模糊数决策粗糙集

刘 盾[1] 李天瑞[2] 梁德翠[1]
(西南交通大学经济管理学院 成都 610031)[1] (西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031)[2]

摘 要 考虑到实际决策问题中损失函数的不确定性特征,从贝叶斯理论出发,将模糊数损失函数引入决策粗糙集,提出模糊数决策粗糙集模型。首先,讨论在贝叶斯期望风险最小决策的语义下模糊数决策粗集理论基本模型的构建过程。其次,分析模糊数决策粗集理论的相关数学性质和准则。最后,通过一个企业信用评估问题来阐明模糊数决策粗糙集模型的应用过程。

关键词 决策粗糙集理论,概率粗糙集理论,贝叶斯过程,模糊数
中图法分类号 TP18,N945.25 **文献标识码** A

Fuzzy Decision-theoretic Rough Sets

LIU Dun[1] LI Tian-rui[2] LIANG De-cui[1]
(Department of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[1]
(Department of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[2]

Abstract By considering the uncertain character in practical decision procedure, the fuzzy loss functions were induced to decision-theoretic rough set theory (DTRS) based on the BayesianB decision theory. With respect to the minimum Bayesian expected risk, a model of fuzzy decision-theoretic rough set theory (FDTRS) was built. The corresponding propositions and criteria of fuzzy decision-theoretic rough set theory were also analyzed. An example of enterprise credit assessment was given to illuminate the proposed model in applications.

Keywords Decision-theoretic rough set theory, Probabilistic rough set theory, Bayesian decision procedure, Fuzzy number

1 引言

决策粗糙集(Decision-theoretic rough sets, DTRS)是上世纪90年代初由Yao.Y.Y.提出的一种重要的粗糙集模型,其最大特点是引入贝叶斯理论,利用损失函数来度量实际决策问题中的风险。它不仅考虑了概率粗糙集对模型容错能力和分类错误的刻画,而且讨论了在贝叶斯期望风险最小的决策语义下,两个阈值参数的自动获取过程。决策粗糙集的提出为粗糙集理论和决策理论的融合建立起一座桥梁。

现有文献对于决策粗糙集的研究主要集中在模型、属性约简和应用3个方面。在模型上,Abd El-Monsef和Kilany将基本模型中的等价关系扩展到了广义二元关系,提出了一种广义的决策粗糙集模型[1]。Herbert和Yao J.T.将代价损失函数的确定视为一个目标优化的博弈问题,提出了博弈论粗糙集模型[2]。Liu和Li考虑到状态集是多分类的情形,提出了一种多分类决策粗糙集模型[6]。Li和Zhou根据决策者的不同风险偏好,给出了乐观决策、悲观决策与中性决策的多角度决策粗糙集模型[3]。Yang和Yao J.T.针对目前决策粗糙集模型集中于单代理的现状,提出了一个多代理的决策粗糙集模型[15]。Ma和Sun讨论了多论域下的决策粗糙集模型[9]。刘盾等考虑了损失函数为区间数时的区间值决策粗糙集模型[26]。在属性约简上,现有研究主要集中于"正域约简"和"决策风险最小化约简"两个方面。Yao.Y.Y.和Zhao从性质保留性和属性独立性两个方面给出了一种广义的约简定义,并利用区分矩阵,依次构造出了在决策粗糙集模型下保持决策属性不变和区域不变的属性约简[17]。李华雄等提出了一种在决策粗糙集模型下至少保持正域不变的启发式约简算法[4]。贾修一和商琳提出了一种基于决策风险最小化的属性约简定义,它要求在约简后的属性集合上所做出的决策风险最小[22]。此外,决策粗糙集已在医疗网络支持系统、邮件信息过滤系统、E-Learning系统数据分析、文本聚类和分类、石油开采、政策制定等医学、信息、管理问题中得到了较好的应用[7,23-25]。

然而,在已有对决策粗糙集的研究中,大多都假定损失函数为精确值。在实际决策过程中,风险应具有一定的不确定性。心理学家Mishra和Shiv在研究中指出:与一个刚性的、精确的目标相比,人们往往更容易对头脑中勾勒的一个模糊的愿景保持积极性,并最终达成目标[10]。此外,利用模糊数来

到稿日期:2012-02-12 返修日期:2012-07-25 本文受国家自然科学基金(71201133,61175047),教育部人文社科基金青年项目(11YJC630127),中央高校基本科研业务费专项资金(SWJTU12CX117)资助。
刘 盾(1983-),男,讲师,主要研究方向为粗集决策、智能系统等,E-mail:newton83@163.com;李天瑞(1969-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为智能信息处理、数据挖掘等;梁德翠(1986-),男,博士生,主要研究方向为粗糙集与粒计算。

