F-阶梯知识与 F-阶梯挖掘-发现

郝秀梅[1] 李淑敏[1] 史开泉[2]
(山东财经大学数学与数量经济学院 济南 250014)[1] (山东大学数学学院 济南 250100)[2]

摘 要 利用单向S-粗集(one direction singular rough sets)与它的动态特性,给出 F-阶梯知识、F-阶梯度的概念。利用这些概念,提出 F-阶梯知识分辨定理、最小 F-阶梯知识挖掘-发现定理、最大 F-阶梯知识挖掘-发现定理、知识发现依赖-筛选定理与 F-阶梯知识内潜藏原理,给出 F-阶梯知识挖掘-发现准则及应用。这些结果是单向S-粗集的新特性与单向S-粗集的动态特性的新应用。

关键词 单向S-粗集,F-阶梯知识,F-阶梯度,挖掘-发现定理,挖掘-发现准则,潜藏原理,应用

中图法分类号 O159,TP181 **文献标识码** A

F-ladder Knowledge and F-ladder Mining-discovery

HAO Xiu-mei[1] LI Shu-min[1] SHI Kai-quan[2]
(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)[1]
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)[2]

Abstract By employing one direction S-rough sets (one direction singular rough sets) and its dynamic characteristic, this paper presented the concepts of F-ladder knowledge and F-ladder degree. Using theses concepts, the discernibility theorem of F-ladder knowledge, the mining-discovery theorem of minimum F-ladder knowledge, the mining-discovery theorem of maximum F-ladder knowledge and the dependence-filter theorem of knowledge discovery ere proposed, and the interior hiding principle of F-ladder knowledge, the mining-discovery criterion of F-ladder knowledge and its applications were given. The results given in this paper show the new characteristics of one direction S-rough sets and the new applications of the dynamic characteristic of one direction S-rough sets.

Keywords One direction S-rough sets, F-ladder knowledge, F-ladder degree, Mining-discovery theorem, Mining-discovery criterion, Hiding principle, Application

1 引言

在Z. pawlak粗集中,R-等价类$[x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$被称作知识,$[x]$具有属性集$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$,显然,若$\alpha$不改变,则$[x]$也不改变。Z. pawlak粗集中的知识$[x]$是一个静态知识,Z. pawlak粗集是一个静态粗集。从Z. pawlak的论文[1]中容易得到这个结论。利用Z. pawlak粗集挖掘具有动态特性的知识遇到了困难。

2002年,文献[2]改进了Z. pawlak粗集,提出S-粗集(singular rough sets),文献[3-13]给出S-粗集的更多特性与应用。S-粗集具有3类形式:单向S-粗集(one direction singular rough sets),双向S-粗集(two direction singular rough sets),单向S-粗集对偶(dual of function one direction singular rough sets)[3-6]。因为S-粗集具有动态特性(单向动态特性,双向动态特性),所以构成S-粗集的等价类$[x]$(知识$[x]$)也具有动态特性。

在单向S-粗集给定的知识$[x]$中,α是$[x]$的属性集,若对α多次进行属性补充,或者$\beta\in V$(V是有限属性论域),$\beta\overline{\in}\alpha$,$f(\beta)=\alpha'\in\alpha$;由$\alpha$得到属性集$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$具有$\alpha\subseteq\alpha_1\subseteq\alpha_2\subseteq\cdots\subseteq\alpha_m$,则知识$[x]$变成:$[x]_m\subseteq[x]_{m-1}\subseteq\cdots\subseteq[x]_1\subseteq[x]$。$[x]_k$具有属性集$\alpha_k$,$\alpha_k$是对$\alpha_{k-1}$进行属性补充得到的属性集,$k\in(1,2,\cdots,m)$。如果用一个图形表示这个变化过程(知识$[x]$的变化过程是由属性补充过程产生的),这个图形是顶部小,底部大,由知识$[x]$构成的"f-知识金字塔"(见第3节的图1);换一个说法,"f-知识金字塔"是沿垂直正方向由依次减小的知识$[x]$构成,或者"f-知识金字塔"由知识$[x]_m\subseteq[x]_{m-1}\subseteq\cdots\subseteq[x]_1\subseteq[x]$从上到下排列构成,$[x]$是塔的底部,$[x]_m$是塔的顶部;在$f$-知识金字塔中,两相邻的知识$[x]_i$与$[x]_j$之间具有阶梯,$j<i$。从这个直观的事实中,我们看到一个有趣的现象:单向S-粗集中的知识具有阶梯特征,单向S-粗集具有阶梯特性。利用知识的阶梯特性,能够找到人们事先不知道的知识;换一个说法,如果人们知道了知识的阶梯度,则可以利用阶梯度直接找到需要的知识。本文给出的结果在一类重要系统中(变特征目标识别系统(一部分特征被隐藏),或隐形目标识别系统)具有重要的应用。

本文给出的讨论是在单向S-粗集上进行的,是S-粗集的

到稿日期:2012-02-17 返修日期:2012-05-15 本文受山东省科技厅项目(2011RKB01220)资助。

郝秀梅(1965-),女,博士,教授,主要研究方向为粗系统理论与应用,E-mail:hxm0912@126.com;李淑敏(1990-),女,硕士生,主要研究方向为系统识别、决策理论与应用;史开泉(1945-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗系统理论与应用。

一个新的应用研究方向。为了使读者容易接收单向S-粗集中的有关内容，将单向S-粗集的结构引入到第2节作为本文讨论的理论基础。

2 单向S-粗集[2-6]

约定 U是有限元素论域；f是元素迁移，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$是元素迁移族；$f\in F$在U上的特征是：$u\in U$，$u\overline{\in}X\subset U$，$f\in F$把$u$变成$f(u)=x\in X$；$[x]$是$U$上的元素等价类，$R$是$U$上的元素等价关系。

给定集合$X\subset U$，称$X^{\circ}\subset U$是X的单向S-集合(one direction singular sets)，如果

$$X^{\circ}=X\cup\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\in X\} \tag{1}$$

