

基于压缩感知信号重建的自适应空间正交匹配追踪算法

姚 远 梁志毅

(西北工业大学航天学院 西安 710072)

摘 要 传统的奈奎斯特采样定理规定采样频率最少是原信号频率的两倍,才能保证不失真的重构原始信号,而压缩感知理论指出只要信号具有稀疏性或可压缩性,就可以通过采集少量信号来精确重建原始信号。在研究和总结已有匹配算法的基础上,提出了一种新的自适应空间正交匹配追踪算法(Adaptive Space Orthogonal Matching Pursuit, ASOMP)用于稀疏信号的重建。该算法在选择原子匹配时采用逆向思路,引入正则化自适应和空间匹配的原则,加快了原子的匹配速度,提高了匹配的准确性,最终实现了原始信号的精确重建。最后与传统 MP 和 OMP 算法进行了仿真对比,结果表明该算法的重建质量和算法速度均优于传统 MP 和 OMP 算法。

关键词 压缩感知,稀疏信号,匹配追踪,重建算法

中图分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Adaptive Space Orthogonal Matching Pursuit Algorithm for Signal Reconstruction Based on Compressive Sensing

YAO Yuan LIANG Zhi-yi

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract In order to well ensure reconstruction of the original signal, the traditional Nyquist sampling theorem requires that the sampling rate must be twice as much the highest frequency of the original signal at least, which causes a tremendous amount of calculation and the waste of resources. But the compressive sensing theory describes that we can reconstruct the original signal from a small amount of random sampling as long as the signal is sparse or compressible. Based on the research and summarization of the traditional matching algorithm, this paper presented a new adaptive space orthogonal matching pursuit algorithm (ASOMP) for the reconstruction of the sparse signal. This algorithm introduces an regularized adaptive and spatial matching principle for the choice of matching atoms with reverse thinking, which accelerates the matching speed of the atom and improves the accuracy of the matching, ultimately leads to exact reconstruction of the original signal. Finally, we compared the ASOMP algorithm with the traditional MP and OMP algorithm under the software simulation. Experimental results show that the ASOMP reconstruction algorithm is superior to traditional MP and OMP algorithm on the reconstruction quality and the speed of the algorithm.

Keywords Compressive sensing, Sparse signal, Matching pursuit, Reconstruction algorithm

1 引言

随着社会的发展和科技的进步,人们对信息的需求与日俱增,获取信号的数据量和带宽都在增加,而传统的采样过程依据奈奎斯特定理规定:采样频率最少是原信号频率的两倍,才能保证不失真的重构和恢复原始信号。这就造成了巨大的计算量和资源浪费,不但在某些实际应用中给采样设备带来更大的挑战,也对后期的信号处理能力提出了更高的要求,成为信号获取领域的瓶颈。因此寻求一种较好的信号获取方法以突破奈奎斯特定理的限制成为信号处理领域的一个重要研究方向。

在大量的实际问题中,人们倾向于尽量少地采集数据,或者由于客观条件所限不得不采集不完整的数据。如果这些数

据和人们所希望恢复重建的信息之间有某种全局性的变换关系,并且还预先知道哪些信息满足某种稀疏性条件,就可以试着用类似的方式从比较少的数据中还原出比较多的信号来。基于此灵感,Candes 和 Donoho 等人于 2004 年提出了革命性的理论“压缩感知”(Compressive Sensing, CS)^[1-3],CS 理论在信号采样的同时对数据进行适当的压缩,不是获取信号的全部采样,而是获取一个随机的部分数据采样值,即从尽量少的数据信号中提取出尽量多的信息。它抛弃了当前信号采样中的冗余信息,直接从连续时间信号变换得到压缩样本,然后在数字信号处理中采用优化方法处理压缩样本,通过非线性重建算法完美地恢复和重建信号。