代替精确值，在实际中也往往更容易获取。基于此，本文拟将模糊数损失函数引入决策粗糙集，提出一种模糊数决策粗糙集模型。本文首先简要介绍相关粗糙集基本理论和研究背景；其次讨论模糊数决策粗集理论基本模型的构建过程，并介绍其相关语义和性质；最后针对企业信用评估问题给出一个模型的具体应用。

2 粗糙集理论相关基本概念

在本节中，主要简要介绍粗糙集理论及其扩展模型的基本概念和定义，以及模糊数的定义和运算法则[11-14,20]。

定义 1 假设 U 是一个有限的非空子集，$R\subseteq U\times U$ 为论域 U 上的等价关系。记 $apr=(U,R)$ 为一粗糙近似空间，U 可以通过该等价关系 R 划分成互不相交的子集，形成论域 U 上的一个划分 $U/R=\{[x]_R\mid x\in U\}$。对 $X\in U$，其上下近似可定义为：$\underline{apr}(X)=\{x\in U\mid[x]\subseteq X\}$，$\overline{apr}(X)=\{x\in U\mid[x]\cap X\neq\emptyset\}$。上下近似将论域分为正域 $POS(X)$、边界域 $BND(X)$ 和负域 $NEG(X)$，其定义分别为：

$$\begin{aligned}&POS(X)=\underline{apr}(X);\\&BND(X)=\overline{apr}(X)-\underline{apr}(X)\\&NEG(X)=U-\overline{apr}(X)\end{aligned}\tag{1}$$

Yao 进一步提出了三枝决策的概念：从正域里获取的正规则用来表示接受某事物；从负域里获取的负规则用来表示拒绝某事物；落在边界域上的规则表示需要进一步观察，即：延迟决策。三枝决策思想的提出丰富了决策粗糙集在实际问题中的应用背景[5,8,18,19]。

定义 2 假设 $S=(U,A,V,f)$ 是一个信息表，对 $X\subseteq U$，令 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$，则 (α,β)-上下近似集可定义为：

$$\begin{aligned}&\underline{apr}_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U\mid \Pr(X\mid[x])\geqslant\alpha\}\\&\overline{apr}_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U\mid \Pr(X\mid[x])>\beta\}\end{aligned}\tag{2}$$

其中，$\Pr(X\mid[x])=|[x]\cap X|/|[x]|$ 表示分类的条件概率（也称为粗糙隶属函数），$|\cdot|$ 表示集合中元素的基数。同样地，(α,β)-上下近似集将论域分为 3 个部分：$POS_{(\alpha,\beta)}(X)$、$BND_{(\alpha,\beta)}(X)$ 和 $NEG_{(\alpha,\beta)}(X)$，其定义分别为：

$$\begin{aligned}&POS_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U\mid \Pr(X\mid[x])\geqslant\alpha\}\\&BND_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U\mid \beta<\Pr(X\mid[x])<\alpha\}\\&NEG_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U\mid \Pr(X\mid[x])\leqslant\beta\}\end{aligned}\tag{3}$$

定义 3 论域 X 到 $[0,1]$ 闭区间上的任意映射

$$\begin{aligned}&\mu_{\widetilde{A}}:X\to[0,1]\\&x\to\mu_{\widetilde{A}}\end{aligned}\tag{4}$$

确定 X 上的一个模糊数 $\widetilde{A}$，$\mu_{\widetilde{A}}$ 称为 $\widetilde{A}$ 的隶属函数，$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 称为 x 对 $\widetilde{A}$ 的隶属度，记为：

$$\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x))\mid x\in X\}\tag{5}$$

定义 4 设 $\widetilde{A}\in F(X)$，$\forall\,\eta\in[0,1]$，称：

$$A_\eta=\{x\mid x\in X,\mu_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\eta\}\tag{6}$$

为 A 的 η-截集。特别地，称 $A_\eta=\{x\mid x\in X,\mu_{\widetilde{A}}(x)>\eta\}$ 为 A 的强-截集。

假设 $\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{N}$ 为两个模糊数，记 $\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)$，$\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)$ 和 $\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L)$，$\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U)$ 分别表示模糊数 $\widetilde{M}$，$\widetilde{N}$ 的 η-截集的左端点和右端点，$\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)=\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)$，$\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L)=\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U)$。则模糊数四则运算的具体表达式如下：

(1)模糊加法：$\widetilde{M}^\eta(+)\widetilde{N}^\eta=[\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)+\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L),\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)+\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U)]$。

(2)模糊减法：$\widetilde{M}^\eta(-)\widetilde{N}^\eta=[\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)-\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U),\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)-\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L)]$。

(3)模糊乘法：$\widetilde{M}^\eta(\times)\widetilde{N}^\eta=[\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)\times\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L),\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)\times\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U)]$。