X^f称作$X\subset U$的f-扩张，而且

$$X^f=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\in X\} \tag{2}$$

称$(R,F)_{\circ}(X^{\circ})$，$(R,F)^{\circ}(X^{\circ})$分别是$X^{\circ}\subset U$的下近似、上近似，如果

$$(R,F)_{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]=\{x|x\in U,[x]\subseteq X^{\circ}\} \tag{3}$$

$$(R,F)^{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]=\{x|x\in U,[x]\cap X^{\circ}\neq\varphi\} \tag{4}$$

由$(R,F)_{\circ}(X^{\circ})$，$(R,F)^{\circ}(X^{\circ})$构成的集合对称作$X^{\circ}\subset U$的单向S-粗集(one direction singular rough sets)，如果

$$((R,F)_{\circ}(X^{\circ}),(R,F)^{\circ}(X^{\circ})) \tag{5}$$

称$B_{nr}(X^{\circ})$是$X^{\circ}\subset U$的边界，如果

$$B_{nr}(X^{\circ})=(R,F)^{\circ}(X^{\circ})-(R,F)_{\circ}(X^{\circ}) \tag{6}$$

$A_s(X^{\circ})$称作$((R,F)_{\circ}(X^{\circ}),(R,F)^{\circ}(X^{\circ}))$生成的副集合(assistant sets)，如果

$$A_s(X^{\circ})=\{x|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\ \tilde{\in}\ X\} \tag{7}$$

单向S-粗集的更多概念、应用、特征见文献[2-13]。

由单向S-粗集的结构，容易得到：因为元素迁移$f\in F$的存在，使得式(1)成立；或者，因为$f\in F$的存在，集合X中的元素得到补充，被补充的元素构成的集合是：$\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\in X\}$，使得$X^{\circ}$存在；或者$\mathrm{card}(X)\leqslant\mathrm{card}(X^{\circ})$，$X^{\circ}$具有单向动态特性，$R$-元素等价类$[x]$具有单向动态特性。如果把元素迁移$f\in F$应用到属性集$\alpha$中，或者$\exists\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f(\beta)=\alpha'\in\alpha$，则$\alpha$中得到属性补充，$\alpha$变成$\alpha^f=\alpha\cup\{f(\beta)=\alpha'\}$。在第3节的讨论中，要用到这个概念；或者，第3节给出的讨论是利用这个概念得到的。

由单向S-粗集直接得到：

命题1 单向S-粗集中的知识$[x]$具有单向动态特性。

命题2 $X^{\circ}\subset U$的下近似$(R,F)_{\circ}(X^{\circ})$与上近似$(R,F)^{\circ}(X^{\circ})$分别具有单向动态特性。

命题3 知识$[x]$内的元素被补充等价于$[x]$的属性集α内的属性被删除。

命题4 知识$[x]$内的元素被删除等价于$[x]$的属性集α内的属性被补充。

利用第2节中单向S-粗集与知识$[x]$的单向动态特性，第3给出F-阶梯知识与F-阶梯度。

3 *F*-阶梯知识与*F*-阶梯度

定义1 给定知识$[x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$\alpha$是$[x]$的属性集，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$；若存在属性$\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，元素迁移$f\in F$把$\beta$变成$f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；而且

$$\alpha^f=\alpha\cup\{f(\beta)=\alpha'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha'\} \tag{8}$$

具有属性集α^f的知识$[x]^f$称作$[x]$的f-阶梯知识，简称$[x]^f$是f-阶梯知识。

定义1给出一个事实：f-阶梯知识$[x]^f$与知识$[x]$满足$[x]^f=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}=[x]$。

定义2 设$[x]^f$是$[x]$的f-阶梯知识；α^f，α分别是$[x]^f$，$[x]$的属性集，称$\mathrm{LAD}([x]^f)$是$[x]^f$关于$[x]$的f-阶梯度(ladder degree)，简称$\mathrm{LAD}([x]^f)$是$[x]^f$的f-阶梯度，如果

$$\mathrm{LAD}([x]^f)=\mathrm{card}(\alpha)/\mathrm{card}(\alpha^f) \tag{9}$$

称$\mathrm{LAC}([x]^f)$是$[x]^f$的f-阶梯系数(ladder coefficient)，如果

$$\mathrm{LAC}([x]^f)=\mathrm{card}([x]^f)/\mathrm{card}([x]) \tag{10}$$

这里，$\mathrm{card}(\alpha)$，$\mathrm{card}([x]^f)$分别是α，$[x]^f$的基数，$0<\mathrm{LAD}([x]^f)$，$\mathrm{LAC}([x]^f)\leqslant 1$。

定义3 称$[x]$ f-阶梯单依赖$[x]^f$，记作

$$[x]^f\Rightarrow[x] \tag{11}$$

如果$[x]^f$是$[x]$的f-阶梯知识。

定义4 称$[X^{\circ}]_F$是$[X^{\circ}]_-$的F-阶梯知识，如果$[X^{\circ}]_F$的属性集α_F与$[X^{\circ}]_-$的属性集α_-满足

$$\alpha_-\subseteq\alpha_F \tag{12}$$

称$[X^{\circ}]^F$是$[X^{\circ}]^-$的F-阶梯知识，如果$[X^{\circ}]^F$的属性集α^F与$[X^{\circ}]^-$的属性集α^-满足

$$\alpha^-\subseteq\alpha^F \tag{13}$$

这里，$[X^{\circ}]_-=(R,F)_{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]$，$[X^{\circ}]_F=(R,F)_{\circ}(X^{\circ})_F=\bigcup[x]^f$，$[x]^f\subseteq[x]$，$[X^{\circ}]_F\subseteq[X^{\circ}]_-$；$[X^{\circ}]^-=(R,F)^{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]$，$[X^{\circ}]^F=(R,F)^{\circ}(X^{\circ})^F=\bigcup[x]^f$；$[x]^f\subseteq[x]$，$[X^{\circ}]^F\subseteq[X^{\circ}]^-$；$[x]^f$是$[x]$的$f$-阶梯知识。

