部分多值逻辑中单纯可离和完满对称关系的计数

王 婷 刘任任

(湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105)

(湘潭大学智能计算与信息处理教育部重点实验室 湘潭 411105)

摘 要 根据部分多值逻辑的完备性理论，对两类准完备集——单纯可离函数集和完满对称函数集进行研究，给出了单纯可离和完满对称关系的函数的计数公式。

关键词 多值逻辑，完备性，准完备

中图法分类号 TP301.1 **文献标识码** A

Number of Simply Separable and Full Symmetric Relations in Partial Multiple-valued Logic

WANG Ting LIU Ren-ren

(School of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Information Processing of MOE, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract According to the completeness theory of partial multiple-valued logic, some properties of simply separable function set and full symmetric function set were discussed, and the formulas for the number of simply separable relation and full symmetric relations were established.

Keywords Multiple-valued logic, Completeness, Precomplete class

1 引言

多值逻辑是计算机科学与技术的一个重要分支。多值逻辑函数结构理论是多值逻辑理论中的一个重要的研究方向，主要包括完备性理论、函数表示理论以及单向陷门函数[2-4]。其中函数系完备性之判定问题是一个基本而重要的问题，同时也是自动机理论、多值逻辑网络中必须解决的问题，此问题的解决依赖于定出多值逻辑函数集中的所有准完备集(又称极大封闭集)[1]。

如果一个 k 值逻辑函数能实现所有的 k 值逻辑线路，则称此函数为 Sheffer 函数。Sheffer 函数的判定与构造是多值逻辑函数理论的一个重要的组成部分，此问题可归结为定出所有准完备集的最小覆盖。完全多值逻辑函数已由 Schofield 和 Kudrjavcev 等完全解决，但对于部分多值逻辑，虽然其函数的完备性问题已彻底解决，即定出了其中的所有准完备集(共7类)，但其中 Sheffer 函数之判定与构造问题尚未彻底解决[8-14]。

根据部分多值逻辑的完备性理论[6,7]，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 Sheffer 函数必要而且只要对 P_K^* 中的任何准完备集 A 都有 $f\notin A$。

本文对于部分多值逻辑中的两类准完备集——单纯可离和完满对称关系的计数问题进行了研究和探讨[5]。

2 多值逻辑函数的基本概念

设 E_K 是一个 K 元集，$K\geqslant 2$，函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 定义在 E_K 上且其函数值仍属于 E_K。如果对任意值组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $(\alpha_i\in E_K, i=1,\cdots n)$，$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 都有定义，则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为完全 K 值逻辑函数，否则称其为非完全 K 值逻辑函数。E_K 上的完全和非完全 K 值逻辑函数统称为部分 K 值逻辑函数，所有完全 K 值逻辑函数之集合记为 P_K，所有部分 K 值逻辑函数之集合记为 P_K^*。

对于非完全函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，当 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 无定义时，记为 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=*$；处处无定义的函数称为空函数，记为 $*$。

设 A 是 P_K 中的一个非空子集，函数 $f(x_1,\cdots,x_m)\in A$，函数 $g_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,m)$ 或属于 A 或为自变数 x_i，于是，函数 $f(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))$ 是由 A 中的函数复合出来的函数。

设 A 是 P_K^* 中的一个非空子集，函数 $f(x_1,\cdots,x_m)\in A$，$g_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,m)$ 或属于 A 或为自变数，于是，函数 $f(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))$ 是由 A 中的函数复合出来的函数。其中若 $g_i(x_1,\cdots,x_n)$，$(i=1,\cdots,m)$ 无定义，则 $f(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))=*$。

所有由 A 复合出来的函数记为 A'。显然 $A\subseteq A'$，且若

到稿日期：2011-12-31 返修时间：2012-03-12 本文受国家自然科学基金项目(60673193)，湖南省科技厅计划项目(2011FJ6038)，湖南省教育厅科学基金项目(11C1216)，湘潭大学自然科学基金项目(10XZX19)资助。

王 婷(1980—)，女，硕士，讲师，主要研究方向为多值逻辑，E-mail: piaopiaoting@139.com；刘任任(1959—)，男，博士，教授，主要研究方向为多值逻辑。