(4)模糊除法：$\widetilde{M}^\eta(\div)\widetilde{N}^\eta=[\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)\div\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^U),\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^U)\div\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L)]$ 且 $\mu_{\widetilde{M}}(m_\eta^L)$，$\mu_{\widetilde{N}}(m_\eta^L)>0$。

3 模糊数决策粗糙集模型

决策粗糙集模型的基本思想来源于贝叶斯决策理论[16]。其基本模型为：假设 $S=(U,A,V,f)$ 是一个信息表，$\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ 为 m 个有限的状态集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为 n 个有限的行动集。$\Pr(w_i\mid x)$ 表示 x 在状态 w_i 下的条件概率。令 $\lambda(a_j\mid w_i)$ 为在状态 w_i 下采取行动 a_j 的损失或代价。对于某元素 x，如果采取行动 a_j，其期望损失为：

$$R(a_j\mid x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda(a_j\mid w_i)\Pr(w_i\mid x)\tag{7}$$

一般地，对于给定的描述 x，令 $\tau(x)$ 为一个决策规则，它是描述空间到 A 的一个函数，$\tau(x)\in A$。令 $\mathscr{R}$ 是在给定一个决策规则 τ 下的总体期望风险，它可表示为：

$$\mathscr{R}=\sum_{x\in U}R(\tau(x)\mid x)\Pr(x)\tag{8}$$

式中，$\Pr(x)$ 为 x 的先验概率，$R(\tau(x)\mid x)$ 则为采取不同行动时 x 的条件风险。按照贝叶斯决策过程，需要选取使得总体期望风险 $\mathscr{R}$ 达到最小的决策行为作为最佳行动方案。如果有多个决策使得 $\mathscr{R}$ 达到最小，则根据实际情况选择其中之一。

模糊数决策粗糙集模型由 2 个状态集和 3 个行动集来描述决策过程。状态集 $\Omega=\{X,\neg X\}$ 分别表示某事件属于 X 和不属于 X，行动集 $A=\{a_P,a_B,a_N\}$ 分别表示接受某事件、延迟决策和拒绝某事件 3 种行动。考虑到损失函数具有一定的模糊性，给定一个隶属度 η，$\eta\in[0,1]$，记 $\tilde{\lambda}_{PP}^\eta$，$\tilde{\lambda}_{BP}^\eta$，$\tilde{\lambda}_{NP}^\eta$ 分别表示当 x 属于 X 时采取行动 a_P，a_B 和 a_N 下的损失；同样地，记 $\tilde{\lambda}_{PN}^\eta$，$\tilde{\lambda}_{BN}^\eta$，$\tilde{\lambda}_{NN}^\eta$ 分别表示当 x 不属于 X 时采取行动 a P，a_B 和 a_N 下的损失。此外，记 $\cdot\cdot_\eta^L$ 和 $\cdot\cdot_\eta^U$ 分别表示模糊损失函数 $\tilde{\lambda}_{\cdot\cdot}^\eta$ 在 η-截集下的左右端点。不同状态下对应的不同行动的损失函数如表 1 所列。

表 1 不同状态对应不同行动的损失函数

	X(P)	¬X(N)
aP	$\tilde{\lambda}_{PP}^\eta=[PP_\eta^L,PP_\eta^U]$	$\tilde{\lambda}_{PN}^\eta=[PN_\eta^L,PN_\eta^U]$
a_B	$\tilde{\lambda}_{BP}^\eta=[BP_\eta^L,BP_\eta^U]$	$\tilde{\lambda}_{BN}^\eta=[BN_\eta^L,BN_\eta^U]$
a_N	$\tilde{\lambda}_{NP}^\eta=[NP_\eta^L,NP_\eta^U]$	$\tilde{\lambda}_{NN}^\eta=[NN_\eta^L,NN_\eta^U]$

进一步地，$\cdot\cdot_\eta^L$ 代表各损失函数的下界，它表示风险偏好者对风险的衡量，这类人对风险采取乐观态度，他们往往低估损失函数值；$\cdot\cdot_\eta^U$ 代表各损失函数的上界，它可以表示风险厌恶者对风险的衡量，这类人对风险采取悲观态度，他们往往高估损失函数值。

基于上述分析，由式(7)可知，对 $\forall\,x\in U$，风险偏好者和风险厌恶者采取 a_P，a_B 和 a_N 3 种行动下的期望损失可表示为式(9)和式(10)。

风险偏好者采取不同行动的期望损失：

$$\begin{aligned}&R(a_P\mid[x])=PP_\eta^L\Pr(X\mid[x])+PN_\eta^L\Pr(\neg X\mid[x])\\&R(a_B\mid[x])=BP_\eta^L\Pr(X\mid[x])+BN_\eta^L\Pr(\neg X\mid[x])\end{aligned}\tag{9}$$