定义5 $\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_F)$，$\mathrm{LAD}([X^{\circ}]^F)$分别称作$[X^{\circ}]_F$的$F$-阶梯度、$[X^{\circ}]^F$的$F$-阶梯度，如果

$$\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_F)=\mathrm{card}(\alpha_-)/\mathrm{card}(\alpha_F) \tag{14}$$

$$\mathrm{LAD}([X^{\circ}]^F)=\mathrm{card}(\alpha^-)/\mathrm{card}(\alpha^F) \tag{15}$$

定义6 $\mathrm{LAC}([X^{\circ}]_F)$，$\mathrm{LAC}([X^{\circ}]^F)$分别称作$[X^{\circ}]_F$的$F$-阶梯系数、$[X^{\circ}]^F$的$F$-阶梯系数，如果

$$\mathrm{LAC}([X^{\circ}]_F)=\mathrm{card}([X^{\circ}]_F)/\mathrm{card}([X^{\circ}]_-) \tag{16}$$

$$\mathrm{LAC}([X^{\circ}]^F)=\mathrm{card}([X^{\circ}]^F)/\mathrm{card}([X^{\circ}]^-) \tag{17}$$

定义7 称$[X^{\circ}]_-$ F-阶梯单依赖$[X^{\circ}]_F$，记作

$$[X^{\circ}]_F\Rightarrow[X^{\circ}]_- \tag{18}$$

如果$[X^{\circ}]_F$是$[X^{\circ}]_-$的F-阶梯知识；称$[X^{\circ}]^-$ F-阶梯单依赖$[X^{\circ}]_F$，记作

$$[X^{\circ}]^F\Rightarrow[X^{\circ}]^- \tag{19}$$

如果$[X^{\circ}]^F$是$[X^{\circ}]^-$的F-阶梯知识。

定义8 称$([X^{\circ}]_-,[X^{\circ}]^-)$ F-阶梯单依赖$([X^{\circ}]_F,[X^{\circ}]^F)$，记作

$$([X^{\circ}]_F,[X^{\circ}]^F)\Rightarrow([X^{\circ}]_-,[X^{\circ}]^-) \tag{20}$$

如果$[X^{\circ}]_F\Rightarrow[X^{\circ}]_-$且$[X^{\circ}]^F\Rightarrow[X^{\circ}]^-$；$[X^{\circ}]_F$是$[X^{\circ}]_-$的$F$-阶梯知识，$[X^{\circ}]^F$是$[X^{\circ}]^-$的$F$-阶梯知识。

图1知识$[x]=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，$\alpha=\{\alpha_1,$

$\alpha_2,\alpha_3\}$是$[x]$的属性集。对α进行属性补充，由α得到α_1^f，$\alpha\subseteq\alpha_1^f$；得到$[x]$的$f$-阶梯知识$[x]_1^f=\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_8\}$。对$\alpha_1^f$进行补充得到$\alpha_2^f$，$\alpha_1^f\subseteq\alpha_2^f$，得到$[x]$的$f$-阶梯知识$[x]_2^f=\{x_6,x_8\}$。$[x]$，$[x]_1^f$，$[x]_2^f$构成“$f$-知识金字塔”。

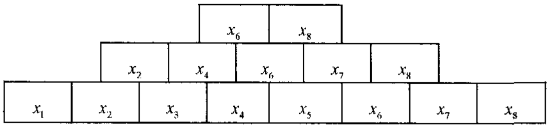

图 1　f-阶梯知识(f-知识金字塔)的直观表示

由定义 1—定 8 直接得到：

命题 5　知识$[x]$存在最大f-阶梯知识$[x]_{\max}^f$，最小f-阶梯知识$[x]_{\min}^f$($[x]_{\min}^f\neq\phi$)各一个。

命题 6　$[x]_i^f$，$[x]_j^f$是$[x]$的f-阶梯知识，$i\leqslant j$；必有

$$\mathrm{LAD}([x]_i^f)-\mathrm{LAD}([x]_j^f)\geqslant 0 \tag{21}$$

$$\mathrm{LAC}([x]_i^f)-\mathrm{LAC}([x]_j^f)\geqslant 0 \tag{22}$$

事实上，若$i<j$，则有$\alpha_i^f=\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),\cdots,f(\beta_i)\}\subseteq\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),\cdots,f(\beta_j)\}=\alpha_j^f$，或者$\mathrm{card}(\alpha_i^f)\leqslant\mathrm{card}(\alpha_j^f)$。由定义 2，得到式(21)，类似得到式(22)，命题 6 的证明略。

命题 7　$[X^\circ]_{F,i}$，$[X^\circ]_{F,j}$是$[X^\circ]_-$的F-阶梯知识，而且$[X^\circ]_{F,j}\Rightarrow[X^\circ]_{F,i}$，则$[X^\circ]_{F,j}$与$[X^\circ]_{F,i}$是可分辨的(discernibility)，记为

$$\mathrm{DIS}\{[X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_{F,j}\} \tag{23}$$

命题 8　$[X^\circ]_i^F$，$[X^\circ]_j^F$是$[X^\circ]^-$的F-阶梯知识，而且$[X^\circ]_j^F\Rightarrow[X^\circ]_i^F$，必有

$$DIS\{[X^\circ]_i^F,[X^\circ]_j^F\} \tag{24}$$

4　F-阶梯知识与阶梯挖掘-发现定理

定理 1(F-阶梯度与F-阶梯系数定理)　若$[X^\circ]_{F,i}$，$[X^\circ]_{F,j}$，$[X^\circ]_{F,k}$是$[X^\circ]_-$的F-阶梯知识，而且

$$[X^\circ]_{F,k}\Rightarrow[X^\circ]_{F,j}\Rightarrow[X^\circ]_{F,i} \tag{25}$$

则

$$\mathrm{LAD}([X^\circ]_{F,k})\leqslant\mathrm{LAD}([X^\circ]_{F,j})\leqslant\mathrm{LAD}([X^\circ]_{F,i}) \tag{26}$$

$$\mathrm{LAC}([X^\circ]_{F,k})\leqslant\mathrm{LAC}([X^\circ]_{F,j})\leqslant\mathrm{LAC}([X^\circ]_{F,i}) \tag{27}$$

