不为空，那么，图 G 就是一个区间图。

对于区间图上的 MFVS 问题，Marathe 等首次提出了一个多项式时间算法[53]。Lu 和 Tang 利用动态规划技术对区间图上的 MWFVS 问题提出了一个时间复杂度为 $O(n+m)$ 的算法[54]，而 Saha 和 Pal 给出了一个时间复杂度为 $O(n+m)$ 的区间图上的 MFVS 问题的算法和一个时间复杂度为 $O(n\sqrt{\log C})$ 的区间图上的 MWFVS 问题的多项式时间算法(C 是图 G 中最长的路径长度)[55]。

(7) 无-AT 图上的 FVS 问题

无-AT 图(AT-free Graph)的定义：对于三个互不相邻的顶点，如果任意两点之间存在一条路径不经过第三个顶点的邻居节点，那么这三个点就形成了一个星状三元组(asteroidal triples，简称 AT)，一个不含 AT 的图是 AT-free 图。

对于 AT-free 图上的 MFVS 问题，Kratsch 给出了一个时间复杂度为 $O(n^8m^2)$ 的多项式时间算法[56]。

(8) 钻石图上的 FVS 问题

钻石图(Diamond Graph)上的定义：钻石图 $D=(V,E)$ 是一个包含两个尖端 r 和 z(其中 $r,z\in V$)的带权图，且满足如下两个条件：(1) 每一顶点 $v\in V$ 被一条 r 与 z 之间的简单路径包含；(2) $D-\{z\}$ 是一棵树。

对于钻石图上的 MWFVS 问题，F. Carrabs1 等利用动态规划技术得到了一个线性时间的算法[57]。Yen-Lian Chen 等在文献[58]中研究了此问题的两个变种：并联双钻石图和串联双钻石图上的 FVS 问题，并给出了相应的线性时间算法。

(9) 凸二分图上的 FVS 问题

凸二分图(Convex Bipartite Graph)的定义：对于二分图 $G(A,B,E)$，A 和 B 是凸二分图的两个不相交的顶点集合，E 是边集，如果存在集合 A 的一个全序使得：对于任意顶点 $b\in B$，A 中所有与顶点 b 相连的顶点形成一个区间，那么图 G 就是一个凸二分图。

Liang 和 Chang 利用动态规划技术给出了凸二分图中 MWFVS 的时间复杂度为 $O(|A|^3+|A|^2|E|)$ 的算法[59]。

(10)比较补图上的 FVS 问题

比较补图(Cocomparability Graph)的定义：给定一个偏序$(S,<)$，构造一个无向图 G，使得 S 中的各元素对应 G 中各顶点，如果两个元素 x 和 y 在 S 中存在关系 $x<y$ 或 $y<x$，则在图 G 中与此两个元素对应的两个顶点 v_x 和 v_y 间存在一条边，这样构成的图 G 为比较图，比较图 G 的补图就为比较补图。

Coorg 和 Rangan 给出了时间复杂度为 $O(n^4)$ 的比较补图中 MWFVS 问题的算法[60]。Liang 和 Chang 利用动态规划技术，深入分析了此特殊图的结构特性，给出了一个时间复杂度为 $O(n^2m)$ 的改进算法[59]。

6 FAS 问题

在无向图中反馈边集问题可以转化为找图的生成树(或生成森林)问题，不在生成树(或生成森林)中的边为无向图的反馈边集。而求一个图的生成树(或生成森林)的时间复杂度为 $O(n\log n)$[61]，因此无向图中反馈边集问题可以在 $O(n\log n)$时间内解决。

对于一般有向图，Even 等在文献[27]中提出了 FAS 问题和 FVS 问题相互转化的方法。由于 FAS 问题转化为 FVS 问题的时间是多项式的，因此有向图中的 FAS 问题和有向图中的 FVS 问题难度一样。以下介绍一般有向图中 FAS 的研究现状以及备受关注的锦标赛图中 FAS 问题的研究现状。

6.1 有向图中的 FAS 问题

Leighton 和 Rao 给出有向图 MFAS 问题的第一个近似算法，通过应用有向割集(将图分成近似相同两部分的割集)的近似度为 $O(\log n)$的近似算法得到近似度为 $O(\log^2 n)$ 的近似算法[26]。Seymour 随后进行了改进，提出了一个不带权有向图 FAS 的近似度为 $O(\log n\log\log n)$的近似算法[62]。

