

广义三次 DP 曲线

陈福来 吴晓勤 朱秀云

(湖南科技大学数学与计算科学学院 湘潭 411201)

摘 要 给出一组带有两个形状参数的三次多项式基函数,它是三次 DP 基函数的扩展;分析该基函数的性质;基于该组函数定义了广义三次 DP 曲线,它不仅具有与 DP 曲线类似的性质,还可通过改变参数 λ 或 μ 使其具有形状可调性。当这两段曲线相拼接时,在满足一定的条件下,曲线可达到 G^2 或 C^2 连续,从而为自由曲线设计提供了一种有效的方法。

关键词 三次 DP 曲线,形状参数,几何连续,参数连续
中图分类号 TP391 **文献标识码** A

Generalized Cubic DP Curve

CHEN Fu-lai WU Xiao-qin ZHU Xiu-yun

(School of Mathematics & Computation Science, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract A set of cubic polynomial function with two shape parameters was presented as an extension of cubic DP basis functions. The properties of the new basis were analyzed. The generalized cubic DP curve with two shape parameters was defined using the new basis. The new curve not only retains many properties of cubic DP curve, but also can adjust the shape by moderating shape parameters λ or μ . Based on the some given condition, the two section curves can be G^2 or C^2 -continuous between adjacent generalized cubic DP curves, which is useful for free curve and surface design.

Keywords Cubic DP curve, Shape parameter, Geometric continuous, Parameter continuous

1 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)和计算机图形学(CG)中,自由曲线曲面往往由基函数与控制顶点的线性组合表示。如果在确定基函数的基础上确定了控制顶点,则相应的曲线曲面也就被确定下来,这方面非均匀有理 B 样条(NURBS)^[1]发展比较成熟,但其存在权因子选取不便的局限性,使得在几何外形设计上,曲线曲面的形状调节就不够灵活。调节控制顶点或者设置适当的形状参数是解决曲线曲面形状不够灵活的有效方法。

Barsky^[2]在讨论一种称为 Beta 样条曲线中提出了关于形状参数的概念。带形状参数的曲线大部分是在保留已有类型曲线优良性质的基础上发展起来的,并且可通过调整形状参数来调节曲线的形状。其得到了广泛的发展,例如 2003 年,韩旭里、刘圣军提出的带一个形状参数的三次均匀 B 样条曲线^[3];2004 年,王文涛、汪国昭提出的带形状参数的均匀 B 样条曲线^[4];2011 年,夏成林等提出的带多个形状参数的三次均匀 B 样条曲线^[5]等。

曲线曲面设计的不断发展和完善,激发了学术界对构造新型曲线的研究。Delgado 和 Peña 在 2003 年提出了一种新型参数曲线^[6,7],被学术界称之为 DP 曲线。DP 曲线在数值计算上具有稳定性,在算法上具有线性的计算复杂度,同时具

有插值端点性质。2010 年, Qian-qian HU 等利用低次(三次和四次)有理 DP 曲线表示圆弧^[8]。2011 年,陈杰和王国瑾在 Delgado 和 Peña 的 DP 曲线的基础上引入了形状参数^[9],但在表示复杂形状的曲线时,高次曲线的稳定性通常不如低次曲线。而陈杰等并未对带参的低次 DP 曲线及其拼接条件进行分析。为此,本文结合形状参数和 DP 基提出了另一种形式的广义三次 DP 基及曲线,并在此基础上讨论了曲线两种度量连续的拼接条件。

2 广义三次 DP 曲线

2.1 广义三次 DP 基函数及其性质

定义 1 对任意的 $t \in [0, 1], \lambda, \mu \in [-1, 1]$, 称关于 t 的多项式

$$\begin{cases} D_0(t) = (1-\lambda t)(1-t)^2 \\ D_1(t) = t(1-t)(1+\lambda-\lambda t) \\ D_2(t) = t(1-t)(1+\mu t) \\ D_3(t) = (1-\mu+\mu t)t^2 \end{cases} \quad (1)$$

为带参数 λ, μ 的三次多项式基函数,简称广义三次 DP 基。

根据式(1)所定义的基函数有很多与 Bernstein 基函数类似的性质。

1. 规范性,即 $\sum_{i=0}^3 D_i = 1$;

