第39卷 第10期 计 算 机 科 学 Vol. 39 No. 10
2012年10月 Computer Science Oct 2012

全蕴涵三I算法的推理结果研究

何映思[1] 全海金[2]
(西南大学计算机与信息科学学院 重庆 400715)[1] (西南大学数学与统计学院 重庆 400715)[2]

摘 要 Zadeh提出的CRI算法是模糊推理中运用最广泛的算法,但其逻辑语义不太清楚,也不具有还原性。王国俊教授提出的全蕴涵三I算法具有还原性,并在一定程度上解决了模糊推理的逻辑基础不够完善的问题。现在,全蕴涵三I算法已经获得了普遍的接受,并有许多学者对该算法进行了多种形式的推广。但全蕴涵三I算法及其改进算法在实际控制中都还未见成功的运用。对全蕴涵三I算法的推理结果进行了全面分析,指出全蕴涵三I算法存在的问题及其不能应用于实际控制的原因。

关键词 模糊推理,CRI算法,全蕴涵三I算法,蕴涵算子
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Study on the Results of Triple I Method

HE Ying-si[1] QUAN Hai-jin[2]
(School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715, China)[1]
(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)[2]

Abstract Zadeh's CRI method is applied in fuzzy reasoning wildly, but it has been criticized to be too complex and it is not consistent. To alleviate CRI method's drawback, Triple I Method was proposed by Professor Wang Guojun. Now, Triple I method is widely recognized as one of the most important fuzzy reasoning methods, and many existing fuzzy inference methods are based on it. Despite Triple I method's success in various research fields, it still has no effect on fuzzy control. This paper analyzed Triple I method. The results show that Triple I method has some drawback and it cannot be applied in control.

Keywords Fuzzy inference, CRI method, Triple I method, Implication operator

1 前言

模糊推理是模糊控制的理论基础,通常模糊控制是按推理合成规则(CRI)[1]进行模糊推理的。然而,CRI方法不具有还原性,作为模糊控制的理论基础也存在不少争议。为了解决这个问题,王国俊教授在文献[2,3]中提出了全蕴涵三I算法,并证明了全蕴涵三I算法具有还原性。随后,很多文献对全蕴涵三I算法作了进一步完善和推广[4-6]。但是,迄今为止,三I算法及其改进算法在实际控制中都还未见成功的运用,也没有文献讨论三I算法的控制性能。通过研究发现,三I算法虽然具有较为完善的逻辑语义,但在一定条件下不能求解出所需要的模糊集。而正是这个缺陷使得三I算法现在还不能应用到实际的控制中去。

本文首先给出几个常用模糊蕴涵算子的三I算法及其与CRI算法等价的条件,然后分析这几个蕴涵算子的三I算法的不足之处,从而说明三I算法存在的问题及其不能应用于实际控制的原因。

2 几种常见蕴涵算子的全蕴涵三I算法

1973年,美国控制论专家及模糊数学创始人Zadeh教授在文献[1]中提出了用于求解FMP问题的CRI方法。该方法的基本思想是:

首先采用蕴涵算子R把已知规则$A\to B$转化成一个$X\times Y$上的模糊关系$R(x,y)$,该模糊关系即是一个映射$R:X\times Y\to[0,1]$:

$$R(x,y)=R(A(x),B(y)) \tag{1}$$

再把给定的A^*与第一步中的模糊关系R作合成即得输出B^*:

$$B^*(y)=A^*(x)\circ R(A(x),B(y)) \tag{2}$$

式(2)说明了CRI算法的基本模式。式(2)中的合成运算$\circ$在模糊控制中也叫sup-$\odot$运算,其中$\odot$为T范式。Zadeh一般将运算$\odot$取为$\wedge$,而在模糊控制中通常将$\odot$取为$\wedge$或实数乘法。当运算$\odot$取为与蕴涵算子R成伴随对的T范式时,则有:

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}[T(A^*(x),R_T(A(x),B(y)))],y\in Y \tag{3}$$

在这里,B^*是FMP问题的基于算子R的CRI解,简称为FMP的R-型CRI解。但CRI算法中使用的sup-$\wedge$合成运算具有随意性,在逻辑语义的蕴涵意义下存在着严重不足。这种情况下,王国俊教授于1999年首次提出了全蕴涵三I算

到稿日期:2011-10-20 返修日期:2011-12-20 本文受西南大学博士基金项目(swu111051)资助。
何映思(1980—),女,博士,讲师,主要研究方向为人工智能及其应用;全海金(1979—),男,硕士,讲师,主要研究方向为人工智能及其应用,E-mail:quanhai@swu.edu.cn。