事实上，若$[X^\circ]_{F,k}\Rightarrow[X^\circ]_{F,j}\Rightarrow[X^\circ]_{F,i}$，则有$[X^\circ]_{F,k}\subseteq[X^\circ]_{F,j}\subseteq[X^\circ]_{F,i}$；$[X^\circ]_{F,k}$，$[X^\circ]_{F,j}$，$[X^\circ]_{F,i}$的属性集$\alpha_{F,k}$，$\alpha_{F,j}$，$\alpha_{F,i}$满足$\alpha_{F,i}\subseteq\alpha_{F,j}\subseteq\alpha_{F,k}$。由定义 5—定义 7，得到式(26)、式(27)，证明略。

推论 1　若$[X^\circ]_i^F$，$[X^\circ]_j^F$，$[X^\circ]_k^F$是$[X^\circ]^-$的F-阶梯知识，而且

$$[X^\circ]_k^F\Rightarrow[X^\circ]_j^F\Rightarrow[X^\circ]_i^F \tag{28}$$

则

$$\mathrm{LAD}([X^\circ]_k^F)\leqslant\mathrm{LAD}([X^\circ]_j^F)\leqslant\mathrm{LAD}([X^\circ]_i^F) \tag{29}$$

$$\mathrm{LAC}([X^\circ]_k^F)\leqslant\mathrm{LAC}([X^\circ]_j^F)\leqslant\mathrm{LAC}([X^\circ]_i^F) \tag{30}$$

推论 2　若$[x]_i^f$，$[x]_j^f$，$[x]_k^f$是$[x]$的f-阶梯知识，而且

$$[x]_k^f\Rightarrow[x]_j^f\Rightarrow[x]_i^f \tag{31}$$

则

$$\mathrm{LAD}([x]_k^f)\leqslant\mathrm{LAD}([x]_j^f)\leqslant\mathrm{LAD}([x]_i^f) \tag{32}$$

$$\mathrm{LAC}([x]_k^f)\leqslant\mathrm{LAC}([x]_j^f)\leqslant\mathrm{LAC}([x]_i^f) \tag{33}$$

定理 2(F-阶梯知识对的F-阶梯度依赖-分辨定理)　给定$([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$，$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)$，若

$$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)\Rightarrow([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F) \tag{34}$$

则$([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$，$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)$关于$F$-阶梯度满足

$$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{DIS}}}\{([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F),([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)\} \tag{35}$$

这里，$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)$是$F$-阶梯知识$[X^\circ]_{F,j}$与$F$-阶梯知识$[X^\circ]_j^F$构成的$F$-阶梯知识对。证明由定义 6—定义 8 直接得到，略。

定理 3(F-阶梯知识对的F-阶梯度依赖-不可分辨定理)　设$(\alpha_{F,i},\alpha_i^F)$，$(\alpha_{F,j},\alpha_j^F)$分别是$F$-阶梯知识对$([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$，$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)$的属性集，而且$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)\Rightarrow([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$，若

$$\underset{\alpha_p\in\alpha_{F,j}}{\alpha_{F,j}}-\{\bar{f}(\alpha_p)=\beta_p\}=\alpha_{F,i} \tag{36}$$

$$\underset{\alpha_q\in\alpha_j^F}{\alpha_j^F}-\{\bar{f}(\alpha_q)=\beta_q\}=\alpha_i^F \tag{37}$$

则$([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$与$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)$为关于$F$-阶梯度是不可分辨的(indiscernibility)，记为

$$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F),([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)\} \tag{38}$$

这里，$(\alpha_{F,i},\alpha_i^F)$是$[X^\circ]_{F,i}$的属性集$\alpha_{F,i}$与$[X^\circ]_i^F$的属性集$\alpha_i^F$构成的属性集合对。

证明：1°设$\alpha_{F,i}$，$\alpha_{F,j}$分别是$[X^\circ]_{F,i}$，$[X^\circ]_{F,j}$的属性集，由$([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)\Rightarrow([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F)$得到$[X^\circ]_{F,j}\Rightarrow[X^\circ]_{F,i}$，$[X^\circ]_j^F\Rightarrow[X^\circ]_i^F$；由$[X^\circ]_{F,j}\Rightarrow[X^\circ]_{F,i}$得到$\alpha_{F,i}\subseteq\alpha_{F,j}$，或者$\mathrm{card}(\alpha_{F,i})\leqslant\mathrm{card}(\alpha_{F,j})$。在$\alpha_{F,j}$中存在属性$\alpha_p\in\alpha_{F,j}$，元素迁移[2-6] $\bar{f}\in\bar{F}$把α_p变成$\bar{f}(\alpha_p)=\beta_p\overline{\in}\alpha_{F,j}$，$p=1,2\cdots r$；则有$\alpha_{F,j}-\{\bar{f}(\alpha_p)=\beta_p\}=\alpha_{F,i}$；或者$[X^\circ]_{F,i}$与$[X^\circ]_{F,j}$具有相同的$F$-阶梯度，因此有

$$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{[X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_{F,j}\}$$

2°利用$[X^\circ]_j^F\Rightarrow[X^\circ]_i^F$与 1°类似地得到

$$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{[X^\circ]_i^F,[X^\circ]_j^F\}$$

因为$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_i^F),([X^\circ]_{F,j},[X^\circ]_j^F)\}$与$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{([X^\circ]_{F,i},[X^\circ]_{F,j})\}$和$\underset{i\neq j}{\underset{\mathrm{LAD}}{\mathrm{IND}}}\{([X^\circ]_i^F,[X^\circ]_j^F)\}$等价；由 1°，2°得到式(38)。

定理 4(最小F-阶梯知识的挖掘-发现定理)　若$\{([X^\circ]_{F,k},[X^\circ]_k^F)\mid k=1,2,\cdots,m\}$是$F$-阶梯知识$[X^\circ]_{F,k}$与$F$-阶梯知识$[X^\circ]_k^F$构成的$F$-阶梯知识对集合，则存在$([X^\circ]_{F,p},[X^\circ]_p^F)$，$p\in(1,2,\cdots,m)$，满足

$$\mathrm{LAD}([X^\circ]_{F,p})=\min_{i=1}^{m}\{\mathrm{LAD}([X^\circ]_{F,i})\} \tag{39}$$

$$\mathrm{LAD}([X^\circ]_p^F)=\min_{i=1}^{m}\{\mathrm{LAD}([X^\circ]_i^F)\} \tag{40}$$

$$\mathrm{GRD}([X^\circ]_{F,p})\leqslant\mathrm{GRD}([X^\circ]_{F,i})_{i=1,2,\cdots,m} \tag{41}$$

$$\mathrm{GRD}([X^\circ]_p^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^\circ]_i^F)_{i=1,2,\cdots,m} \tag{42}$$