到稿日期:2012-02-29 返修日期:2012-06-17 本文受湖南科技大学研究生创新基金项目(S110124)资助。

陈福来(1987-),男,硕士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计;吴晓勤(1968-),男,博士,副教授,主要研究领域为计算机辅助几何设计、计算机图形学等;朱秀云(1987-),女,硕士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计。

2. 非负性, 即当 $\lambda, \mu \in [-1, 1]$ 时, 对任意的 $t \in [0, 1]$ 有 $D_i(t) \geq 0$ ($i=0, 1, 2, 3$);

3. 拟对称性, 即当 $\lambda = \mu$ 时, $D_0(t) = D_3(1-t)$, $D_1(t) = D_2(1-t)$;

4. 端点性质, 即

$$D_i(0) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i=0 \\ 0, & \text{若 } i=1, 2, 3 \end{cases}$$

$$D_i(1) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i=3 \\ 0, & \text{若 } i=0, 1, 2 \end{cases}$$

5. 对参数的单调性, 即固定参数 t , $D_0(t)$ 和 $D_3(t)$ 分别是 λ, μ 的递减函数, 而 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 分别是 λ, μ 的递增函数;

6. 积分等值性, 即当 $\lambda = \mu$ 时, 有:

$$\int_0^1 D_0(t) dt = \int_0^1 D_3(t) dt = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{12}$$

$$\int_0^1 D_1(t) dt = \int_0^1 D_2(t) dt = \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{12}$$

根据定义 1 可以得出, 当 $\lambda = \mu = 1$ 时, $D_i(t)$ ($i=0, 1, 2, 3$) 为三次 DP 曲线基函数。图 1 给出了形状参数 $\lambda = \mu = 0.5$ 时对应的基函数图形。

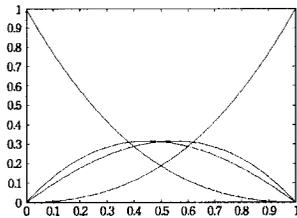


图 1 $\lambda = \mu = 0.5$ 基函数图形

2.2 广义三次 DP 曲线及其性质

定义 2 给定 4 个控制顶点 $b_i \in R^d$ ($d=2, 3, i=0, 1, 2, 3$), 对 $t \in [0, 1]$, 定义曲线:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 b_i D_i(t) \quad (2)$$

为广义三次 DP 曲线, 式中 $D_i(t)$ 为广义三次 DP 基。

根据定义 2 可知, 当 $\lambda = \mu = 1$ 时, 曲线 $P(t)$ 退化成三次 DP 曲线; 当 $\lambda = \mu$ 时, 曲线 $P(t)$ 退化成单形状参数三次 DP 曲线。广义三次 DP 曲线有如下性质。

1. 端点性质。根据基函数的端点性质有:

$$P(0) = b_0, P(1) = b_3$$

$$P'(0) = (\lambda + 2)\Delta b_0 + \Delta b_1 \quad (3)$$

$$P'(1) = \nabla b_2 + (\mu + 2)\nabla b_3$$

$$P''(1) = (2\lambda - 2)\nabla b_1 + (4\mu + 2)\nabla b_3 \quad (4)$$

$$P''(0) = -(4\lambda + 2)\Delta d_0 + (2 - 2\mu)\Delta d_2$$

式中, Δb_i ($i=0, 1, 2, 3$) 向前差分, ∇b_i ($i=0, 1, 2, 3$) 向后差分。

该性质表明, 广义三次 DP 曲线插值首末端点, 切线为与端点相邻的两个控制顶点满足式(3)的线性组合。

2. 凸包性质。从广义三次 DP 基函数的性质(非负性和规范性)可知, $D_i(t)$ ($i=0, 1, 2, 3$) 构成权函数。对于固定的 t , $P(t)$ 即为各控制顶点 b_i ($i=0, 1, 2, 3$) 的加权平均。从几何方面看, 这意味着广义三次 DP 曲线落在控制顶点的凸包内。