Even 等将带权有向图 FAS 问题规约为有向循环网络(circular networks)中最小容量多路分割问题(minimum capacity multicut)，提出了一个近似度为 $O(\log^2|X|)$的算法，其中 X 是给定的顶点集合，从图中删除 FAS 中边将使得图中没有圈与 X 中点相交[27]。

根据 Even 等提出的将有向图 FAS 问题转化为有向图 FVS 问题的方法，文献[5]中证明了有向图 PFVS 问题是 FPT 问题，则有向图 PFAS 问题也是 FPT 问题。

6.2 锦标赛图中的 FAS 问题

锦标赛图上的 FAS 问题是 NP-难问题[63,64]。Ailon 等对锦标赛图上的 MFAS 问题提出近似度为 3 的随机近似算法。对于锦标赛图上的 MWFAS 问题，当满足概率约束(对任意顶点对 u 和 v，$w_{uv}+w_{vu}=1$)、满足三角不等约束($w_{ij}\leqslant w_{ik}+w_{kj}$)、满足概率和三角不等约束时能得到的近似度分别为 5，3 和 2 的随机近似算法[65]。文献[66]对满足概率约束的锦标赛图的 MWFAS 问题提出近似度为 3 的确定近似算法。Coppersmith 对锦标赛图的 MFAS 问题提出近似度为 $5-\varepsilon$ 的确定性近似算法以及对边的权值满足概率约束的 MWFAS

问题提出近似度为 5 的近似算法[67]。

有向图的 PFVS 问题和 PFAS 问题可以相互转化，而在锦标赛图中不能直接用 PFVS 的算法来解决 PFAS 问题。Raman 等在文献[35]中证明锦标赛图上的 PFAS 问题是 FPT 问题，并提出时间复杂度为 $O((c\sqrt{k/e})^k n^\omega \lg n)$ 的 FPT 算法。之后 Raman 等在文献[38]中其对锦标赛图中边的权值至少是 1 的 PW-FAS 问题提出时间复杂度为 $O(2.415^k n^\omega)$ 的 FPT 算法，其中 n^ω 为求矩阵乘积的时间。Dom 等对锦标赛图的 PFAS 问题提出核心化方法，得到大小为 $O(k^2)$ 的核[37]。

对于二分锦标赛图的 FAS 问题，文献[68]证明了此问题也是 NP-完全问题。Gupta 对于二分锦标赛图中的 MFAS 问题提出了近似度都为 4 的随机近似算法和确定性近似算法，并且也对多分锦标赛图上的 MFAS 问题提出了一个近似度为 4 的确定性近似算法[69]。Guo 等证明了二分锦标赛图上的 PFAS 问题是 NP-完全问题[68]。Dom 等对二分锦标赛图上的 PFAS 问题提出了一个时间复杂度为 $O(3.38^k n^6)$ 的 FPT 算法[37]。

结束语 反馈集问题是一类重要的 NP-难问题，在很多领域有重要的应用。历年来对 FAS 问题的研究相对较少，本文重点阐述 FVS 问题的研究现状。从文中可以看出，之前研究较多的是 FVS 问题的近似算法，而随着参数计算理论的产生，推动了 FVS 问题的发展，使之成为近阶段的热点研究问题。近两三年来通过利用迭代压缩技术在无向图 FVS 的参数算法上取得了很多不错的结果，而且通过应用迭代压缩技术并将 FVS 问题转化为 Multicut 问题证明了有向图中的 PFVS 问题是 FPT 问题，这也是一个很大的突破。

通过对反馈集问题相关算法的分析和比较，使人们对反馈集问题有了全面的理解。关于反馈集问题，尤其是 FVS 问题，依然还有很多方面有待于我们进一步的研究，主要可从以下几个角度进行研究。

(1)FVS 问题的 FPT 算法研究

对于无向图，目前带权和不带权 FVS 问题最好的 FPT 算法均应用了迭代压缩和分支搜索技术，其时间复杂度为 $O(5^k kn^2)$，能否应用其它技术对算法进行改进？

对于不带权有向图，目前 PFVS 问题的时间复杂度较大，能否提出时间复杂度为 $c^k n^{O(1)}$ 的 FPT 算法，c 为常数？对于有向图中的参数化带权 FVS 问题，证明其是否是 FPT 问题仍然是一个开放性难题。