这里，$([X^\circ]_{F,p},[X^\circ]_p^F)\in\{([X^\circ]_{F,k},[X^\circ]_k^F)\mid k=1,2,\cdots,m\}$，$\mathrm{GRD}([X^\circ]_{F,p})$是$[X^\circ]_{F,p}$的粒度[4]；$\mathrm{GRD}([X^\circ]_{F,p})=\mathrm{card}([X^\circ]_{F,p})/\mathrm{card}(U)$。

证明：给定 F-阶梯知识对集合 $\{([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)\mid k=1,2,\cdots,m\}$，则有属性集序列 $\alpha_{F,1},\alpha_{F,2},\cdots,\alpha_{F,m}$ 与 $\alpha_1^F,\alpha_2^F,\cdots,\alpha_m^F$，满足

$$\begin{aligned}&\alpha_{F,1}\subseteq\alpha_{F,2}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{F,m}\\&\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_m^F\end{aligned}\tag{43}$$

这里，$\alpha_{F,k}$ 是 $[X^{\circ}]_{F,k}$ 的属性集，α_k^F 是 $[X^{\circ}]_k^F$ 的属性集，$k=1,2,\cdots,m$；显然有

$$\alpha_{F,m}=\max_{i=1}^{m}\{\alpha_{F,i}\}$$

$$\alpha_m^F=\max_{i=1}^{m}\{\alpha_i^F\}$$

具有属性集 $(\alpha_{F,m},\alpha_m^F)$ 的 $([X^{\circ}]_{F,m},[X^{\circ}]_m^F)$ 存在；由定义 5 得到

$$\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_{F,m})=\min_{i=1}^{m}\{\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_{F,i})\}$$

$$\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_m^F)=\min_{i=1}^{m}\{\mathrm{LAD}([X^{\circ}]_i^F)\}$$

令 $m=p$，则有式(39)、式(40)成立。

因为 $[X^{\circ}]_{F,m}\subseteq[X^{\circ}]_{F,m-1}\subseteq\cdots\subseteq[X^{\circ}]_{F,1}$；$[X^{\circ}]_m^F\subseteq[X^{\circ}]_{m-1}^F\subseteq\cdots\subseteq[X^{\circ}]_1^F$；由粒度的概念[4]，则有

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m})\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,i})_{i=1,2,\cdots,m}$$

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_i^F)_{i=1,2,\cdots,m}$$

令 $m=p$，则有式(41)、式(42)成立。

定理 5(最大 F-阶梯知识的挖掘-发现定理) 若 $\{([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)\mid k=1,2,\cdots,m\}$ 是 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_{F,k}$ 与 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_k^F$ 构成的 F-阶梯知识对集合，则存在 $([X^{\circ}]_{F,q},[X^{\circ}]_q^F)$，满足

$$\mathrm{LAC}([X^{\circ}]_{F,q})=\max_{i=1}^{m}\{LAC([X^{\circ}]_{F,i})\}\tag{44}$$

$$\mathrm{LAC}([X^{\circ}]_q^F)=\max_{i=1}^{m}\{LAC([X^{\circ}]_i^F)\}\tag{45}$$

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,i})_{i=1,2,\cdots m}\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,q})\tag{46}$$

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_i^F)_{i=1,2,\cdots m}\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_q^F)\tag{47}$$

这里，$([X^{\circ}]_{F,q},[X^{\circ}]_q^F)\in\{([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)\mid k=1,2,\cdots,m\}$，$q=1,2,\cdots,m$。

证明与定理 4 类似，略。

由定理 4、定理 5，定义 1、定义 2 得到：

推论 3 f-阶梯知识集 $\{[x]_i^F\mid i=1,2,\cdots,m\}$ 中存在 $[x]_p^F$，$[x]_q^F$；$[x]_p^F$ 具有最小的 $\mathrm{LAD}([x]_p^F)$，$\mathrm{LAC}([x]_p^F)$；$[x]_q^F$ 具有最大的 $\mathrm{LAD}([x]_q^F)$，$\mathrm{LAC}([x]_q^F)$。

定理 6(F-阶梯知识对的挖掘-筛选定理) 给定 F-阶梯知识对集合序列，而且

$$([X^{\circ}]_{F,1},[X^{\circ}]_1^F),([X^{\circ}]_{F,2},[X^{\circ}]_2^F),\cdots,([X^{\circ}]_{F,m},[X^{\circ}]_m^F)\tag{48}$$

若

$$\alpha_{F,1}\Rightarrow\alpha_{F,2}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\alpha_{F,m}\tag{49}$$

$$\alpha_1^F\Rightarrow\alpha_2^F\Rightarrow\cdots\Rightarrow\alpha_m^F\tag{50}$$

则 F-阶梯知识对在 F-阶梯知识对集合序列中，由大到小依次被挖掘-筛选。

这里，$\alpha_{F,k}$ 是 $[X^{\circ}]_{F,k}$ 的属性集，α_k^F 是 $[X^{\circ}]_k^F$ 的属性集；$k=1,2,\cdots,m$。

证明：利用式(49)、式(50)，分别得到

$$[X^{\circ}]_{F,m}\subseteq[X^{\circ}]_{F,m-1}\subseteq\cdots\subseteq[X^{\circ}]_{F,1}$$

$$[X^{\circ}]_m^F\subseteq[X^{\circ}]_{m-1}^F\subseteq\cdots\subseteq[X^{\circ}]_1^F$$

或者

$$\mathrm{card}([X^{\circ}]_{F,m})\leqslant\mathrm{card}([X^{\circ}]_{F,m-1})\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{card}([X^{\circ}]_{F,1})$$

$$\mathrm{card}([X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{card}([X^{\circ}]_{m-1}^F)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{card}([X^{\circ}]_1^F)$$