法[3]。三I算法有效地弥补了CRI方法的不足,并使用部分赋值理论从语义上将三I算法纳入模糊逻辑的框架之中。

三I算法的基本思想是:设 $X=Y=[0,1]$,$A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$。则FMP问题

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A\to B \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B^* \end{array} \tag{4}$$

中的解 B^* 是使得 $A\to B$ 最大程度地支持 $A^*\to B^*$,即

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)) \tag{5}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 取得最大的可能值的 $F(Y)$ 中的最小模糊集,其中→表示一般蕴涵算子。

由FMP的三I原则求得的FMP问题的解叫作该问题的关于蕴涵算子 R 的三I解,简称为FMP的 R-型三I解。在模糊推理的研究中,常见蕴涵算子有:

$$R_0\text{ 型蕴涵算子}:R_0(a,b)=a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ a'\vee b, & a>b\end{cases} \tag{6}$$

$$R_Z\text{ 型蕴涵算子}:R_Z(a,b)=a\to b=a'\vee(a\wedge b) \tag{7}$$

下面给出这两种常见模糊蕴涵算子的FMP三I算法。

定理1(R_Z-型FMP三I算法) 设 $X=Y=[0,1]$,$A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$。则FMP的 R_Z-型三I解,即 $F(Y)$ 中使式(5)取最大值的最小模糊集 B^* 的算法为

$$B^*(y)=\sup_{\substack{x\in E_y\\ R_Z(A(x),B(y))>\frac{1}{2}}}[A^*(x)\wedge R_Z(A(x),B(y))],y\in Y \tag{8}$$

这里 $E_y=\{x\in X\mid \neg A^*(x)<R_Z(A(x),B(y))\}$。

定理2(R_0-型FMP三I算法) 设 $X=Y=[0,1]$,$A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$。则FMP的 R_0-型三I解,即 $F(Y)$ 中使式(5)取最大值的最小模糊集 B^* 的算法为

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))],y\in Y \tag{9}$$

这里 $E_y=\{x\in X\mid \neg A^*(x)<R_0(A(x),B(y))\}$。

定理1、定理2的证明可参见文献[7],此处略去。同理还可以讨论其它模糊蕴涵算子的FMP三I算法,这在文献[8-10]中都有系统的研究。文献[11]还研究了当式(5)中的3个"→"取不同蕴涵算子时的情况。在实际应用中,除了研究特定的模糊蕴涵算子的三I算法,人们更希望能得出更具有一般形式的三I算法。在模糊推理理论中,常见蕴涵算子可以分成4类,其中使用最多的就是剩余型蕴涵算子,比如性质较其他蕴涵算子更良好的 R_0 算子就是一种特殊的剩余型蕴涵。下面的定理将三I算法从特定蕴涵算子推广到一般的剩余型蕴涵算子上。

定理3(R_T-型FMP三I算法) 设 $X=Y=[0,1]$,$A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$。若 T 是T范式,R_T 是由 T 生成的剩余型蕴涵,则FMP的 R_T-型三I解,即 $F(Y)$ 中使式(5)取最大值的最小模糊集 B^* 的算法为

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}[T(A^*(x),R_T(A(x),B(y)))],y\in Y \tag{10}$$

证明:首先证明式(10)求出的 B^* 能使式(5)取最大值。

由式(10)易知:

$$T(A^*(x),R_T(A(x),B(y)))\leqslant B^*(y) \tag{11}$$

又因为 R_T 是由 T 生成的剩余型蕴涵,所以有:

$$R_T(A(x),B(y))\leqslant R_T(A^*(x),B^*(y)) \tag{12}$$

再由蕴涵算子 R_T 的性质[13]"P11:$R_T(a,b)=1$,当且仅当 $a\leqslant b$"可知:

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))=1 \tag{13}$$

故 B^* 能使式(5)取最大值。

再证明 B^* 是满足条件的最小模糊集。

设有任一模糊集 $C\in F(Y)$ 满足:

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to C(y))=1 \tag{14}$$

由蕴涵算子 R_T 的性质P11和 T 与 R_T 相伴随的性质可知:

$$T(A^*(x),R_T(A(x),B(y)))\leqslant C(y) \tag{15}$$

式(15)两边取上确界后,即是 $B^*(y)\leqslant C(y)$。

故 B^* 是满足条件的最小模糊集。证毕。

显然,定理3中的 B^* 与式(3)中的 B^* 是相同的,所以有下面的定理。

定理4 若 T 是T范式,R_T 是由 T 生成的剩余型蕴涵,则FMP的 R_T-型三I解与FMP的 R_T-型CRI解等价。

定理4揭示了FMP的CRI算法与三I算法的等价性,在文献[12]中详细讨论了这两种算法等价的条件。

3 三I算法推理结果的失效性

定理5 若式(4)中的模糊集 A,A^* 满足条件:$\exists x_0$ 使得当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)=1$,则无论式(4)中的模糊集 A,A^*,B 是怎样的,由 R_0-型FMP三I算法得到的 B^* 都恒为 $B^*(y)=1,y\in V$。

证明:已知当 $x=x_0$ 时,$A(x_0)=0$。则由式(6)知:

$$R_0(A(x_0),B(y))=R_0(0,B(y))=1$$

又因为 $\neg A^*(x_0)=1-1=0<1=R_0(A(x_0),B(y))$,所以 $x_0\in E_y$。

则由式(9)得:

$$B^*(y)\geqslant(A^*(x_0)\wedge R_0(A(x_0),B(y))=(1\wedge 1)=1,y\in V$$

即 $B^*(y)=1,y\in V$。

定理6 若式(4)中的模糊集 A,A^* 满足条件:$\exists x_0$ 使得当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)=1$,则无论式(4)中的模糊集 A,A^*,B 是怎样的,由 R_Z-型FMP三I算法得到的 B^* 都恒为 $B^*(y)=1,y\in V$。

证明:已知当 $x=x_0$ 时,$A(x_0)=0$,则由式(8)知:

$$R_Z(A(x_0),B(y))=R_Z(0,B(y))=1$$

又因为 $\neg A^*(x_0)=1-1=0<1=R_Z(A(x_0),B(y))$,所以 $x_0\in E_y$。

并且 $R_Z(A(x_0),B(y))=1>\frac{1}{2}$。

则由式(8)得:

$$B^*(y)\geqslant(A^*(x_0)\wedge R_0(A(x_0),B(y))=(1\wedge 1)=1,y\in V$$

即 $B^*(y)=1,y\in V$。证毕。

定理5证明了 R_0-型FMP三I算法在一定条件下不能求解出正确的 B^*,定理6证明了 R_Z-型FMP三I算法也有这样的性质。实际上,无论三I算法采用什么样的蕴涵算子 R,只要 R 满足Dubios-Prade条件[13]中的第3条性质(I3):$0\to b=1$,并且 $\exists x_0\in E_y$ 使得当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)=1$,那么

三 I 算法就一定会有定理 5 和定理 6 中的结论。

定理 7 若式(4)中的模糊集 A,A^* 满足条件：$\exists x_0\in E_y$ 使得当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)=1$，且蕴涵算子 R 满足 Dubios-Prade 条件中的(I3)：$0\to b=1$，则无论式(1)中的模糊集 A，A^*，B 是怎样的，由 R-型 FMP 三 I 算法得到的 B^* 都恒为 $B^*(y)=1,y\in V$。

证明：当 $x=x_0$ 时，$A(x_0)=0$，由蕴涵算子 R 满足 Dubios-Prade 条件中的(I3)：$0\to b=1$ 知：

$$R(A(x_0),B(y))=R(0,B(y))=1$$

则由 $\exists x_0\in E_y$ 和

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R(A(x),B(y))],y\in V \tag{16}$$

得

$$B^*(y)\geqslant(A^*(x_0)\wedge R(A(x_0),B(y))=(1\wedge 1)=1,y\in V$$

即 $B^*(y)=1,y\in V$。证毕。

注记：容易知道，对于大多数蕴涵算子的三 I 算法，$\exists x_0\in E_y$ 使得当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)=1$ 这个条件都是满足的。

三 I 算法将式(4)的推理模型解释为式(5)的蕴涵式，并且要求推理算法所求得的 B^* 能使式(5)对一切 $x\in U$ 和 $y\in V$ 取得最大值。但值得注意的是，对于式(5)，若 $B^*(y)=1$，$y\in V$，那么无论 $A(x)$，$A^*(x)$，$B(y)$ 的取值是什么，式(5)都是成立的。因此，这里有一个使式(5)永远有效的解 $B^*(y)=1,y\in V$。显然，三 I 算法要求解的 B^* 应该是要比这个永远有效的解更小的 B^*。但是前面的定理 5—定理 7 说明，三 I 算法在某些情况下不能求解出需要的 B^*，即不能有效地解决式(5)，这可称之为三 I 算法的失效性。