(2)FVS 问题的枚举

最近参数理论中出现了固定参数可枚举这一新概念。所谓固定参数可枚举问题(fixed-parameter enumerability)就是能在时间复杂度 $O(f(k)n^{O(1)}z^{O(1)})$ 内枚举出 z 个最优结果的 NP 难优化问题[70]。目前已经证明带权无向图 FVS 问题是 FPT 问题，能否提出一个带权无向图 FVS 问题的固定参数枚举算法？

文献[15]能够枚举出所有的极小 FVS，但是算法的时间复杂度为 $O(1.7548^n)$。如果引入参数，即枚举出所有 k 大小的 FVS 或枚举出所有小于 k 的极小 FVS，问题的复杂度将会有多大？

(3)FVS 的核心化

人们对无向图 FVS 的核心化取得了很不错的结果，通过一系列局部简化规则以及对图结构进行分析，对核大小不断地进行改进，目前最好的核大小是 $O(k^2)$，但是无向图 FVS 问题是否存在线性核还有待于进一步的研究。希望通过深入地分析 FVS 问题的结构，挖掘出更多的简化规则，或利用其他的核心化方法，如“皇冠分解”，提出更好的核心化算法。

有向图 FVS 问题的核心化也是一个很值得研究的课题，能否得到多项式的核还是一个开放性难题。

(4)特殊图中的反馈集问题

根据特定的应用，对于特殊图上 FVS 问题和 FAS 问题的研究也很有意义。本文已经列举了很多特殊图上的 FVS 问题和 FAS 问题，可以对这些问题的算法做进一步的研究，提出更好的算法，或对由实际应用而转化成的其它特殊的 FVS 问题和 FAS 问题展开研究。

参 考 文 献

[1] Festa P, Pardalos P, Mauricio, et al. Feedback set problems. Encyclopedia of Optimization [M]. Kluwer: Kluwer Academic Publishers, 2000: 209-258

[2] Karp R. Reducibility among combinatorial problems. Complexity of computer computations [M]. New York: Plenum Press, 1972

[3] Downey R, Fellows M. Fixed parameter tractability and completeness. Complexity Theory: Current Research [M]. Cambridge University Press, 1992

[4] Bodlaender H. On disjoint cycle [J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 1994, 5(1): 59-68

[5] Chen Jianer, Liu yang, O'Sullivan B, et al. A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem [C]// Proc. of the 40th annual ACM symposium on Theory of computing. New York: ACM, 2008

[6] Raman V, Saurabh S, Subramanian C. Faster fixed parameter tractable algorithms for finding feedback vertex sets [J]. ACM Transactions on Algorithms, 2006, 2(3): 403-415

[7] Chen Jianer, Fomin F, Liu Yang, et al. Improved algorithms for the feedback vertex set problems [G]// LNCS 4619: WADS 2007. Berlin: Springer, 2007: 422-433

[8] Erdös P, Pósa L. On the maximal number of disjoint circuits of a graph [J]. Math. Debrechen, 1962, 9: 3-12

[9] Monien B, Schulz R. Four approximation algorithms for the feedback vertex set problem [C]// Proc. of the 7th Conference on Graph Theoretic Concepts of Computer Science. 1981: 315-326

[10] Bar-Yehuda R, Geiger D. Approximation algorithms for the “feedback vertex set problem with applications to constraint satisfaction and bayesian inference [J]. SIAM Journal on Computing, 1998, 27(4): 942-959

[11] Becker A, Geiger D. Optimization of Pearl's method of conditioning and greedy-like approximation algorithms for the vertex feedback set problem [J]. Articial Intelligence, 1996, 83(1): 167-188

[12] Bafna V, Berman P, Fujito T. Constant ratio approximations of feedback vertex sets in weighted undirected graphs [G]// LNCS 1004: ISAAC 95. Berlin: Springer, 1995: 142-151

[13] Chudak F, Goemans M, Hochbaum D, et al. A primal-dual interpretation of two 2-approximation algorithms for the feedback vertex set problem in undirected graphs [J]. Operations Research Letters, 1998, 22: 111-118

[14] Razgon I. Exact computation of maximum induced forest [G] // LNCS 4059: SWAT 2006. Berlin: Springer, 2006: 160-171