3. 对称性。当 $\lambda = \mu$ 时, 如果颠倒广义 DP 曲线 $P(t)$ 的控

制顶点 b_i 的次序, 令 $b_i^* = b_{3-i}$, ($i=0, 1, 2, 3$), 则新的广义三次 DP 曲线为:

$$\begin{aligned} P^*(t) &= \sum_{i=0}^3 b_i^* D_i(t) = \sum_{i=0}^3 b_{3-i} D_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 b_i D_{3-i}(t) = P(t) = \sum_{i=0}^3 b_i D_i(1-t) \\ &= P(1-t) \end{aligned}$$

即 $P^*(t)$ 和 $P(t)$ 表示的是同一条曲线, 但是经过参数变换 $t = 1-t$, 会使曲线的方向与原来相反。

4. 几何不变性和仿射不变性。广义三次 DP 基满足规范性, 对广义三次 DP 曲线进行仿射变换, 即用线性变换 L 和平移变换 S 作用, 得到新的曲线:

$$\begin{aligned} P^*(t) &= LP(t) + S \\ &= L \sum_{i=0}^3 b_i D_i(t) + S \sum_{i=0}^3 D_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 L b_i D_i(t) + \sum_{i=0}^3 S D_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 (L b_i + S) D_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 b_i^* D_i(t) \end{aligned}$$

对原广义三次 DP 曲线的控制顶点 b_i 进行相同的仿射变换后得到新的控制顶点 b_i^* ($i=0, 1, 2, 3$) 对应的广义三次 DP 曲线。这表明, 广义三次 DP 曲线不依赖坐标系的选取, 是几何不变的。

5. 变差缩减性(V. D.)

证明: 采用文献[10]提供的方法。首先证明基函数 $\{D_0(t), D_1(t), D_2(t), D_3(t)\}$ 在 $(0, 1)$ 上满足笛卡尔法则, 即对任意一组常数 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, 有:

$$\text{Zeros}(0, 1) \left\{ \sum_{i=0}^3 a_i D_i(t) \right\} \leq SA(a_0, a_1, a_2, a_3) \quad (5)$$

式中, $\text{Zeros}(0, 1) \{f(t)\}$ 表示函数 $f(t) = \sum_{i=0}^3 a_i D_i(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上根的个数, $SA(a_0, a_1, a_2, a_3)$ 表示常数序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 的符号改变的次数。

不妨设 $a > 0$, $SA(a_0, a_1, a_2, a_3)$ 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$ 。

1) 当 $SA(a_0, a_1, a_2, a_3) = 3$ 时, 则 $a_3 < 0$ 。另外一方面, $f(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上是连续函数, $f(0) = a_0, f(1) = a_3$ 。假设 $f(t)$ 区间 $(0, 1)$ 上有 4 个根, 则 $f(1) = a_3 > 0$, 故产生矛盾, 则式(5)成立。

2) 当 $SA(a_0, a_1, a_2, a_3) = 2$ 或 1 时, 同理可证式(5)成立。

3) 当 $SA(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0$ 时, 式(5)显然成立。故结论成立。

下面证变差缩减性。令 L 为通过点 m 和法向量为 n 的直线。

如果 L 和控制多边形 $\langle b_0 b_1 b_2 b_3 \rangle$ 交于 b_k, b_{k+1} 之间的边, 则 b_k, b_{k+1} 一定位于 L 的两侧, 即 $n \cdot (b_k - m)$ 与 $n \cdot (b_{k+1} - m)$ 符号相反。因此

$$SA\{n \cdot (b_0 - m), n \cdot (b_1 - m), n \cdot (b_2 - m), n \cdot (b_3 - m)\} \leq \langle b_0 b_1 b_2 b_3 \rangle \text{ 与 } L \text{ 的交点个数}$$

另外一方面,

$$P(t) \text{ 与 } L \text{ 交点的个数} = \text{Zeros}(0, 1) \left\{ \sum_{i=0}^3 a_i D_i(t) (b_i - m) \cdot n \right\}$$

所以, 根据基函数组的笛卡尔符号法则有:

$P(t)$ 与 L 交点的个数 $\leq SA\{n \cdot (b_0 - m), n \cdot (b_1 - m), n \cdot (b_2 - m), n \cdot (b_3 - m)\}$