当前,国内外对于压缩感知的理论研究主要集中在信号的稀疏表示和重建算法上。常用的重建算法有:凸松弛算法、

到稿日期:2012-05-15 返修日期:2012-08-13 本文受国家自然科学基金项目(60872158)资助。

姚 远(1983-),男,硕士生,主要研究方向为飞行控制与仿真技术,E-mail:93345896@qq.com;梁志毅(1963-),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为飞行控制与仿真技术。

匹配追踪算法和组合算法。本文提出的改进算法是根据匹配追踪算法的相关优缺点,在选择原子匹配时采用逆向思路,引入正则化自适应和空间匹配的原则,加快了原子的匹配速度,提高了重建质量和算法速度,最终在实现原始信号的精确重建的同时降低了对采样数目的要求。

2 压缩感知理论模型和重建算法

2.1 压缩感知理论

只要信号具有稀疏性或可压缩性,就可以通过采集少量信号来精确恢复重建原始数据信号。假设存在一个有限长度为 N 的一维离散实值信号 b ,它是一个列向量,记为 $b(n), n \in [1, 2, \dots, N]$ 。而且 b 能够用一组基 $\Psi \in [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]$ 的线性组合表示,则

$$b = \sum_{i=1}^N \psi_i z_i = \Psi z \quad (1)$$

式中, b 与 z 是 $N \times 1$ 维矩阵, Ψ 是 $N \times N$ 矩阵。若信号 b 在某个基 Ψ 上仅有 K 个基的线性表示(即只有 K 个 z_i 非零系数, $N-K$ 个零系数, $K \leq N$),称 Ψ 为信号 b 的稀疏基或者 b 是 K 稀疏的。

在测量过程中,根据 b 是 K 稀疏的,就可以用一个与变换基 Ψ 不相关的传感矩阵 Φ 将变换所得到的高维信号投影到一个低维空间上。需要指出的是并不是直接测量信号稀疏变换的系数,而是将信号的稀疏变换系数投影到与变换基不相关的传感矩阵上得到观测向量 y ,测量过程可表示为:

$$y = \Phi b \quad (2)$$

代入式(3)得:

$$y = \Phi \sum_{i=1}^N \psi_i z_i = \Phi \Psi z = Az \quad (3)$$

式中, $A = \Phi \Psi$ 为传感因子, y 是一个 $M \times 1$ 维的观测向量, Φ 为 $M \times N (M \leq N)$ 的测量矩阵或传感矩阵,且 Φ 必须满足约束等距性^[4](Restricted Isometric Property, RIP 准则)条件:

$$(1 - \delta_k) \|z\|_2^2 \leq \|Ab\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|z\|_2^2 \quad (4)$$

现在考虑由 y 恢复 b ,由于在测量过程中 y 的维数 M 远小于原始信号 b 的维数 N ,因此式(2)有无穷多个解,用常规的方法很难重建 b 。而由式(1)知原信号 b 是稀疏的,且在测量过程中满足式(4)条件,那么在理论上可以通过求解式(2)的最小 l_0 范数由测量值 y 精确重构原始信号 b :

$$\hat{z} = \operatorname{argmin} \|z\|_0 \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi b \quad (5)$$

在实际中 l_0 范数的最优化问题本质上是一个 NP-hard (Nondeterministic Polynomial-time hard)问题,而这个问题很难求解,根据 l_1 范数在一定条件下和 l_0 范数具有等价性,式(5)可等价于:

$$\hat{z} = \operatorname{argmin} \|z\|_1 \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi b \quad (6)$$

综上所述,压缩感知理论主要包括3个方面问题:一是信号的稀疏表示,即原始信号与基 Ψ 线性组合后是稀疏的。二是设计满足 RIP 条件的传感矩阵 Φ ,将变换所得到的高维信号投影到低维空间上时能较好地保持原始信号的结构。最后是重建算法的设计,即利用测量值和感知矩阵从低维信号中较好地恢复出原始的高维数据信号^[5]。