[15] Fomin F, Gaspers S, Pyatkin A. Finding a minimum feedback vertex set in time O(1.7548^n) [G]//LNCS 4169: IWPEC 2006. Berlin: Springer, 2006: 184-191

[16] Downey R, Fellows M. Parameterized computational feasibility [C]// Proc. of Feasible Mathematics II. Birkhauser, 1995: 219-244

[17] Raman V, Saurabh S, Subramanian C. Faster fixed parameter tractable algorithms for undirected feedback vertex set [G]// LNCS 2518: ISAAC 2002. Berlin: Springer, 2002: 241-248

[18] Kanj I, Pelsmajer M, Schaefer M. Parameterized algorithms for feedback vertex set [G] // LNCS 3162: IWPEC 2004. Berlin: Springer, 2004: 235-247

[19] Itai A, Rodeh M. Finding a minimum circuit in a graph [J]. SIAM Journal on Computing, 1978, 7(4): 413-423

[20] Guo Jiong, Gramm J, Huffner F, et al. Improved fixed parameter algorithms for two feedback set problems [G] // LNCS 3608: WADS 2005. Berlin: Springer, 2005: 158-168

[21] Dehne F, Fellows M, Langston M, et al. An o($2^{o(k)}n^3$) fpt algorithm for the undirected feedback vertex set problem. Theory Comput [J]. Syst, 2007, 41(3): 479-492

[22] Becker A, Bar-Yehuda R, Geiger D. Randomized algorithms for the loop cutset problem [J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2000, 12: 219-234

[23] Burrage K, Estivill-Castro V, Fellows M, et al. The undirected feedback vertex set problem has a poly(k) kernel [G] // LNCS 4169: IWPEC 2006. Berlin: Springer, 2006: 192-202

[24] Bodlaender H. A cubic kernel for feedback vertex set [G] // LNCS 4393: STACS 2007. Berlin: Springer, 2007: 320-331

[25] Thomassé S. A quadratic kernel for feedback vertex set[C] // Proceedings SODA'09. 2009

[26] Leighton T, Rao S. An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problems with applications to approximation algorithms[C] // FOCS'88. 1988

[27] Even G, Naor S, Schieber B, et al. Approximating minimum feedback sets and multicuts in directed graphs [J]. Algorithmica, 1998, 20: 151-174

[28] DemetrescuC, Finocchi I. Combinatorial algorithms for feedback problems in directed graphs[J]. Information Processing Letters, 2003, 86(3): 129-136

[29] Smith G, Walford R. The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1975, CAS-22(1): 9-14

[30] Cheng K T, Agrawal V D. A partial scan method for sequential circuits with feedback [J]. IEEE Transactions on Computers, 1990, 39 (4): 544-548

[31] Orenstein T, Kohavi Z, Pomeranz I. An optimal algorithm for cycle breaking in directed graphs [J]. Journal of Electronic Testing: Theory and Applications, 1995, 7: 71-81

[32] Chen Jianer, Liu Yang, Lu Songjian. An improved parameterized algorithm for the minimum node multiway cut problem [G] // LNCS 4619: WADS 2007. Berlin: Springer, 2007: 495-506

[33] Speckenmeyer E. On feedback problems in digraphs [G]// LNCS 411: WG 89. Berlin: Springer, 1990: 218-231

[34] Cai Maocheng, Deng Xiaotie, Zang Wenan. An approximation algorithm for feedback vertex sets in tournaments [J]. SIAM Journal on Computing, 2001, 30(6): 1993-2007

[35] Raman V, Saurabh S. Parameterized Complexity of Directed Feedback Set Problems in Tournaments [G]//LNCS 2748: WADS 2003. Berlin: Springer, 2003: 484-492

[36] Wahlström M. Algorithms, Measures and Upper Bounds for Satisfiability and Related Problems [D]. Department of Computer and Information Science, Linköpings universitet, Sweden, 2007

[37] Dom M, Guo Jiong, Hüffner F, et al. Fixed-parameter tractability results for feedback set problems in tournaments [G] // LNCS 3998: CIAC. Berlin: Springer, 2006: 320-331

[38] Raman V, Saurabh S. Improved Parameterized Algorithms for Feedback Set Problems in Weighted Tournaments [G] // LNCS 3162: IWPEC 2004. Berlin: Springer, 2004: 260-270