由粒度(granulation degree)概念[4]，则有

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m})\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m-1})\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,1})$$

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{m-1}^F)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_1^F)$$

令 $\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)$ 是 $([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)$ 的粒度，则有

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m},[X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m-1},[X^{\circ}]_{m-1}^F)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,1},[X^{\circ}]_1^F)$$

显然，首先发现 $([X^{\circ}]_{F,1},[X^{\circ}]_1^F)$；最后发现 $([X^{\circ}]_{F,m},[X^{\circ}]_m^F)$。

这里，$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,k},[X^{\circ}]_k^F)=\{\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,k}),\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_k^F)\}$，$k=1,2,\cdots,m$，$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m},[X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m-1},[X^{\circ}]_{m-1}^F)$ 表示：

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m})\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{F,m-1})$$

$$\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_m^F)\leqslant\mathrm{GRD}([X^{\circ}]_{m-1}^F)$$

由定理 4—定理 6 得到。

F-阶梯知识第一挖掘-发现准则

若 $\mathscr{P}_F(\|y_{F,i}\|/\|y_{F,j}\|)$ 是 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 的特征值向量生成的 2-范数与 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_{F,j}$ 的特征值向量生成的 2-范数之比，而且

$$\mathscr{P}_F(\|y_{F,i}\|/\|y_{F,j}\|)>1\tag{51}$$

则 $[X^{\circ}]_{F,j}$ 在 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 之后被挖掘-发现；$[X^{\circ}]_{F,j}$ 与 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 满足

$$[X^{\circ}]_{F,j}\Rightarrow[X^{\circ}]_{F,i}\tag{52}$$

这里，$[X^{\circ}]_{F,i}=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$；$y_{F,i}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$ 是 $x_i\in[X^{\circ}]_{F,i}$ 的特征值 $y_i\in\mathbf{R}$ 生成的向量；$[X^{\circ}]_{F,j}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；$y_{F,j}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $x_j\in[X^{\circ}]_{F,j}$ 的特征值 $y_j\in\mathbf{R}$ 生成的向量，$\mathbf{R}$ 是实数集；$[X^{\circ}]_{F,j}\subseteq[X^{\circ}]_{F,i}$；$\|y_{F,i}\|=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2)^{1/2}$。

F-阶梯知识第二挖掘-发现准则

若 $Q_F(\|\eta_{F,i}\|/\|\eta_{F,j}\|)$ 是 $\alpha_{F,i}$ 的属性值向量生成的 2-范数与 $\alpha_{F,j}$ 的属性值向量生成的 2-范数之比，而且

$$Q_F(\|\eta_{F,i}\|/\|\eta_{F,j}\|)<1\tag{53}$$

则 $[X^{\circ}]_{F,j}$ 在 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 之后被挖掘-发现；$[X^{\circ}]_{F,j}$ 与 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 满足

$$[X^{\circ}]_{F,j}\Rightarrow[X^{\circ}]_{F,i}\tag{54}$$

这里，$\alpha_{F,i}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$ 是 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_{F,i}$ 的属性集；$\eta_{F,i}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p)^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha_i\in\alpha_{F,i}$ 的属性值 $\eta_i\in\mathbf{R}$ 生成的向量；$\alpha_{F,j}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q\}$ 是 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_{F,j}$ 的属性集；$\eta_{F,j}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q)^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha_j\in\alpha_{F,j}$ 的属性值 $\eta_j\in\mathbf{R}$ 生成的向量；$\mathbf{R}$ 是实数集；$\alpha_{F,i}\subseteq\alpha_{F,j}$；$\|\eta_{F,i}\|=(\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_p^2)^{1/2}$。

显然，利用式(51)一式(54)能够得到 F-阶梯知识 $[X^{\circ}]_i^F$，$[X^{\circ}]_j^F$ 的第一挖掘-发现准则，第二挖掘-发现准则，这些讨论略。

由 F-阶梯知识第一挖掘-发现准则与 F-阶梯知识第二挖掘-发现准则，能够得到一个共同原理。

F-阶梯知识的内潜藏原理

在 F-阶梯系数构成的集合中，任取相邻的 3 个 F-阶梯系

数，而且

$LAC([X^{\circ}]_{F,i})\leqslant LAC([X^{\circ}]_{F,j})\leqslant LAC([X^{\circ}]_{F,k})$

如果$[X^{\circ}]_{F,k}$已被挖掘-发现，则在$[X^{\circ}]_{F,k}$内潜藏着$[X^{\circ}]_{F,j}$，$[X^{\circ}]_{F,i}$；$[X^{\circ}]_{F,j}$，$[X^{\circ}]_{F,i}$是$[X^{\circ}]_{F,k}$的挖掘-发现剩余。

利用第3节、第4节的讨论，第5节给出F-阶梯知识的应用。

5 *F*-阶梯知识挖掘-发现的应用

为了讨论的简单，且不失一般性，这一节中只给出f-阶梯知识挖掘-发现的应用。本节的例子来自某变特征目标跟踪识别系统。下面给出的讨论是这个应用例子的一部分。

给定$\mathcal{O}$，它是一个具有变特征的动态目标，α是$\mathcal{O}$的特征集(属性集)，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$，$\alpha_i\in\alpha$是$\mathcal{O}$的第i个特征，i=1,2,3,4,5；$\alpha_i\in\alpha$的名称略。$\mathcal{O}$由状态元素$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$构成，或者$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$是$\mathcal{O}$具有$\alpha$的7维状态集(7个自由度状态集)。$\forall x_i\in X,y_i\in\mathbf{R}^+$是$x_i$的状态值，$\mathbf{R}^+$是实数集，$i=1,2,\cdots,7$；或者$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7\}$是$\mathcal{O}$的7维状态数据集，$\mathcal{O}_0$是$\mathcal{O}$在$t=0$的状态，$\mathcal{O}_0$具有特征集$\alpha_0=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$。