$R(a_N|[x])=NP_\eta^L\Pr(X|[x])+NN_\eta^L\Pr(\neg X|[x])$

风险厌恶者采取不同行动的期望损失：

$$R(a_P|[x])=PP_\eta^U\Pr(X|[x])+PN_\eta^U\Pr(\neg X|[x])$$
$$R(a_B|[x])=BP_\eta^U\Pr(X|[x])+BN_\eta^U\Pr(\neg X|[x]) \quad (10)$$
$$R(a_N|[x])=NP_\eta^U\Pr(X|[x])+NN_\eta^U\Pr(\neg X|[x])$$

根据贝叶斯决策准则，需要选择期望损失最小的行动集作为最佳行动方案，于是可得到如下 3 条决策规则(P)－(N)：

(P)：若 $R(a_P|[x])\leqslant R(a_B|[x])$ 和 $R(a_P|[x])\leqslant R(a_N|[x])$ 同时成立，则 $x\in POS(X)$；

(B)：若 $R(a_B|[x])\leqslant R(a_P|[x])$ 和 $R(a_B|[x])\leqslant R(a_N|[x])$ 同时成立，则 $x\in BND(X)$；

(N)：若 $R(a_N|[x])\leqslant R(a_P|[x])$ 和 $R(a_N|[x])\leqslant R(a_B|[x])$ 同时成立，则 $x\in BEG(X)$。

对于风险偏好者，一个合理的假设为：$0\leqslant PP_\eta^L<BP_\eta^L<NP_\eta^L$，$0\leqslant NN_\eta^L<BN_\eta^L<PN_\eta^L$；对于风险厌恶者，一个合理的假设为：$0\leqslant PP_\eta^U<BP_\eta^U<NP_\eta^U$，$0\leqslant NN_\eta^U<BN_\eta^U<PN_\eta^U$。上述两个假设表示接受正确事物的损失不大于延迟接受正确事物的损失，且这两者都小于拒绝正确事物的损失；同样地，拒绝错误事物的损失不大于延迟拒绝错误事物的损失，且这两者都小于接受错误事物的损失。根据 $\Pr(X|[x])+\Pr(\neg X|[x])=1$ 可知，规则只与概率 $\Pr(X|[x])$ 和相关的损失函数有关。由此，分别计算风险偏好者和风险厌恶者 3 个阈值参数的值，如表 2 所列。

表 2　风险偏好者和风险厌恶者 3 个阈值参数取值表

阈值	风险偏好者	风险厌恶者
α	$\alpha_1=\dfrac{(PN_\eta^L-BN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-BN_\eta^L)+(BP_\eta^L-PP_\eta^L)}$	$\alpha_2=\dfrac{(PN_\eta^U-BN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-BN_\eta^U)+(BP_\eta^U-PP_\eta^U)}$
β	$\beta_1=\dfrac{(BN_\eta^L-NN_\eta^L)}{(BN_\eta^L-NN_\eta^L)+(NP_\eta^L-BP_\eta^L)}$	$\beta_2=\dfrac{(BN_\eta^U-NN_\eta^U)}{(BN_\eta^U-NN_\eta^U)+(NP_\eta^U-BP_\eta^U)}$
γ	$\gamma_1=\dfrac{(PN_\eta^L-NN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-NN_\eta^L)+(NP_\eta^L-PP_\eta^L)}$	$\gamma_2=\dfrac{(PN_\eta^U-NN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-NN_\eta^U)+(NP_\eta^U-PP_\eta^U)}$

由规则(B)可知：$\alpha_1>\beta_1$ 和 $\alpha_2>\beta_2$，则 $\frac{BP_\eta^L-PP_\eta^L}{PN_\eta^L-BN_\eta^L}<\frac{NP_\eta^L-BP_\eta^L}{BN_\eta^L-NN_\eta^L}$，$\frac{BP_\eta^U-PP_\eta^U}{PN_\eta^U-BN_\eta^U}<\frac{NP_\eta^U-BP_\eta^U}{BN_\eta^U-NN_\eta^U}$。此外，由不等式 $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}>\frac{b+d}{a+c}>\frac{d}{c}$ $(a,b,c,d>0)$，我们有：$\frac{BP_\eta^L-PP_\eta^L}{PN_\eta^L-BN_\eta^L}<\frac{NP_\eta^L-PP_\eta^L}{PN_\eta^L-NN_\eta^L}<\frac{NP_\eta^L-BP_\eta^L}{BN_\eta^L-NN_\eta^L}$，$\frac{BP_\eta^U-PP_\eta^U}{PN_\eta^U-BN_\eta^U}<\frac{NP_\eta^U-PP_\eta^U}{PN_\eta^U-NN_\eta^U}<\frac{NP_\eta^U-BP_\eta^U}{BN_\eta^U-NN_\eta^U}$。因而，$0\leqslant\beta_1<\gamma_1<\alpha_1\leqslant1$ 和 $0\leqslant\beta_2<\gamma_2<\alpha_2\leqslant1$。这样，决策规则(P)，(B)，(N)可重写为：