$A\subseteq B$，则 $A'\subseteq B'$。

设 $A\subseteq P_K$ 或 $A\subseteq P_K^*$，A 非空，如果 $A=A'$，则 A 是封闭集。

任意一些封闭集的交集仍是封闭集。

设 A 是 P_K 或 P_K^* 的一个非空子集，包含 A 的所有封闭集之交集称为 A 的封化集，记为 $GEN(A)=A\cup A'\cup A''\cup\cdots\cup A^{(i)}\cup\cdots$。

如果 $GEN(A)=P_K(A\subseteq P_K)$ 或 $GEN(A)=P_K^*(A\subseteq P_K^*)$，则 A 是完备集。

若 M 是一个封闭集，而 M 与 $P_K(M\subseteq P_K)$ 或 $P_K^*(M\subseteq P_K^*)$ 之间无其它的封闭集，则 M 称为一个极大封闭集（或准完备集，准完备类）。

P_K（或 P_K^*）中的非空子集 A 是完备集，必要而且只要 A 不包含在任何准完备集之内。由此，完备集之刻画问题可以转化为准完备集之刻画问题，只要定出 P_K（或 P_K^*）中的所有准完备集便完全解决了函数系完备性之判定问题。

如果 $GEN(\{f(x_1,\cdots,x_n)\})=P_K$（或 P_K^*），则函数 $f(x_1,\cdots,x_n)\in P_K$（或 P_K^*）是 Sheffer 函数。即由 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以复合出 P_K（或 P_K^*）中的所有函数。

设 $\Sigma=\{A_i\mid A_i\subset P_K^*$ 且 A_i 是极大封闭集$\}$。$\Sigma'\subseteq\Sigma$，令 $S_{\Sigma'}=\{f\in P_K^*\mid$存在 A_j' 使 $f\in A_j'\}$，即 $S_{\Sigma'}$ 表示 P_K^* 中所有属于 Σ' 中准完备集的函数之集合，也即 $S_{\Sigma'}=\bigcup_{A_j'\in\Sigma'}A_j'$。如果满足 $S_{\Sigma'}=S_\Sigma$，则集合 $\Sigma'(\subseteq\Sigma)$ 是 Σ 的覆盖。

在部分多值逻辑函数完备性理论中，文献[1]将 P_K^* 中所有属于 Σ' 中的准完备集分为 7 类，分别是：$P_K\cup\{*\}$、完满对称函数集 $F_{s,m}$、拟线性函数集 L_p、L 型函数集 $L_{G_{4,2}}$、单纯可离函数集 $S_{I,m}$、正则可离函数集 $S_{R,m}$ 及保 E 函数集 T_E。本文只涉及单纯可离函数集 $S_{I,m}$ 和完满对称函数集 $F_{s,m}$，它们的定义如下。

定义 1 设 S_m 是集合 $E_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 上的 m 次对称群，其单位元素为 $e,\sigma\in S_m$。令

$$G_m^\sigma=\{\langle a_{\sigma(1)},\cdots,a_{\sigma(m)}\rangle\mid\langle a_1,\cdots,a_m\rangle\in G_m\}$$

定义 2 设 $G_m=\bar{G}_m\cup\bar{G}_m^{\sigma_1}\cup\cdots\cup\bar{G}_m^{\sigma_{h-1}}$，$\bar{G}_m=\{\langle a_1,\cdots,a_m\rangle\mid a_i\neq a_j,i\neq j$，其中 $i,j=1,2,\cdots,m\}$，$H=\{e,\sigma_1,\cdots,\sigma_{h-1}\}$ 是 S_m 的子群。称 G_m 是单纯可离的，如果存在 E_k 的一个直接划分：$E_k=A_1+\cdots+A_m$，$A_i\cap A_j=\emptyset,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m$，使得对任意 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_m\rangle\in\bar{G}_m$ 皆有 $a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,m$。若 G_m 单纯可离，则称 $T(G_m)$ 为单纯可离函数集，并记为 $S_{I,m}$。