因为特征集α的变化，$\mathcal{O}$分别在$t=1,t=2,t=3$具有特征集$\alpha_1^f,\alpha_2^f,\alpha_3^f$，而且

$$\alpha_1^f=\alpha\cup\{f(\beta_1)=\alpha_1{}'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_1{}'\}\tag{55}$$

$$\alpha_2^f=\alpha\cup\{f(\beta_1)=\alpha_1{}',f(\beta_2)=\alpha_2{}'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_1{}',\alpha_2{}'\}\tag{56}$$

$$\alpha_3^f=\alpha\cup\{f(\beta_1)=\alpha_1{}',f(\beta_2)=\alpha'_2,f(\beta_3)=\alpha_3{}'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_1{}',\alpha_2{}',\alpha_3{}'\}\tag{57}$$

$\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_3$分别是$\mathcal{O}$在$t=1,t=2,t=3$的状态。这里，$\beta_1,\beta_2,\beta_3\in V$；$\beta_1,\beta_2,\beta_3\,\overline{\in}\,\alpha$；$V$是有限属性论域。

表1给出$\mathcal{O}$在$t=0,1,2,3$的状态数据分布，其中的数据是实际观测数据经过剔除异常值，各行的观测值取对数后求各行$y_i(i=1,2,\cdots,7)$的平均值得到的行数据。被技术处理后的数据不影响本节中给出的分析与得到的结论。

表1 特征集α的变化，$\mathcal{O}$在$t=0,1,2,3$的状态数据分布

	0	1	2	3
y_1	1.8360	—	1.8360	1.8360
y_2	1.0078	1.0078	1.0078	—
y_3	1.6327	1.6327	—	1.6327
y_4	1.7783	1.7783	—	—
y_5	1.9641	1.9641	1.9641	—
y_6	1.4329	—	1.4329	—
y_7	1.5796	1.5796	—	1.5796

注："—"表示无数据。

利用表1，容易得到：$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$关于$t=0$构成等价类$[x]_0$，而且

$$[x]_0=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}\tag{58}$$

$[x]_0$呈现$\mathcal{O}$在$t=0$的状态；类似得到$[x]_1^f,[x]_2^f,[x]_3^f$；$[x]_1^f,[x]_2^f,[x]_3^f$分别呈显$\mathcal{O}$在$t=1,2,3$的状态，而且

$$[x]_1^f=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_7\}\tag{59}$$

$$[x]_2^f=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}\tag{60}$$

$$[x]_3^f=\{x_1,x_3,x_7\}\tag{61}$$

由定义1可知，$[x]_1^f,[x]_2^f,[x]_3^f$分别是$[x]_0$的f-阶梯知识，显然$[x]_0$是f-阶梯单依赖$[x]_1^f,[x]_2^f,[x]_3^f$，而且

$$[x]_3^f\Rightarrow[x]_2^f\Rightarrow[x]_1^f\Rightarrow[x]_0\tag{62}$$

式(62)与F-阶梯知识内潜藏原理，告诉人们一个事实：$\mathcal{O}_0,\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_3$构成关于$\mathcal{O}$的状态单依赖，而且

$$\mathcal{O}_3\Rightarrow\mathcal{O}_2\Rightarrow\mathcal{O}_1\Rightarrow\mathcal{O}_0\tag{63}$$

式(63)指出，$\mathcal{O}_0$变成状态$\mathcal{O}_1$，状态$\mathcal{O}_2$隐藏在$\mathcal{O}_1$内，状态$\mathcal{O}_3$隐藏在$\mathcal{O}_2$内。

利用式(64)：

$\mathcal{O}_3,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_1$的状态集$[x]_3^f,[x]_2^f,[x]_1^f$满足

$$LAC([X^{\circ}]_3^f)\leqslant LAC([X^{\circ}]_2^f)\leqslant LAC([X^{\circ}]_1^f)\tag{64}$$

若$LAC([X^{\circ}]_1^f)$已被观测到，则$\mathcal{O}$的后继状态变化，从$LAC([X^{\circ}]_1^f)$中得到近似估计。

利用表1与F-阶梯知识第一挖掘-发现准则，得到：

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,1}\|)=1.2030\\&\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,2}\|)=1.3309\\&\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,3}\|)=1.4962\end{aligned}\tag{65}$$

或者

$$\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,1}\|)\leqslant\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,2}\|)\leqslant\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,3}\|)\tag{66}$$

式(66)指出：变特征目标$\mathcal{O}$的状态变化，是利用对特征集(属性集)进行特征(属性)补充完成的。显然，在$[t=0,t=1]$，$[t=0,t=2]$，$[t=0,t=3]$上，$\mathcal{O}_3,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_1$关于$\mathcal{O}$可分辨-识别，或者

$$\begin{aligned}&\underset{[t=0,t=1]}{\mathrm{DIS}}\{\mathcal{O}_0,\mathcal{O}_1\}\\&\underset{[t=0,t=2]}{\mathrm{DIS}}\{\mathcal{O}_0,\mathcal{O}_2\}\\&\underset{[t=0,t=3]}{\mathrm{DIS}}\{\mathcal{O}_0,\mathcal{O}_3\}\end{aligned}\tag{67}$$

式(65)—式(67)指出：如果变特征的动态目标$\mathcal{O}$，它的2-范数比满足

$$\mathcal{P}_f(\|y_{f,0}\|/\|y_{f,k}\|)\neq1\tag{68}$$

人们能从$\mathcal{O}$的t状态，知道$\mathcal{O}$的$t+1$状态，给出$\mathcal{O}$的未来状态估计-识别。

结束语 单向S-粗集的一个基本而且重要特征是，构成单向S-粗集的基本单元：元素等价类$[x]$，$[x]$的属性集α具有被补充属性的特征，使得元素等价类$[x]$逐渐变小(或$[x]$的属性集α逐渐变大)，单向S-粗集具有了动态特性。在一类重要的变特征目标识别系统中，被识别的目标在不断变换着(或隐藏着)某些特征，以达到欺骗-迷惑目标识别者的目的。变特征目标的特征变化与单向S-粗集中的元素等价类$[x]$的属性变化(f-阶梯知识)相似；因此，单向S-粗集是变特征目标(隐形目标)识别研究的一个新的数学理论与方法。本文给出的研究是在这个背景下得到的。由于条件所限，第5节只能给出部分f-阶梯知识的存在与应用。