对于风险偏好者，其决策准则为：

(P1)：如果 $\Pr(X|[x])\geqslant\alpha_1$，则 $x\in POS(X)$；

(B1)：如果 $\beta_1<\Pr(X|[x])<\alpha_1$，则 $x\in BND(X)$；

(N1)：如果 $\Pr(X|[x])\leqslant\beta_1$，则 $x\in NEG(X)$。

对于风险厌恶者，其决策准则为：

(P2)：如果 $\Pr(X|[x])\geqslant\alpha_2$，则 $x\in POS(X)$；

(B2)：如果 $\beta_2<\Pr(X|[x])<\alpha_2$，则 $x\in BND(X)$；

(N2)：如果 $\Pr(X|[x])\leqslant\beta_2$，则 $x\in NEG(X)$。

特别地，当 $PP_\eta^L=PP_\eta^U$，$BP_\eta^L=BP_\eta^U$，$NP_\eta^L=NP_\eta^U$，$PN_\eta^L=PN_\eta^U$，$BN_\eta^L=BN_\eta^U$，$NN_\eta^L=NN_\eta^U$ 时，决策规则(P1)－(N1)与(P2)－(N2)等价，模糊数决策粗糙集退化为 Yao 提出的决策粗糙集。

针对模糊数决策粗糙集模型，这里考虑一种实际决策语义性：

$$\begin{gathered}0\leqslant PP_\eta^L\leqslant PP_\eta^U\leqslant BP_\eta^L\leqslant BP_\eta^U<NP_\eta^L\leqslant NP_\eta^U\\0\leqslant NN_\eta^L\leqslant NN_\eta^U\leqslant BN_\eta^L\leqslant BN_\eta^U<PN_\eta^L\leqslant PN_\eta^U\end{gathered}\quad(11)$$

式(11)表示模糊损失函数 $\tilde{\lambda}_{BP}^\eta$ 的左端点不小于 $\tilde{\lambda}_{PP}^\eta$ 的右端点；$\tilde{\lambda}_{NP}^\eta$ 的左端点大于 $\tilde{\lambda}_{BP}^\eta$ 的右端点；同样地，模糊损失函数 $\tilde{\lambda}_{BN}^\eta$ 的左端点不小于 $\tilde{\lambda}_{NN}^\eta$ 的右端点；$\tilde{\lambda}_{PN}^\eta$ 的左端点大于 $\tilde{\lambda}_{BN}^\eta$ 的右端点。

基于决策粗糙集模型和模糊数的四则运算，给出两个定理来确定 α 和 β 的区间上下确界。

定理 1　在满足式(11)条件的情况下，阈值 α 的取值范围为：$\alpha\in[\frac{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)+(BP_\eta^U-PP_\eta^L)},\min(\frac{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)+(BP_\eta^L-PP_\eta^U)},1)]$。

证明：根据现有的决策粗糙集模型推导条件易得，$PN-BN>0$，$BP-PP\geqslant0$，$\alpha=\frac{(PN-BN)}{(PN-BN)+(BP-PP)}$。再由式(11)可得，$PN_\eta^L-BN_\eta^U\leqslant PN-BN\leqslant PN_\eta^U-BN_\eta^L$，$BP_\eta^L-PP_\eta^U\leqslant BP-PP\leqslant BP_\eta^U-PP_\eta^L$。因此 $(PN_\eta^L-BN_\eta^U)+(BP_\eta^L-PP_\eta^U)\leqslant(PN-BN)+(BP-PP)\leqslant(PN_\eta^U-BN_\eta^L)+(BP_\eta^U-PP_\eta^L)$。由此可得，$\frac{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)+(BP_\eta^U-PP_\eta^L)}\leqslant\frac{(PN-BN)}{(PN-BN)+(BP-PP)}\leqslant\frac{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)+(BP_\eta^L-PP_\eta^U)}$。又因为 $\alpha\in[0,1]$，所以，$\alpha\in[\frac{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)+(BP_\eta^U-PP_\eta^L)},\min(\frac{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)+(BP_\eta^L-PP_\eta^U)},1)]$ 成立。得证。

定理 2　在满足式(11)条件的情况下，阈值 β 的取值范围为：$\beta\in[\frac{(BN_\eta^L-NN_\eta^U)}{(BN_\eta^U-NN_\eta^L)+(NP_\eta^U-BP_\eta^L)},\min(\frac{(BN_\eta^U-NN_\eta^L)}{(BN_\eta^L-NN_\eta^U)+(NP_\eta^L-BP_\eta^U)},1)]$。