定义 3 设 E_k 的一个直接划分为：$D^m:E_k=A_1+\cdots+A_m$，其中，$|A_i|\geqslant1,A_i\cap A_j=\emptyset,i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant m,2\leqslant m\leqslant k$。若不记 A_i 的次序，则称 D^m 为无序的直接划分。

定义 4 设 $G_m=\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}G_m(\{i,j\})\cup G_m^*$

式中，G_m^* 是空集（当 $m=2$ 时除外）或仅含 m 元不同的序列，且 G_m 对 S_m 是对称的。称非完全关系 G_m 是完满对称的，所有保 G_m 函数之集合称为完满对称函数集，并记为 $F_{s,m}$。

3 主要结论及其证明

由组合数学知，E_k 的无序直接划分个数为 $S(k,m)$。其中，$S(k,m)$ 即第二类 Stirling 数，它是将 k 个不同的球放到 m 个无标记的盒子中，且每个盒子至少有 1 个球的方法数。$S(k,m)$ 满足以下递推关系：

$$S(k,m)=mS(k-1,m)+S(k-1,m-1)$$

易知有，$S(k,0)=0,S(k,1)=1,S(k,2)=2^{k-1}-1,S(k,k-1)=C_k^2,S(k,k)=1$。

设 $D^m:E_k=A_1+\cdots+A_m$ 为 E_k 的一个直接划分。若令 $|A_i|=k_i$，则有 $1\leqslant k_i\leqslant k-m+1,\sum_{i=1}^{m}k_i=k$。记此直接划分为 $D_{k_i}^m$。

由于 $1\leqslant k_i\leqslant k-m+1,i=1,\cdots,m$。因此，可令 $S_i=\{k_j\mid k_j=i\},i=1,\cdots,k-m+1$。

若记 $c_i=|S_i|$，则有 $\sum_{i=1}^{k-m+1}i*c_i=k$。

定理 1 直接划分 $D_{k_i}^m$ 的个数为

$$\frac{k!}{(k_1!\cdots k_m!)(c_1!\cdots c_{k-m+1}!)}$$

证明：先求有序的直接划分 $D_{k_i}^m$ 的个数 R，即将 k 个元素分别放入 $A_1,\cdots,A_m$ 共 m 个有序集合中，A_i 中的元素个数为 k_i，则由排列组合的思想有：

$$R=C_k^{k_1}C_{k-k_1}^{k_2}\cdots C_{k-k_1-\cdots-k_{m-1}}^{k_m}$$

$$=\frac{k!}{k!\,(k-k_1)!}\cdot\frac{(k-k_1)!}{k_2!\,(k-k_1-k_2)!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(k-k_1-\cdots-k_{m-1})!}{k_m!\,(k-\sum_{i=1}^{m}k_i)!}$$

$$=\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!\,(k-\sum_{i=1}^{m}k_i)!}$$

因为 $k=\sum_{i=1}^{m}k_i$，所以 $R=\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$。

再考虑无序的直接划分 $D_{k_i}^m$ 的个数 P。

对于 $c_i=|S_i|$，即在某一个划分中集合 $A_1,\cdots,A_m$ 中元素个数为 i 的集合共有 c_i 个。这 i 个集合的有序排列数共有 $c_i!$ 个，所以当不记 A_i 的次序时，这 $c_i!$ 个有序划分只等价于一个无序划分，$i=1,\cdots,k-m+1$。即

$$P=\frac{R}{C_1!\,C_2!\cdots C_{k-m+1}!}=\frac{k!}{(k_1!\cdots k_m!)(C_1!\cdots C_{k-m+1}!)}$$