2.2 重建算法

信号的重建算法,主要考虑恢复重建信号的精度、速度、

鲁棒性及算法的普适性,关键是从低维信号中最大程度地恢复出原始的高维数据信号。重建算法有很多种,目前研究论证的常见主要算法包括以下3类:一是贪婪追踪算法:这类方法是基于最小 l_0 范数求解的,通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号。其典型代表包括 MP 算法^[6]、OMP 算法^[7]、分段 OMP 算法(STOMP)^[8]和正则化 OMP 算法^[9]等。二是凸松弛法:这类方法通过将非凸问题转化为凸问题,即将 l_0 范数转变为 l_1 范数来求解找到信号的逼近,如内点法^[10]、迭代阈值法^[11]等。三是组合算法:这类方法要求信号的采样支持通过分组测试快速重建,如傅立叶采样^[12]、链式追踪和 HHS(Heavg Hitters on Steroids)追踪^[13]等。

上述3种算法中,组合算法需要结构化的采样,采样获取有一定困难,贪婪追踪类算法的优点在于其算法复杂度低,且具有渐进收敛性,所以具有典型代表性,其 MP 算法的基本思想是从 M 行 N 列的过完备库中选取与原信号的残差最匹配的原子来构建稀疏逼近,并在逼近过程中更新残差值,选出与信号余量最为匹配的原子,经过 K 次迭代,该原始信号便可以由过完备原子库(感知矩阵)里的一些原子线性表示,从而得到原始信号的重建,算法步骤如下:

输入: $M \times N$ 维测量矩阵 Φ , 采样信号 y , 稀疏度 K

输出: 索引集 Λ_t , 重建信号 \hat{b} , 余量 r_t

- 1) 初始化: $r_0 = y, t = 1$;
- 2) 搜索索引集 Λ_t , 使得 $\Lambda_t = \operatorname{arg}_{i=1,2,\dots,n} \max |\langle r_{t-1}, \Phi_i \rangle|$;
- 3) 计算: $b_t = \langle r_{t-1}, \Phi \rangle, r_t = y - b_t$;
- 4) $t = t + 1$, 如果 $t \leq k$, 返回第 2) 步。

MP 算法仅保证信号的残差与每步所选的原子正交,不与以前选择的原子正交,所以需经过多次迭代才能控制信号重建误差在允许范围内,OMP 算法有效地克服了 MP 算法的这一缺点,保留了 MP 算法的原子选择方式,通过对已选择原子集合递归地采用 Gram-Schmidt 正交化方法进行正交化处理,再将采样信号投影在这些正交原子构成的空间上,得到信号在这些原子上的分量和余量,随着分解过程迅速减小从而减少了迭代次数,其迭代过程如下:

输入: $M \times N$ 维测量矩阵 Φ , 采样信号 y , 稀疏度 K

输出: 索引集 Λ_t , 重建信号 \hat{b} , 余量 r_t

- 1) 初始化: $r_0 = y$, 索引集 $\Lambda_0 = \emptyset$, 迭代次数 $t = 1$;
- 2) 找到索引 J_t , 使得 $J_t = \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \Phi_i \rangle|$;
- 3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{J_t\}$;
- 4) 通过求解最小二乘问题得到信号的近似解: $\hat{b} = \operatorname{argmin}_b \|y - \Phi b\|_2$
- 5) 计算: $r_t = y - \Phi \hat{b}$;
- 6) $t = t + 1$, 如果 $t \leq k$, 返回第 2) 步, 依次迭代。

比较上述两种匹配算法,OMP 算法明显不会重复地选择原子,经过有限次迭代即可较好地重建原始信号,所以运行时间优于 MP 算法。由于它是寻找所有已知信号的最小二乘解作为它的近似解,因此该算法要比 MP 算法复杂一些,对稀疏度较大并且维数较高的信号的处理时,它每次迭代所消耗的资源也比 MP 算法要多一些,但是它的计算精度和总迭代次数明显要优于 MP 算法。本文基于上述 OMP 算法的优缺点引入正则化自适应和空间匹配的原子选取原则,提出了一种新的自适应空间正交匹配追踪算法(Adaptive Space Orthogonal Matching Pursuit, ASOMP)用于稀疏信号的重建,最后对