证明：根据决策粗糙集模型推导条件易得，$BN-NN>0$，$NP-BP>0$，因此，$\beta=\frac{(BN-NN)}{(BN-NN)+(NP-BP)}$。其他证明过程同定理 1，这里省略。

由定理 1 和定理 2，显然有：

$$\alpha_1,\alpha_2\in[\alpha_L,\alpha_U]=[\frac{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)}{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)+(BP_\eta^U-PP_\eta^L)},\min(\frac{(PN_\eta^U-BN_\eta^L)}{(PN_\eta^L-BN_\eta^U)+(BP_\eta^L-PP_\eta^U)},1)]$$
$$\beta_1,\beta_2\in[\beta_L,\beta_U]=[\frac{(BN_\eta^L-NN_\eta^U)}{(BN_\eta^U-NN_\eta^L)+(NP_\eta^U-BP_\eta^L)},\min(\frac{(BN_\eta^U-NN_\eta^L)}{(BN_\eta^L-NN_\eta^U)+(NP_\eta^L-BP_\eta^U)},1)] \quad (12)$$

式(12)表明了风险偏好者和风险厌恶者的决策准则只是模糊数决策粗糙集的一个特例。

4　案例分析

下面利用企业信用评估的例子来阐明模糊数决策粗糙集

的应用过程。对企业进行信用评估，一方面有利于资本市场的公平、公正和诚信，有助企业防范商业风险，为现代企业制度的建设提供良好条件；另一方面，也是商业银行确定贷款风险程度的依据和信贷资产风险管理的基础。它通过对企业信用记录、经营水平、外部环境、财务状况、发展前景以及可能出现的各种风险等进行客观、科学、公正的分析研究，就其信用做出综合评定。文献[21]详细地讨论了新兴技术企业信用风险识别问题，总结出 4 类财务方面指标和 1 类非财务方面指标。其中，4 类财务方面指标依次反映出企业的偿债能力、盈利能力、经营能力和发展前景。而 1 类非财务方面指标则反映出企业的创新能力。

根据模糊数决策粗糙集的思想，企业信用评估问题利用 2 个状态集和 3 个行动集来描述决策过程。状态集 $\Omega=\{X, \neg X\}$ 分别表示企业信用可靠和企业信用不可靠两种状态；行动集 $A=\{a_P, a_B, a_N\}$ 分别表示判定企业信用可靠、延迟判定和判定企业信用不可靠 3 种行动。接着，专家利用企业信用评定指标对各个企业进行仔细评估，综合给出参与评定的企业的损失函数。考虑到专家思维模糊性和评估过程中的不确定性情况，最终各损失函数是由模糊数来表示。对于各模糊数，考虑到简单多数原则，这里对所有损失函数模糊数取截集 $\eta=0.5$。令 $\tilde{\lambda}_{PP}=[PP_\eta^L, PP_\eta^U]$，$\tilde{\lambda}_{BP}=[BP_\eta^L, BP_\eta^U]$，$\tilde{\lambda}_{NP}=[NP_\eta^L, NP_\eta^U]$ 分别表示在隶属度 η 下，当企业信用可靠时采取行动 a_P，a_B 和 a_N 下的损失；$\tilde{\lambda}_{PN}=[PN_\eta^L, PN_\eta^U]$，$\tilde{\lambda}_{BN}=[BN_\eta^L, BN_\eta^U]$，$\tilde{\lambda}_{NN}=[NN_\eta^L, NN_\eta^U]$ 分别表示在隶属度 η 下，当企业信用不可靠时采取行动 a_P，a_B 和 a_N 下的损失。表 3 给出了 6 家企业的模糊损失函数左右端点的情况，其数值是综合相关专家意见得到的结果。

表 3　6 家企业的综合评估损失情况

O	PP_η^L	PP_η^U	BP_η^L	BP_η^U	NP_η^L	NP_η^U	NN_η^L	NN_η^U	BN_η^L	BN_η^U	PN_η^L	PN_η^U
o_1	3.5	4	6	7.3	10	11.2	1	2.5	5.2	6	9	10
o_2	0.5	0.8	3.9	4	7	7.2	0	2.1	2.5	3	11.2	13
o_3	2	4	5	6.5	8	9	0	0.5	1	1.5	3	4
o_4	1.5	2	4	5	12.7	13	0	4	7	8.2	10.8	11
o_5	0.5	1	1.5	2.1	3	6	0	0.5	1	4	5	8
o_6	4.5	4.6	6	6.5	8	9	2.8	3	5	6	9.7	9.9