因此,结论得证。

该性质表明了广义三次 DP 曲线比其控制多边形波动要小,也更光滑。

6. 保凸性。由于在平面上,任一直线与凸控制多边形最多为 2 个交点,因此根据性质 5 可知,任一直线与曲线的交点个数最多也为 2 个交点。

3 广义三次 DP 曲线的形状参数的几何意义

曲线的每个形状参数可以是增大、减少或者固定不变,因此,可改变参数 λ, μ 来调整曲线 $P(t)$ 的形状。

(1)当固定 λ ,参数 μ 逐渐增大(减少)时,曲线逐渐逼近(远离)控制顶点 b_2 。

因为当固定 λ 时,改变参数 μ 影响到的基函数只能是 $D_2(t), D_3(t)$,而 $D_2(t)$ 关于参数 μ 的导数 $D_{2,\mu}' = t^2(1-t) > 0, t \in (0, 1)$,即 $D_2(t)$ 是关于 μ 的增函数。又根据曲线端点性质知:曲线总是经过末端点的。因此结论得证。图 2(a)是参数 $\lambda=0.5$ 、参数 μ 从下到上取值依次为 $-0.5, 0, 0.5, 1$ 的曲线图形。

(2)当固定 λ ,参数 μ 逐渐增大(减少)时,曲线逐渐逼近(远离)控制顶点 b_1 。

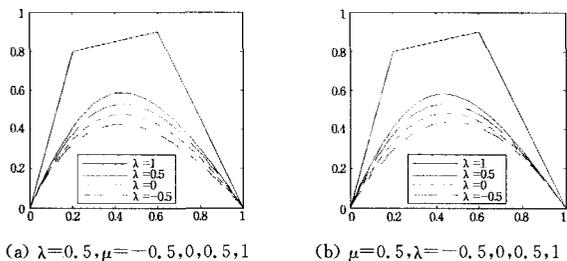


图 2 广义三次 DP 曲线图形

用上面的方法易得结论成立。如图 2(b)是参数 $\mu=0.5$ 、参数 λ 从下到上取值依次为 $-0.5, 0, 0.5, 1$ 的曲线图形。

如果同时改变两个参数,则可更加灵活地改变曲线的形状。

4 广义三次 DP 曲线的拼接

广义三次 DP 曲线设计复杂的自由曲线时,一段单一的曲线已不能满足外形设计的要求,因此,在实际的造型中,曲线的拼接是必不可少的。参数连续和几何连续是我们经常用到的两种连续的度量。

假设两条广义三次 DP 曲线段分别为: $P(t) = \sum_{i=0}^3 b_i D_i(t)$,
 $Q(t) = \sum_{i=0}^3 d_i D_i(t') (t \in [0, 1])$,其中 $b_i, d_i (i=0, 1, 2, 3)$ 分别为两曲线的控制顶点。

由曲线的 $G^0 (C^0)$ 连续性有: $b_3 = d_0$ 。下面先讨论 $G^1 (C^1)$ 连续性。

根据曲线的端点性质,若两条广义三次 DP 曲线 $P(t), Q(t)$ 既满足位置连续,又在连接点处具有同向的切矢量,即:

$$P'(1) = mQ'(0) \quad (m > 0) \quad (6)$$

由式(3)得:

$$\nabla b_2 + (\mu + 2)\nabla b_3 = m[(\lambda + 2)\Delta d_0 + \Delta d_1]$$

有:

$$d_2 = \frac{1}{m}[(\mu + 2)b_3 - (\mu + 1)b_2 - b_1] + (\lambda + 2)d_0 - (\lambda + 1)d_1 \quad (7)$$

则两曲线拼接能达到 G^1 连续。由式(7)知:必须先确定 d_1 ,才能得到 d_2 点。我们通过选取一个角 θ 的方法来确定 $d_0 d_1$ 的方向,其中 θ 为曲线 $Q(t)$ 在 $t=0$ 点处的切线与 $d_0 d_1$ 的夹角,而且满足 $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$,并规定边 $d_0 d_1$ 的长度为:

$$|d_0 d_1| = |Q'(0)| \cdot \cos\theta = \frac{1}{m} |P'(1)| \cos\theta \quad (8)$$