易知，当 $k_1=\cdots=k_m=\lfloor k/m\rfloor$ 时，$k_1\cdots k_m$ 取极大值，即单纯可离关系 G_m 中的 $\bar{G}_m$ 满足：

$$1\leqslant|\bar{G}_m|\leqslant\lfloor k^m/m^m\rfloor$$

例如，令 $k=4$。

当 $m=2$ 时，直接划分 $D^2:E_4=A_1+A_2$ 共有 $S(4,2)=7$ 种，其中

(1) $|A_1|=1,|A_2|=3$ 时，直接划分共有 $\frac{4!}{(1!\,3!)(1!\,1!\,0!)}=4$ 种，即

$D^{2,1}:E_4=\{0\}+\{1,2,3\}$

$D^{2,2}:E_4=\{1\}+\{0,2,3\}$

$D^{2,3}:E_4=\{2\}+\{0,1,3\}$

$D^{2,4}:E_4=\{3\}+\{0,1,2\}$

(2) $|A_1|=2,|A_2|=2$ 时，直接划分共有 $\frac{4!}{(2!\,2!)(0!\,2!\,0!)}=3$ 种，即

$D^{2,1}:E_4=\{0,1\}+\{2,3\}$

$D^{2,2}:E_4=\{0,2\}+\{1,3\}$

$D^{2,3}:E_4=\{0,3\}+\{1,2\}$

当 $m=3$ 时，直接划分 $D^3:E_4=A_1+A_2+A_3$ 共有 $S(4,3)=C_4^2=6$ 种，其中 $|A_1|=1,|A_2|=1,|A_3|=2$ 时，直接划分共有 $\frac{4!}{(1!\,1!\,2!)(2!\,1!)}=6$ 种，即

$D^{3,1}:E_4=\{0\}+\{1\}+\{2,3\}$

$D^{3,2}:E_4=\{0\}+\{2\}+\{1,3\}$

$D^{3,3}:E_4=\{0\}+\{3\}+\{1,2\}$

$D^{3,4}:E_4=\{1\}+\{2\}+\{0,3\}$

$D^{3,5}:E_4=\{1\}+\{3\}+\{0,2\}$

$D^{3,6}:E_4=\{2\}+\{3\}+\{0,1\}$

定理 2 部分 K 值逻辑中完满对称函数集的个数为：

$$\sum_{m=2}^{k}2^{C_k^m}-k$$

证明：先考虑 m 取 $2,3,4,\cdots,k$ 时所对应的完满对称函数集的个数。

当 $m=2$ 时，即 $G_2=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\cdots,\langle k-1,k-1\rangle\}\cup G_2^*$，其中 G_2^* 为下列之一：

(1)$\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}\sim\{\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle\}\sim\cdots\{\langle k-1,k\rangle,\langle k,k-1\rangle\}$，这个序列总数为 0 到 k 中取 2 个的组合数，共计 C_k^2 个；

(2)在这 C_k^2 个集合中取 2 之并的组合共有 $C_{C_k^2}^2$ 个；

(3)在这 C_k^2 个集合中取 3 之并的组合共有 $C_{C_k^2}^3$ 个；

…

(C_k^2-1)在这 C_k^2 个集合中取 C_k^2-1 之并的组合有 $C_{C_k^2}^{C_k^2-1}$ 个。

所以，当 $m=2$ 时，完满对称函数集个数有：

$$\begin{aligned}&C_k^2+C_{C_k^2}^2+C_{C_k^2}^3+\cdots+C_{C_k^2}^{C_k^2-1}\\&=C_k^2+C_{C_k^2}^2+C_{C_k^2}^3+\cdots+C_{C_k^2}^{C_k^2-1}+C_{C_k^2}^0+C_{C_k^2}^1+C_{C_k^2}^{C_k^2}-C_{C_k^2}^0\\&\quad-C_{C_k^2}^1-C_{C_k^2}^{C_k^2}\\&=2^{C_k^2}-1-1\\&=2^{C_k^2}-2\end{aligned}$$

当 $m=3,G_3^*=\emptyset$ 时有 1 个。当 $G_3^*\neq\emptyset$ 时，

(1)0 到 k 中取 3 个的组合数有 C_k^3 个；

(2)在这 C_k^3 个集合中取 2 之并的组合共 $C_{C_k^3}^2$ 个；

(3)在这 C_k^3 个集合中取 3 之并的组合共 $C_{C_k^3}^3$ 个；

…

(C_k^3-1)在这 C_k^3 个集合中取 C_k^3-1 之并的组合共 $C_{C_k^3}^{C_k^3-1}$ 个。

所以，当 $m=3$ 时，完满对称函数集个数为：

$$\begin{aligned}&C_k^3+C_{C_k^3}^2+C_{C_k^3}^3+\cdots+C_{C_k^3}^{C_k^3-1}+1\\&=C_k^3+C_{C_k^3}^2+C_{C_k^3}^3+\cdots+C_{C_k^3}^{C_k^3-1}+C_{C_k^3}^0+C_{C_k^3}^1+C_{C_k^3}^{C_k^3}-C_{C_k^3}^0\\&\quad-C_{C_k^3}^1-C_{C_k^3}^{C_k^3}+1\\&=2^{C_k^3}-1\end{aligned}$$