事实上，变特征动态目标的每一次特征变换都对应着这个目标的一个状态集(元素等价类，元素的特征值能被观测)；若α_i^f,α_j^f分别是$[x]_i^f,[x]_j^f$的特征集(属性集)，$\alpha_i^f\neq\alpha_j^f$，则$[x]_i^f\neq[x]_j^f$($[x]_i^f,[x]_j^f$分别是动态目标$\mathcal{O}_i,\mathcal{O}_j$的状态集)。这个状态集(元素等价类)是构成单向S-粗集的一个基本单

元，本文给出的讨论是S-粗集中的一个新的应用研究方向。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 1-356

[2] Shi Kai-quan. S-rough sets and its applications in diagnosis-recognition for disease[C] // IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2002, 1: 50-54

[3] Shi Kai-quan, Cui Yu-quan. F-decomposition and $\overline{F}$-reduction of S-rough sets[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2004, 4: 487-499

[4] Shi Kai-quan. S-rough sets and knowledge separation[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2005, 2: 403-410

[5] Shi Kai-quan, Chang Ting-cheng. One direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2: 319-334

[6] Shi Kai-quan. Two direction S-rough sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2: 335-349

[7] Wang Hong-yu, Liu Yu-lan, Shi Kai-quan. Memory Knowledge and its memory mining[J]. An International Journal Advances in systems Science and Applications, 2005, 4: 546-553

[8] Shi Kai-quan, Cui Yu-quan. One direction S-rough decision and decision model[C] // IEEE proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2004, 3: 1352-1356

[9] Cui Ming-hui, Shi Kai-quan. f-heredity knowledge and f-heredity mining[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006, 1: 101-106

[10] Hu Hai-qing, Wang yan, Shi Kai-quan. S-rough communication and its Characteristics[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2007, 1: 148-154

[11] Hao Xiu-mei, Du Ying-ling. S-knowledge mining and its $(f, \overline{f})$-attribute transfer dependence[C] // IEEE Proceedings of the Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. 2008, 2: 202-206

[12] 郝秀梅，付海艳，史开泉. S-粗集和 $\overline{F}$(over-bar)-隐藏知识发现[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 4: 644-648

[13] 郝秀梅，李君. 粗信息矩阵的数量特征[J]. 模糊系统与数学, 2011, 2: 156-162

（上接第 187 页）

[17] Bergstra J, Casagrande N, Erhan D, et al. Aggregate features and ADA BOOST for music classification [J]. Machine Learning, 2006, 65(2/3): 473

[18] Freund Y, Schapire R E. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting [J]. Journal of Computer and System Science, 1997, 55(1): 119

[19] Zhang Yuan-wei, Yang Yi-fan, Huan Zhang, et al. Prediction of novel pre-microRNAs with high accuracy through boosting and SVM [J]. Bioinformatics, 2011, 27(10): 1436

[20] 邹权，郭茂祖，刘扬，等. 类别不平衡的分类方法及在生物信息学中的应用 [J]. 计算机研究与发展, 2010, 47(8): 1407

[21] Jiang Yuan, Li Ming, Zhou Zhi-hua. Mining extremely small data sets with application to software reuse [J]. Software: Practice and Experience, 2009, 39(4): 423

[22] Geng Xin, Zhou Zhi-hua. Image region selection and ensemble for face recognition [J]. Journal of Computer Science and Technology, 2006, 21(1): 116

[23] Zhou Zhi-hua, Jiang Yuan, Yang Yu-bin, et al. Lung cancer cell identification based on artificial neural network ensembles [J]. Artificial Intelligence inMedicine, 2002, 24(1): 25

[24] Wang Gang, Hao Jin-xing, Ma Jian, et al. A comparative assessment of ensemble learning for credit scoring [J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(1): 223

[25] Ghodselahi A. A hybrid support vector machine ensemble model for credit scoring [J]. International Journal of Computer Applications, 2011, 17(5): 1

[26] Kuncheva L I, Whitaker C J. Measures of diversity in classifier ensembles and their relationship with the ensemble accuracy [J]. Machine Learning, 2003, 51(2): 181

[27] Shipp C A, Kuncheva L I. Relationships between combination methods and measures of diversity in combining classifiers [J]. Information Fusion, 2002, 3(2): 135

[28] Giacinto G, Roli F. An approach to the automatic design of multiple classifier systems [J]. Pattern Recognition Letters, 2001, 22(1): 25

[29] Bakker B, Heskes T. Clustering ensembles of neural network models [J]. Neural Networks, 2003, 16(2): 261

[30] 傅强. 选择性神经网络集成算法研究 [D]. 杭州：浙江大学, 2007

[31] 郭红玲. 多分类器选择关键技术研究 [D]. 镇江：江苏大学, 2007

[32] Cheng X Y, Guo H L. The technology of selective multiple classifiers ensemble based on kernel clustering [C] // Proc of the 2nd Symp on Intelligent Information Technology Application. Shanghai: IEEE, 2008: 146

[33] Lazarevic A, Obradovic Z. Effective pruning of neural network classifier ensembles [C] // Proc of Int Joint Conf on Neural Networks. Washington DC: IEEE, 2001: 796

[34] 郝红卫，王志彬，殷绪成，等. 分类器的动态选择和循环集成方法 [J]. 自动化学报, 2011, 37(11): 1290

[35] 张春霞，张讲社. 选择性集成学习算法综述 [J]. 计算机学报, 2011, 34(8): 1399

[36] Homburg H, Mierswa I, et al. A benchmark dataset for audio classification and clustering [C] // Proc of Int Conf on Music Information Retrieval. London: INRIA, 2005

[37] Lartillot O, Toiviainen P. MIR in Matlab(II): A toolbox for musical feature extraction from audio [C] // Proc of the 10th Conf on Digital Audio Effects. Bordeaux: DAFx, 2007

[38] Mierswa I, Morik K. Automatic feature extraction for classifying audio data [J]. Machine Learning, 2005, 58(2/3): 127

[39] Li Tao, Ogihara M. Toward intelligent music information retrieval [J]. IEEE Trans on Multimedia, 2006, 8(3): 564