式中, $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$ 。

如果给定 θ ,由式(8)确定顶点 d_1 ,从而由式(7)确定顶点 d_2 ,则两曲线段完成了 G^1 连续的拼接。当取 $m=1$ 时,两曲线 $P(t), Q(t)$ 之间的拼接达到了 C^1 连续。图 3 是两段曲线 G^1 拼接图。

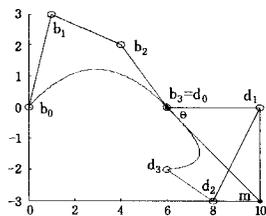


图 3 $\lambda=-0.5, \mu=0.5, m=2$ 的 G^1 连续图形,直线 $d_0 m$ 为后段曲线在端点处的切线, $\angle d_0 d_1 m$ 为直角。

特别地,当 $\lambda=\mu=0$,三次广义 DP 基退化为: $D_0 = (1-t)^2, D_1 = D_2 = t(1-t), D_3 = t^2$,则曲线 $Q(t)$ 为:

$$Q(t) = d_0 D_0 + (d_1 + d_2) D_1 + d_3 D_3 \quad (9)$$

求导得:

$$Q'(0) = 2\Delta d_0 + \Delta d_1 = d_2 + d_1 - 2d_0$$

有:

$$d_2 + d_1 = Q'(0) + 2d_0 \quad (10)$$

由式(6)、式(9)和式(10)得

$$Q(t) = d_0 D_0 + (mP'(1) + 2d_0) D_1 + d_3 D_3$$

说明当两条广义三次 DP 曲线 $P(t), Q(t)$ 进行 G^1 连续拼接时,若 $\lambda=\mu=0$,则曲线 $Q(t)$ 的形状由控制顶点的首末端点确定。

显然,对于式(9),若曲线中间两控制顶点重合,则曲线退化成了二次 Bézier 曲线。

在实际应用中,曲线的 G^1, C^1 连续往往不能充分满足实际的需要,因此,接下来讨论广义三次 DP 曲线 G^2, C^2 拼接的条件。

(A) G^2 连续:如果 G^1 连续且在连接点处具有相同的曲率矢,则两曲线在公共点的曲率为:

$$\kappa(1) = \frac{|P'(1) \times P''(1)|}{|P'(1)|^3} = \frac{|Q'(0) \times Q''(0)|}{|Q'(0)|^3} = \kappa(0)$$

由式(6),再变形成:

$$|P'(1) - m^2 Q'(0)| \times P'(1) = 0$$

所以,存在 α 使得:

$$P'(1) - m^2 Q'(0) = \alpha [P'(1)]$$

即:

$$Q'(0) = \frac{1}{m^2} P''(1) - \alpha P'(1)$$

由式(3)、式(4)可得:

$$\begin{aligned} & -(4\lambda+2)\Delta d_0 + (2-2\mu)\Delta d_2 \\ &= \frac{1}{m^2} [(2\lambda-2)\nabla b_1 + (4\mu+2)\nabla b_3] - \alpha [\nabla b_2 + \\ & (\mu+2)\nabla b_3] \end{aligned}$$

有:

$$d_3 = \frac{1}{2-2\mu} [L + (4\lambda+2)\Delta d_0] + d_2 \quad (11)$$

其中:

$$L = \frac{1}{m^2} [(2\lambda-2)\nabla b_1 + (4\mu+2)\nabla b_3] - \alpha [\nabla b_2 + (\mu+2)\nabla b_3]$$

因此,由 G^1 连续性,确定 d_1, d_2 ,再由式(11)确定控制顶点 d_3 ,从而完成了两曲线段 G^2 连续的拼接。图4是两段曲线 G^2 拼接图。

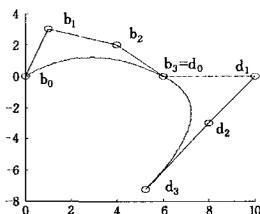


图4 $\lambda=-0.5, \mu=0.5, m=2$ 的 G^2 连续的图形

(B) C^2 连续:由 C^1 连续性且 $P'(1)=Q'(0)$,即:

$$(2\lambda-2)\nabla b_1 + (4\mu+2)\nabla b_3 = -(4\lambda+2)\Delta d_0 + (2-2\mu)\Delta d_2$$