[39] Cai Maocheng, Deng Xiaotie, Zang Wenan. A min-max theorem on feedback vertex sets [J]. Mathematics of Operations Research, 2002, 27(2): 361-371

[40] Fernau H. Parameterized algorithms for hitting set: The weighted case [G] // LNCS 3998: CIAC. Berlin: Springer, 2006: 332-343

[41] Sasatte P. Improved FPT algorithm for feedback vertex set problem in bipartite tournament [J]. Information Processing Letters, 2008, 105: 79-82

[42] Yannakakis M. Node and edge-deletion NP-complete problems [C]// Proc of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, ACM, 1978: 253-264

[43] Goemans M, Williamson D. Primal-dual approximation algorithms for feedback problems in planar graphs [J]. Mathematical society, 1998

[44] Kloks T, Lee C, Liu J. New Algorithms for k-Face Cover, k-Feedback Vertex Set, and k-Disjoint Cycles on Plane and Planar Graphs [G] // LNCS 2573: WG02. Berlin: Springer, 2002: 282-295

[45] Bodlaender H, Penninkx E. A linear kernel for planar feedback vertex set [G] // LNCS 5018: IWPEC 2008. Berlin: Springer, 2008: 160-717

[46] Shamir A. A linear time algorithm for finding minimum cutsets in reduced graphs [J]. SIAM Journal On Computing, 1979, 8 (4): 645-655

[47] Ramachandran V. Finding a minimum feedback arc set in reducible flow graphs [J]. Journal of Algorithms, 1988, 9(3): 299-313

[48] Yannakakis M, Gavril F. The maximum k-colorable subgraph problem for chordal graphs [J]. Information Processing Letters, 1987, 24(2): 133-137

[49] Corneil D, Fonlupt J. The complexity of generalized clique covering[J]. Discrete Applied Mathematics, 1988, 22: 109-118

[50] Brandstädt, Kratsch. On domination problems for permutation and other graphs [J]. Theoretical Computer Science, 1987, 54: 181-198

[51] Brandstädt. On improved time bounds for permutation graph problems [G]//LNCS 657: WG 92. Berlin: Springer, 1992: 1-10

[52] Daniel Liang. On the feedback vertex set problem in permutation graphs [J]. Information Processing Letters, 1994, 52(3): 123-129

[53] Marathe M, Ravi R, Pandu C. Generalized vertex covering in interval graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 1992, 39: 87-93

[54] Lu Chinlung, Tang Chuanyi. A linear-time algorithm for the weighted feedback vertex problem on interval graphs [J]. Information Processing Letters, 1997, 61: 107-111

[55] Saha A, Madhumangal P. An Algorithm to find a minimum

feedback vertex set of an interval graph [J]. Advanced Modeling and Optimization, 2005, 7(1): 99-116

[56] Kratsch D, Müller H, Todinca I. Feedback vertex set and longest induced path on AT-free graphs [G]// LNCS 2880: WG 2003. Berlin: Springer, 2003: 309-321

[57] Carrabs F, Cerulli R, Gentili M. Minimum weighted feedback vertex set on diamonds [J]. Information Processing Letters, 2005, 94(1)

[58] Chen Yenlian, Wang Y, Lee C. On the minimum weighted feedback vertex set problem on the parallel and serial connection of diamonds [C]// The 24th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory. 2007

[59] Liang Y, Chang M. Minimum feedback vertex sets in cocomparability graphs and convex bipartite graphs [J]. Acta Informatica, 1997, 34: 337-346

[60] Coorg S, Rangan C. Feedback vertex set on cocomparability graphs [J]. Networks, 1995, 26: 101-111

[61] Cormen T, Leiserson C, Rivest R, et al. Introduction to Algorithms, Second Edition [M]. McGraw-Hill Book Company, Boston, MA, 2001

[62] Seymour P. Packing directed circuits fractionally [J]. Combinatorica, 1995, 15: 281-288

[63] Charbit P, Thomassé S, Yeo A. The Minimum Feedback Arc Set Problem is NP-Hard for Tournaments [J]. Combinatorics, Probability and Computing, 2007, 16: 1-4

[64] Alon N. Ranking tournaments [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2006, 20(1): 37-142

[65] Ailon N, Charikar M, Newman A. Aggregating inconsistent information: ranking and clustering [C]//STOC 2005. New York: ACM, 2005

[66] Zuylen A. Deterministic approximation algorithms for clustering problems [R]. Ithaca, NY: School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, 2005