通过表 2、表 3 以及式(12)，计算得到 6 家企业相应的 α 和 β 值，结果如表 4 所列。

表 4　6 家企业的相关阈值计算结果

企业	风险偏好者决策准则			风险厌恶者决策准则			阈值下界		阈值上界	
O	α_1	β_1	γ_1	α_2	β_2	γ_2	α_L	β_L	α_U	β_U
o_1	0.6032	0.5122	0.5517	0.5479	0.4730	0.5102	0.3488	0.2647	0.9600	0.9259
o_2	0.7190	0.4464	0.6328	0.7576	0.2195	0.6301	0.5857	0.0635	0.9292	0.8824
o_3	0.4000	0.2500	0.3333	0.5000	0.2857	0.4118	0.2000	0.0909	1.0000	0.7500
o_4	0.6032	0.4459	0.4909	0.4828	0.3443	0.3889	0.3467	0.1744	0.8696	0.7664
o_5	0.8000	0.4000	0.6667	0.7843	0.4730	0.6000	0.1163	0.0588	1.0000	1.0000
o_6	0.7581	0.5238	0.6635	0.6724	0.5455	0.6106	0.5362	0.3226	0.9608	0.9143

表 4 详细地列出了每一个企业在风险偏好者决策准则、风险厌恶者决策准则下，α，β 和 γ 的取值情况；并给出了 α 和 β 的阈值下界和阈值上界，可以看到，$\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha_L, \alpha_U]$，$\beta_1, \beta_2 \in [\beta_L, \beta_U]$。根据模糊数决策粗糙集中的决策规则，在决策判定过程中需比较条件概率 $\Pr(X|o_i)$ 与 α 和 β 值的大小。条件概率 $\Pr(X|o_i)$ 表示企业属于信用可靠的概率，计算通常会根据先验信息来确定，其具体计算过程可参见文献[18]。这里，为了方便起见，表 5 给出了条件概率 $\Pr(X|o_i)$ 从 0 到 1，步长为 0.1 时，在 (α_1, β_1)、(α_2, β_2)、(α_L, β_L) 和 (α_U, β_U) 4 种情况下，根据决策准则(P)—(N)，评定为信用可靠的企业的结果，如表 5 所列。

表 5　条件概率变化下各企业信用可靠性决策表

$\Pr(O\|o_i)$	(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_L, β_L)	(α_U, β_U)
0.1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
0.2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{o_3, o_5\}$	$\emptyset$
0.3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{o_3, o_5\}$	$\emptyset$
0.4	$\{o_3\}$	$\emptyset$	$\{o_1, o_3, o_4, o_5\}$	$\emptyset$
0.5	$\{o_3\}$	$\{o_3, o_4\}$	$\{o_1, o_3, o_4, o_5\}$	$\emptyset$
0.6	$\{o_3\}$	$\{o_1, o_3, o_4\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\emptyset$
0.7	$\{o_1, o_3, o_4\}$	$\{o_1, o_3, o_4, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\emptyset$
0.8	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\emptyset$
0.9	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_4\}$
1.0	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$	$\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$

表 5 给出了 4 种特殊情况下条件概率取不同数值时信用可靠企业的变动情况。从表 5 可知，随着 $\Pr(O|o_i)$ 的增大，判为信用可靠的企业数量也随之增多。可以看出，考虑阈值下界情形下，所做出的决策要求最为宽松；在考虑阈值上界形下，所做出的决策要求最为严格；而风险偏好和风险厌恶两种情况下的决策结果都处于两者之间。通过本节的分析可以看出，模糊数粗糙集理论能够简单、直观地描述实际决策问题，并有效地辅助决策者作出合理的决策。

结束语　本文从决策粗糙集出发，利用模糊数设定损失函数，提出一种模糊数决策粗糙集模型来处理具有模糊特征的损失函数问题。首先，模糊损失函数的左右端点分别对应了相关乐观主义和悲观主义的决策准则。其次，从数学上，经典决策粗糙集模型可看作是模糊数决策粗糙集模型的一个特例，并给出了模糊数决策粗糙集下阈值参数 α 和 β 的上下确界。最后，通过一个企业信用评估的案例来说明模型的可行性。在后续的研究中，我们将着重讨论其他不确定性条件下相应的扩展决策粗糙集模型的建立；此外，其他模糊情形，如区间模糊集、模糊区间集、直觉模糊集情形下的决策粗糙集的理论和方法的研究，也将逐步展开。

参 考 文 献

[1] Abd El-Monsef M M E, Kilany N M. Decision analysis via granulation based on general binary relation [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2007, Article ID: 12714