同理可证，当 $m=i$ 时，完满对称函数集的个数为：$2^{C_k^i}-1$，其中 i 大于 3 小于 k。

所以，当 m 分别取 $2,3,4,\cdots,k-1$ 时所对应的完满对称函数集的个数为 $2^{C_k^2}-2,2^{C_k^3}-1,2^{C_k^4}-1,\cdots,2^{C_k^{k-1}}-1$，而当 $m=k$时，有 1 个，即 $G_k^*\neq\emptyset$，其中 $|G_k|=k^k-k!\ C_k^k$。

将 $m=2,3,4,\cdots,k$ 所对应的完满对称函数集个数相加得：

$$\begin{aligned}&2^{C_k^2}-2+2^{C_k^3}-1+2^{C_k^4}-1+\cdots+2^{C_k^{k-1}}-1+1\\&=2^{C_k^2}-2+2^{C_k^3}-1+2^{C_k^4}-1+\cdots+2^{C_k^{k-1}}-1+1+1-1\\&=2^{C_k^2}+2^{C_k^3}+2^{C_k^4}+\cdots+2^{C_k^{k-1}}+2^{C_k^k}-2-(k-3)-1\\&=\sum_{m=2}^{k}2^{C_k^m}-k\end{aligned}$$

至此，定理证毕。

参 考 文 献

[1] 罗铸楷，胡谋，陈廷槐. 多值逻辑的理论及应用[M]. 北京：科学出版社，1992

[2] Chajda I, Halas R, Rosenberg I G. On the role of logical connectives for primality and functional completeness of algebras of logics[J]. Information Sciences, 2010, 180(8): 1345-1353

[3] Mishchenko A, Brayton R K, Jang S. Global delay optimization using structural choices[C]//FPGA. 2010: 181-184

[4] Kimura H, Hanyu T, Kameyama M. Multiple-valued logic-in-memory VLSI based on ferroelectric capacitor storage and charge addition[C]//Proceedings 32nd IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic. 2002: 161-166

[5] 王婷，刘任任. 关于部分 K 值逻辑中的单纯可离函数集性质的一些结果[J]. 计算技术与自动化，2004，23(3)：32-33

[6] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数集中的极大封闭集[J]. 数学学报，1984，27(6)：795-800

[7] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数的完备性理论[J]. 数学学报，1984，27(5)：676-683

[8] 刘任任，王婷，谭昊勋. 部分四值逻辑中完满对称函数集的分类及最小覆盖成员的判定[J]. 计算机科学，2010，37(11)：257-260

[9] Liu Ren-ren, Chen Song-qiao, Chen Jian-er, et al. Some results on the minimal coverings of precomplete classes in partial k-valued logic functions[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2004, 19(6): 981-985

[10] Machida H, Rosenberg I G. Monoids whose Centralizer is the Least Clone[C]//ISMVL. 2004: 102-108

[11] Liu Ren-ren, Gong Zhi-wei, Xu Fen. On The Categorizing of Simply Separable Relations In Partial Four-Valued Logic[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3612: 1251-1256

[12] Liu Ren-ren, Wang Ting. On the Categorizing of Fully Symmetric Relations in Partial Four-valued Logic[J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2006, 4223: 286-289

[13] Haddad L, Lau D. Characterization of Partial Sheffer Functions in 3-Valued Logic[C]//ISMVL. 2007: 34-38

[14] Liu Ren-ren. On Basic Groups and Basic Semi-groups in Partial Multiple-Valued Logic[C]//Proceedings of Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discover. Volume 2, 2007: 17-20