有:

$$d_3 = \frac{1}{2-2\mu} [(2\lambda-2)\nabla b_1 + (4\mu+2)\nabla b_3 + (4\lambda+2)\Delta d_0] + d_2 \quad (12)$$

因此,由 C^1 连续性,确定 d_1, d_2 ,再由式(12)确定控制顶点 d_3 ,从而完成了 C^2 连续的两段曲线拼接。

5 广义三次 DP 曲线拼接的应用实例

广义三次 DP 曲线之间的拼接条件,在实际的样条曲面造型中能得到有效的应用。下面给出了两个 G^1 连续花瓶旋转曲面造型的实例。

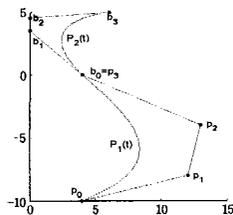


图5 $\lambda=\mu=0.1$ 时花瓶模型旋转母线

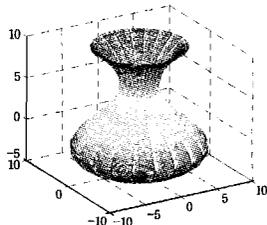


图6 花瓶模型

给定曲线 $P_1(t)$ 的4个控制顶点 $p_0=(4,-10), p_1=(12,-8), p_2=(13,-4), p_3=(4,0)$ 以及常数 $m=2$ 。利用本

文提供的方法,当参数 λ, μ 确定时,根据 G^1 连续性条件,确定下一段曲线 $P_2(t)$ 。图5为当 $\lambda=\mu=0.1$ 时,两相邻曲线 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 以 G^1 连续拼接而成的花瓶旋转曲面的母线。图6是由图5中曲线旋转生成的花瓶旋转曲面模型;图7、图8分别是修改参数 $\lambda=0.5, \mu=1$ 所生成的花瓶旋转曲面的母线和用该母线旋转生成的花瓶模型。

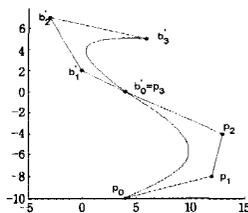


图7 $\lambda=0.5, \mu=1$ 时花瓶模型旋转母线

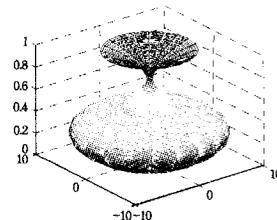


图8 花瓶模型

结束语 广义三次 DP 曲线是三次 DP 曲线的推广。本文首先给出广义三次 DP 基函数并分析其性质,然后讨论广义三次 DP 曲线的性质和两段广义三次 DP 曲线间 G^2, C^2 光滑拼接条件。特别地,当两形状参数 $\lambda=\mu=0$,且中间两控制顶点重合时,曲线退化为二次 Bézier 曲线;另外,当两参数 $\lambda=\mu=1$ 时,该新基函数就退化成三次 DP 基。曲线的分割也可大大增加曲线的灵活性和表达复杂曲线的能力,因而,广义三次 DP 曲线的分割算法将是一个值得研究的课题。

参考文献

- [1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 306-454
- [2] Barsky B A. The beta-spline: a local representation based on shape parameters and functional geometric measures[D]. Salt Lake City: University of Utah, 1981
- [3] 韩旭里, 刘圣军. 三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(5): 576-578
- [4] 王文涛, 汪国昭. 带形状参数的均匀 B 样条[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6): 783-788
- [5] 夏成林, 邹弘毅, 郑兴国, 等. 带多个形状参数的三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2011(2): 73-79
- [6] Delgado J, Peña J M. A shape preserving representation with an evaluation algorithm of linear complexity[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 1-10
- [7] Delgado J, Peña J M. On efficient algorithms for polynomial evaluation in CAGD[J]. Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, 2004, 31(2): 111-120
- [8] Hu Qian-qian, Wang Guo-jin. Representing coins by low degree rational DP curves[J]. Journal of Zhejiang Univ-SCIENCE C (Computer & Election), 2010, 11(4): 278-289
- [9] 陈杰, 王国瑾. 一类带形状参数的 DP-NTP 曲线及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(6): 1055-1060
- [10] Goldman R. 金字塔算法——曲线曲面几何模型的动态编程处理[M]. 吴宗敏, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2004: 152-157