以上分析表明，现在的全蕴涵三 I 算法要能够有效地推理，必须要求式(4)中的模糊集 A,A^* 满足条件：$\forall x_0$ 当 $A(x_0)=0$ 时 $A^*(x_0)\neq 1$。但这个条件在模糊推理中却太过苛刻：在单一规则的模糊推理中尚不易满足，在多重推理中就更无法满足了。这样的缺陷导致三 I 算法还不能应用于多重推理，也就不能应用于模糊控制，这就大大限制了三 I 算法的作用。如果要解决这个问题，可以考虑修改集合 E_y 的定义，使 E_y 的范围再缩小一点，以将 $B^*(y)=1,y\in V$ 的情况排除掉。

结束语 CRI 算法在模糊控制方面的应用已经取得了巨大成功，但因为其逻辑基础不够完善，仍然受到质疑；全蕴涵三 I 算法虽然在一定程度上解决了模糊推理在逻辑基础方面的问题，但现在还不能应用到实际控制中。现在，急需一种逻辑基础完善并且能够进行控制应用的模糊推理算法，这也是今后研究的一个方向。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning[J]. Inform. Science, part1-3, 1975(8): 199-249, 301-357, 1975(9): 43-80

[2] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑), 2002, 29(2): 88-104

[3] 王国俊. 模糊推理的一个新方法[J]. 模糊系统与数学, 1999, 13(3): 1-10

[4] 俞峰, 杨成梧. 直觉区间值模糊推理的三 I 算法[J]. 自动化技术与应用, 2008, 27(2): 5-7

[5] 宋士吉, 冯纯伯. 关于模糊推理的全蕴涵三 I 算法的约束度理论[J]. 自然科学进展, 2000, 10(10): 884-889

[6] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 约束算法[J]. 自然科学进展, 2002, 12(1): 95-100

[7] 徐宗本, 张讲社, 郑亚林. 计算智能中的仿生学: 理论与算法[M]. 北京: 科学出版社, 2003

[8] Tang Yi-ming, Liu Xiao-ping. Differently implicational universal triple I method of (1,2,2) type[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(6): 1965-1984

[9] Zhao Zhi-hong, Li Yong-jin. Reverse triple I method of fuzzy reasoning for the implication operator R_L [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(7): 1020-1028

[10] 王作真, 张兴芳, 阚婷. 基于剩余蕴涵算子族 Lp 的三 I 支持算法[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(1): 19-23

[11] 胡凯, 汪德刚, 王加银. 基于不同蕴涵算子的三 I 算法构造的模糊控制器及其响应能力[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2009, 45(4): 344-349

[12] 江欢. 模糊推理中 CRI 算法与全蕴涵三 I 算法的等价性研究[D]. 重庆: 西南大学, 2009

[13] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 143-244

(上接第 244 页)

模型的语法、结构和语义验证方法，并给出了模型验证方法的具体算法和实现流程。

(3)通过对实际应用案例的服务链元模型的验证，充分说明了本文设计的空间信息服务链有向图表达方法以及元模型语法、结构和语义验证方法的有效性和可操作性。

参 考 文 献

[1] 吴华意, 章汉武, 桂志鹏, 等. 地理信息服务质量的理论与方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2011

[2] van der Aalst W M P, et al. Workflow Patterns[J]. Distributed and Parallel Databases, 2003, 14: 5-51

[3] 桂志鹏. 质量驱动的空间信息服务链建模、评估和优化研究[D]. 武汉: 武汉大学博士学位论文, 2011

[4] 陈荣辉. 基于有向超图的工作流模型验证方法研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2007

[5] Diestel R. Graph Theory[M]. Springer, 2008

[6] Sadiq W, Orlowska M E. Analyzing process models using graph reduction techniques. Information Systems[J]. 2000, 25(2): 117-134

[7] 周小平. 工作流模型验证与数据访问冲突分析方法研究[D]. 南京: 东南大学, 2005

[8] 李红臣, 史美林, 陈信祥. 工作流系统中的业务过程描述及分析[J]. 计算机研究与发展, 2001, 38(7): 798-804

[9] 邹宇, 刘毅, 陈佩文. 基于图归约法的工作流模型验证[J]. 计算机应用, 2003, 23(4): 86-88

[10] Seog Chan Oh, Byung Won On, Larson E J, et al. BF*: Web Services Discovery and Composition as Graph Search Problem [C] // Proceedings of IEEE e-Technology, e-Commerce and e-Service (EEE). Hong Kong, 2005: 784-786