该算法和传统的正交匹配算法进行了仿真对比,结果表明该算法在重建质量和算法速度上均优于传统 MP 和 OMP 算法。

3 自适应空间正交匹配追踪算法

常用的算法基本思想是从原子集合中选择最优的单一原子来逐步逼近信号的稀疏解,本文所提出的 ASOMP 算法采用逆向思路,运用正则化自适应思想和 QR 分解法增大传感矩阵的奇异值^[14]来选取最大原子能量,逐步去掉不能满足稀疏条件的原子,剩下最后一个即为最合适的原子。首先,为了更好地满足 RIP 条件,降低运行时间,增强感知矩阵的独立性,我们直接在原信号 b 的 N 维空间中运用 QR 分解法来进行原子选择,假设传感矩阵 Φ 为 $M \times N (M \leq N)$,QR 分解后,有:

$$\Phi = R^T Q^T \quad (7)$$

由于 R 中主对角线上元素大于非对角线上的元素,因此保留主对角线上的元素,其它元素为 0,得到新的矩阵:

$$\Phi_l = R_l^T Q^T \quad (8)$$

式中, R_l^T 为对角矩阵,其对角线上第 j 个元素为 $\tau_{jl} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_l^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi_l}}$,新的原子集合为 l 。在满足约束等距性 (RIP 准则) 条件下,由式 (2) 可知,最小 l_2 范数解 (精确稀疏解) 为:

$$b_2 = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi \quad (9)$$

它在 Φ_l 上的投影为:

$$s_l = \langle \Phi_l, b_2 \rangle / \|\Phi_l\|_2 = \Phi_l^T (\Phi \Phi^T)^{-1} y / \sqrt{\Phi_l^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi_l} \quad (10)$$

计算 s_l 的相关性:

即 $s_k = R_l^T \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} r_l$, 并从 s_k 中选择 k 个非零元素存入候选集合 F_l 中,分析 F_l 和 F_{l-1} 的交集是否为空集,若有交集,则将交集集中的原子并入 F_l 中,若为空集,则将 F_l 正则化。

根据势能公式:

$$\begin{aligned} \Delta E_j &= E(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n) - E(b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_n) \\ &\approx \lambda |b_j - \hat{b}_j| \end{aligned} \quad (11)$$

计算

$$J^* = \operatorname{argmax}_j \Delta E_j \quad (12)$$

将 F_l 中能量最大的原子 J^* 存入集合 J 中,更新集合 $l_l = l_{l-1} \cup J$,原子集合 $\Phi_{l_l} = \Phi_{l_{l-1}} \cup \{\Phi_{J^*}\}$,最后,经过一定迭代得到上述集合更新后,运用最小二乘法进行信号逼近:

$$\hat{b} = \operatorname{argmin}_b \|y - \Phi_{l_l} b\|_2 \quad (13)$$

通过 y 减去其在所选原子集合上的正交投影得到余量更新:

$$r_{l_l} = y - \Phi_{l_l} \hat{b} \quad (14)$$

综上所述,给出 ASOMP 算法如下重建步骤:

输入:传感矩阵 Φ 及信号 b

输出:重建向量 \hat{b} ,重建误差 r_l

- 1) 初始化迭代余量 $r_0 = y$,稀疏向量 $b_0 = 0$,迭代次数 $t_0 = 0$,原子集合 $l = 0$;
- 2) 计算对角矩阵 R_l^T 及相关系数 $s_k = R_l^T \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} r_l$;
- 3) 从 s_k 中选择 k 个非零元素存入集合 F_l 中,分析 F_l 和 F_{l-1} 是否有

交集,若有交集,则将交集集中的原子并入 F_l 中,若为空集,则将 F_l 正则化;