[67] Coppersmith D, Fleischer L, Rudra A. Ordering by weighted number of wins gives a good ranking for weighted tournaments [C]// SODA 2006. New York: ACM, 2006

[68] Guo Jiong, Hüffner F, Moser H. Feedback Arc Set in Bipartite Tournaments is NP-Complete [J]. Information Processing Letters, 2007, 102: 62-65

[69] Gupta S. Feedback Arc Set Problem in Bipartite Tournaments [J]. Information Processing Letters, 2008, 105: 150-154

[70] Chen Jianer, Kanj I, Meng Jie, et al. On the effective enumerability of NP problems [G]// LNCS 4169: IWPEC 2006. Berlin: Springer, 2006: 215-226

(上接第 25 页)

[53] Wagner D, Dean D. Intrusion Detection via Static Analysis [C]// Proc. of 2001 IEEE Symp. on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 2001: 156-168

[54] Liu Z, Bridges S M, Vaughn R B. Combining Static Analysis and Dynamic Learning to Build Accurate Intrusion Detection Models [C]// Proc. of the 3rd IEEE International Workshop on Information Assurance. College Park, Maryland: IEEE Computer Society Press, 2005: 164-177

[55] Feng H, Kolesnikov O, Fogla P, et al. Anomaly detection using call stack information[C]// IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 2003: 62-75

[56] Feng H H, Giffin J T, Huang Y, et al. Formalizing Sensitivity in Static Analysis for Intrusion Detection[C]// Proc. of 2004 IEEE Symp. on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 2004: 194-208

[57] Giffin J T, Jha S, Miller B P. Efficient Context-sensitive Intrusion Detection [C]// 11th Annual Network and Distributed Systems Security Symposium. 2004

[58] 陆炜，曾庆凯. 一种基于控制流的程序行为扩展模型[J]. 软件学报, 2007, 18(11): 2841-2850

[59] 李闻，戴英侠，连一峰，等. 基于混杂模型的上下文相关主机入侵检测系统[J]. 软件学报, 2009, 20(1): 138-151

[60] Gopalakrishna R, Spafford E H, Vitek J. Efficient Intrusion Detection Using Automaton Inlining [C] // Proc. of 2005 IEEE Symp. on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 2005: 18-31

[61] Esponda F, Forrest S, Helman P. A Formal Framework for Positive and Negative Detection Schemes[J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, PART B, 2004, 34(1): 357-373

[62] Lee W, Xiang D. Information-theoretic measures for anomaly detection[C]// Proc. of the 2001 IEEE Symp. on Security and Privacy. Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 2001: 130-143

[63] Tan K M C, Maxion R A. "Why 6?" defining the operational limits of stide, an anomaly-based intrusion detector[C]// Proc. of 2002 IEEE Symp. on Security and Privacy. Berkeley, CA: IEEE Computer Society Press, 2002: 173-186

[64] Esponda F, Forrest S, Helman P. Negative representations of information[J]. International Journal of Information Security, 2009, 8(5): 331-345

[65] Mutz D, Robertson W, Vigna G, et al. Exploiting Execution Context for the Detection of Anomalous System Calls[C]// Proc. of the 10th International Symposium on Recent Advances in Intrusion Detection. 2007

[66] Amer S H, Hamilton J A. Investigating intrusion detection systems that use trails of system calls[C]// Proc. of 2008 Inter. Symp. on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems. Edinburgh, UK, 2008: 377-384

[67] Hofmeyr S. The implications of immunology for secure systems design[J]. Computer & Security, 2004, 23(6): 453-455

[68] Mazeroff G, Gregor J, Thomason M, et al. Probabilistic suffix models for API sequence analysis of Windows XP applications [J]. Pattern Recognition, 2008, 41: 90-101.

[69] 朱莺嘤，叶茂，刘乃琦，等. 一种基于图的异常入侵检测新算法[J]. 计算机科学, 2008, 35(11): 78-82

[70] 卿斯汉，蒋建春，马恒太，等. 入侵检测技术研究综述[J]. 通信学报, 2004, 25(7): 19-29

[71] Forrest S, Hofmeyr S, Somayaji A. The Evolution of System-call Monitoring [C]// Proc. of the 24^{th} Annual Computer Security Application conference. Anaheim, California: IEEE Computer Society, 2008: 418-430