[2] Herbert J P, Yao J T. Game-theoretic rough sets [J]. Funda-

menta Informaticae, 2011, 108: 267-286
[3] Li H X, Zhou X Z. Risk decision making based on decision-theoretic rough set: a three-way view decision model [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4 (1): 1-11
[4] Li H X, Zhou X Z, Zhao J B. Positive region-based reduction in decision-theoretic rough set model [J]. Transaction on Rough Sets
[5] Liu D, Li T R, Ruan D. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets [J]. Information Sciences, 2011, 181 (17): 3709-3722
[6] Liu D, Li T R, Li H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets[J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115(2/3): 173-188
[7] Liu D, Li H X, Zhou X Z. Two decades' research on decision-theoretic rough sets [C]//Proceeding of 9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. 2010: 968-973
[8] Liu D, Yao Y Y, Li T R. Three-way investment decisions with decision-theoretic rough sets [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4(1): 66-74
[9] Ma W M, Sun B Z. On relationship between probabilistic rough set and Bayesian risk decision over two universes[J]. International Journal of General Systems, 2012, 41(3): 225-245
[10] Mishra A, Mishra M, Shiv B. In praise of vagueness: malleability of vague information as a performance -booster [J]. Psychological Science, DOI: 10. 1177/0956797611407208
[11] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982(11): 341-356
[12] Pawlak Z, Wong S K M, Ziarko W. Rough sets: probabilistic versus deterministic approach [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1988, 29: 81-95
[13] Pawlak Z, Skowron A. Rough membership functions [M]. Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence. John Wiley and Sons, New York, 1994: 251-271
[14] Wong S K M, Ziarko W. Comparison of the probabilistic approximate classification and the fuzzy set model [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21: 357-362
[15] Yang X P, Yao J T. Modeling multi-agent three-way decisions with Decision-theoretic rough sets [J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 157-171
[16] Yao Y Y, Wong S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts [J]. International Journal of Man-machine Studies, 1992, 37: 793-809
[17] Yao Y Y, Zhao Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models [J]. Information sciences, 2008, 178: 3356-3373
[18] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180: 341-353
[19] Yao Y Y. The superiority of three-way decision in Probabilistic rough set models [J]. Information Sciences, 2011, 181: 1080-1096
[20] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8 (3): 338-353
[21] 顾婧,周宗放. 基于可变精度粗糙集的新兴技术企业信用风险识别[J]. 管理工程学报,2010,24(1):70-76
[22] 贾修一,商琳,陈家骏. 决策风险最小化属性约简[J]. 计算机科学与探索,2011,5(2):155-160
[23] 李华雄,刘盾,周献中. 决策粗糙集模型研究综述[J]. 重庆邮电大学学报:自然版,2010,22(5):624-630
[24] 李华雄,周献中,李天瑞,等. 决策粗糙集理论及其研究进展[M]. 北京:科学出版社,2011
[25] 刘盾,姚一豫,李天瑞. 三枝决策粗糙集[J]. 计算机科学,2011,38(1):246-250
[26] 刘盾,李天瑞,李华雄. 区间决策粗糙集[J]. 计算机科学,2012,39(7):178-181,214

(上接第 13 页)
[7] Brogi A, Popescu R. Automated Generation of BPEL Adaptors [C]//Proc of the 4th International Conference on Service-oriented Computing. 2006: 27-39
[8] Massuthe P, Wolf K. An Algorithm for Matching Non-deterministic Services with Operating Guidelines [J]. International Journal of Business Process Integration and Management, 2007, 2(2): 81-90
[9] Massuthe P, Reisig W, Schmidt K. An Operating Guideline Approach to the SOA [M]. Annals of Mathematics, Computing & Teleinformatics, 2005: 35-43
[10] Schmidt K. Controllability of Open Workflow Nets [C]//Enterprise Modelling and Information Systems Architectures. 2005: 236-249
[11] Lohmann N, Massuthe P, Wolf K. Operating Guidelines for Finite-State Services [C]//Petri Nets and Other Models of Concurrency-ICATPN 2007. 2007: 321-341
[12] Gierds C, Mooij A J, Wolf K. Specifying and Generating Behavioral Service Adaptor based on Transformation Rules [R]. Universität Rostock, Germany, 2008
[13] Nezhad H R M, Benatallah B, Martens A, et al. Semi-Automated Adaptation of Service Interactions [C]//16th World Wide Web Conference. ACM Press, 2007: 993-1002
[14] Bracciali A, Brogi A, Canal C. A formal Approach to Component Adaptation [J]. Journal of Systems and Software, 2005, 74(1): 45-54
[15] Brogi A, Canal C, Pimentel E. On The Semantics of Software Adaptation [J]. Science of Computer Programming, 2006, 61 (2): 136-151
[16] Sinha R, Roop P, Basu S. A Model Checking Approach to Protocol Conversion [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2008, 203(4): 81-94
[17] Kenneth W, Marlon D, Chun O Y. The Service Adaptation Machine [C]//Proc of the 6th European Conference on Web Services. 2008: 145-154