- 4) 根据势能公式选择 F_l 中能量最大的原子 $J^* = \operatorname{argmax}_j \Delta E_j$ 放入集合 J 中;
- 5) 更新集合 $l_l = l_{l-1} \cup J$ 及原子集合 $\Phi_{l_l} = \Phi_{l_{l-1}} \cup \{\Phi_{J^*}\}$;
- 6) 运用最小二乘法进行信号逼近 $\hat{b} = \operatorname{argmin}_b \|y - \Phi_{l_l} b\|_2$;
- 7) 计算余量更新 $r_l = y - \Phi_{l_l} \hat{b}$;
- 8) 若 $\|r_l\| \geq 2K$,则停止迭代,否则令 $t = t + 1$,转入步骤 2) 重新运行。

ASOMP 算法首先运用近似 QR 分解法在原空间对原子进行选择,然后根据步骤 2) 和步骤 3) 中的相关原子挑选多个原子作为候选集合,按照正则化原则从候选集合中挑选出部分能量最大的原子并入新的集合中,从而实现了原子的快速有效选择,达到了从较少的采样信号中恢复重建原始数据的目的,使得该算法获得较好的信号重建质量,同时也极大地缩短了恢复重建的运行时间。

4 实验结果及对比分析

为了验证 ASOMP 算法的优越性,我们用 MATLAB 软件平台对该算法进行各项仿真测试。首先选取一维信号进行测试,对长度为 $N=300$ 的一维高斯随机信号进行稀疏化,生成一个稀疏度 $K=18$ 、 $M=90$ 、压缩比 $M/N=0.3$ 、长度不变的稀疏信号,用高斯随机矩阵作为感知测量矩阵,其恢复重建效果如图 1 所示。

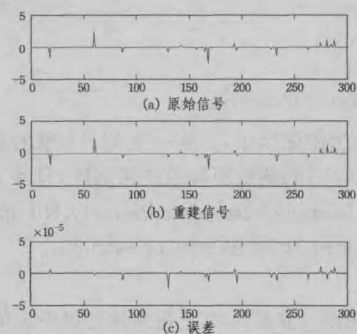


图 1 ASOMP 算法一维信号重建效果图

由图 1 可以看出,ASOMP 算法对一维信号的恢复重建效果良好,几乎达到了完美的地步,相对误差较小,算法的收敛性也较好。为了更好地说明本文算法的优越性能,在像素为 256×256 的二维汉字图像“中”,采用离散小波变换作为稀疏变换矩阵进行信号稀疏表示,用高斯随机矩阵作为感知矩阵进行信号采样,分别用 MP 算法、OMP 算法和本文提出的 ASOMP 算法进行恢复重建,在不同采样次数下重建效果如图 2—图 4 所示。

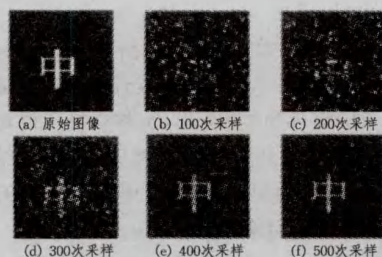


图 2 采用 MP 算法的图像恢复图

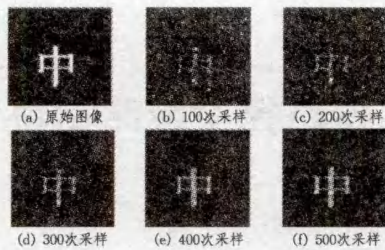


图3 采用 OMP 算法的稀疏图像恢复图

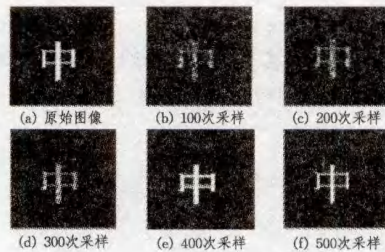


图4 采用 ASOMP 算法的稀疏图像恢复图

由图2—图4可以看出,MP算法、OMP算法和ASOMP算法随着采样次数的不同其图像重建效果也有很大差异,在200和300次采样时,各种算法都明显含有噪点,但在采样次数达到400左右时,ASOMP算法的优越性非常明显,图片的感官清晰度已经几乎达到了完美恢复的程度,在恢复的图像中也几乎找不到噪点。虽然MP算法和OMP算法也能在一定程度上实现原图像的恢复,但是恢复的图像中噪点明显,效果较差。

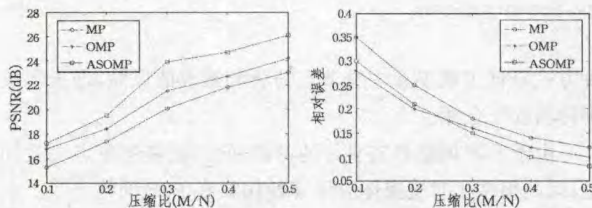


图5 峰值信噪比比值曲线图

图6 相对误差对比曲线图

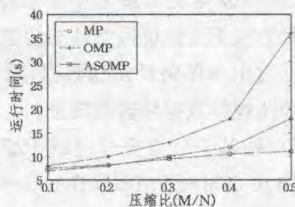


图7 运行时间对比曲线

图5—图7分析比较了ASOMP算法在不同压缩比的情况下与传统的MP、OMP算法在峰值信噪比(PSNR)、相对误差和运行时间上的不同。如图5所示,当压缩比为0.1时,用ASOMP算法恢复重建信号的峰值信噪比已经略高于其它两种算法,虽然随着压缩比的增大,3种算法的PSNR值都在增大,但ASOMP算法的PSNR值明显高于MP和OMP算法。由图6可以看出,在 $M/N=0.1$ 时,ASOMP算法的相对误差略高于OMP算法,3种算法的相对误差随着压缩比的增大而减小,但ASOMP算法减小得更快,误差值最小。由图7知,在压缩比最小时,3种算法的运行时间几乎差不多,ASOMP算法略高于OMP算法,这是由于在开始阶段用近似QR分解选取原子之故,但随着压缩比增大时,其它两种算法运行时

间明显增大,ASOMP算法变化却很小。通过上述一维、二维仿真实验和各种算法的不同比较结果可知,本文提出的ASOMP算法在重建质量和运行时间上均优于MP和OMP算法,是一种信号恢复重建较好的方法。

结束语 本文在深入研究压缩感知理论和经典的MP和OMP恢复重建算法的基础上,提出了新的ASOMP算法,该算法运用正则化自适应思想和近似QR分解法增大传感矩阵的奇异值来进行原子选择,避免了原子选择的重复,既加快了原子的选择速度,也较好地实现了信号的重建。通过大量的实验证明,本文提出的算法在图像重建质量和运行时间的效果上均优于MP和OMP算法,是具有一定优势的较为实用的新算法。

参考文献

- [1] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509
- [2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306
- [3] Baraniuk R G. Compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-120, 124
- [4] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346: 589-592
- [5] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081
- [6] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal processing, 1993, 41(12): 3397-3415
- [7] Tropp J. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2004, 50(10): 2231-2242
- [8] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stage orthogonal matching pursuit [R]. Technical report, 2006
- [9] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. Found. Comput. Math, 2009, 9(3): 317-334
- [10] Kim S J, Koh K, Lustig M, et al. Gorinevsky. A method for large-scale-regularized least-squares [J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 4(1): 606-617
- [11] Gilbert A C, Guha S, Indyk P, et al. Near-optimal sparse Fourier representations via sampling [C]// STOC'02 Proceedings of the thirty-fourth annual ACM symposium on Theory of Computing. 2002: 152-161
- [12] Gilbert A C, Srauss M J, Tropp J A, et al. One sketch for all: Fast algorithms for compressed sensing [C]// STOC'07 Proceeding of the thirty-ninth annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2007: 237-246
- [13] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 2007, 53(12): 4655-4666
- [14] Golub G, Loan C. Matrix computations [M]. Johns Hopkins: Baltimore, 1996