

基于决策粗糙集的广义序贯三支决策方法

杨新^{1,2} 李天瑞¹ 刘盾³ 方宇⁴ 王宁⁵

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 611756)¹ (四川工商学院计算机学院 成都 611745)²

(西南交通大学经济管理学院 成都 610031)³ (西南石油大学计算机科学学院 成都 610500)⁴

(重庆师范大学涉外商贸学院 重庆 401520)⁵

摘要 三支决策是求解动态不确定性问题的有效方法之一。相比传统的二支决策,序贯三支决策方法在信息不充分或证据不足时能有效平衡决策结果代价和过程代价。在研究多层次的粒结构、多选择的处理对象和多样化的代价结构的基础上,提出了一种基于决策粗糙集的广义序贯三支决策模型。该模型在每一层都考虑了 7 种不同的对象处理方式。最后,通过实验对比分析了该模型中 7 种方法的效率和性能。

关键词 序贯三支决策,多层次,代价敏感,决策粗糙集

中图分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.001

Generalized Sequential Three-way Decisions Approach Based on Decision-theoretic Rough Sets

YANG Xin^{1,2} LI Tian-rui¹ LIU Dun³ FANG Yu⁴ WANG Ning⁵

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)¹

(School of Computer Science, Sichuan Technology and Business University, Chengdu 611745, China)²

(School of Economics Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)³

(School of Computer Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)⁴

(Chongqing Normal University Foreign Trade and Business College, Chongqing 401520, China)⁵

Abstract The theory three-way decisions is one of effective approaches to solve the dynamic uncertain problem. Compared to two-way decisions, sequential three-way decisions can address the balance of cost of decision result and cost of decision process effectively when information is insufficient or evidence is inadequate. Based on the study of the multi-level granular structure, the processing objects of multiple selections and the diversified cost structure, this paper proposed a generalized sequential three-way decisions model under decision-theoretic rough sets. This model considers seven different methods to process objects at each level. Finally, experiments were conducted to analyze the efficiency and performance of seven approaches in the proposed model.

Keywords Sequential three-way decisions, Multilevel, Cost sensitive, Decision-theoretic rough sets

1 引言

三支决策(Three-way Decisions)是 Yao 在 2010 年提出的一种以“三分而治”(Trisecting and Acting)为指导思想的不确定性问题的求解方法和策略^[1]。中国传统文化中的中庸思想强调将一个问题“一分为三”,其中“过”和“不及”是做事的两个极端,而“及”可以看成两个极端的折中点。三支决策也借鉴了该中庸思想,主张把一个整体分为 3 个部分进行处理。实际上,日常生活中很多复杂问题的解决都采用了三支决策思想,如医疗诊断、战地救治伤员、词频分类和民主选举

等。近几年来,关于三支决策的理论、模型和应用研究都取得了一系列的成果,如三支分类^[2]、三支聚类^[3]、三支推荐^[4]、三支分析^[5]、三支增量学习^[6-9]和三支计算^[10]等。

作为一种典型的粒计算方法,三支决策研究可以分为两类:静态三支决策和动态三支决策。根据三支决策的基本思想,当信息不充分或证据不足时,我们会对一部分对象不做出确定的决策,而是选择延迟决策,等待更多、更有力的信息或证据来进一步决策。因此,实质上三支决策应该更多地被认为是一种动态的决策思想。同时,考虑到决策结果代价和决策过程代价,Yao 通过构建一个多层次的粒结构,提出了基于

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-15 本文受国家自然科学基金项目(61573292,61572406,71571148,61876157),四川省教育厅科研青年基金项目(18ZB0373)资助。

杨新(1981-),男,博士生,副教授,CCF 会员,主要研究方向为粗糙集与粒计算、三支决策等;李天瑞(1969-),男,教授,博士生导师,CCF 杰出会员,主要研究方向为数据挖掘与知识发现、粗糙集与粒计算等,E-mail:trli@swjtu.edu.cn(通信作者);刘盾(1983-),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为粗糙集与粒计算;方宇(1983-),男,讲师,主要研究方向为粗糙集与粒计算、三支决策等;王宁(1983-),女,副教授,主要研究方向为数据挖掘与知识发现等。

粒计算的序贯三支决策方法,并分析得出这种动态的三支决策方法可能会获得比二支决策更小的决策过程代价^[11]。一方面,在较低的粒度层次,我们在容忍一定错误的情况下可以对一些对象做出快速的决策,减小了这部分对象的决策过程代价,但同时也增加了决策结果代价;另一方面,一些对象被转移到较高的粒度层次才会做出确定的决策,显然这部分对象的决策结果代价较低,但决策过程代价增大。因此,我们需要平衡决策结果代价和决策过程代价。此外,诸多学者运用序贯三支决策思想对其他领域展开了相关研究。Li等为了解决错分类代价不平衡和图像信息不充分等问题,提出了一种基于序贯三支决策的代价敏感人脸识别模型^[12],并进一步提取序贯的特征粒度来研究深度神经网络模型^[13]。Savchenko基于序贯三支决策和粒计算,探讨了一种图像识别的统计方法^[14]。Qian等设计了一种序贯的三支决策属性约简方法^[15]。Li等采用序贯三支决策的方法,在多粒度下研究了三支概念分析^[16]。Hao等基于序贯三支决策,解决了动态多标记决策信息系统下的最优标记选择问题^[17]。方宇等基于代价优化策略,提出了一种基于序贯三支决策的代价敏感分类方法^[18]。可以看出,序贯三支决策作为一种高效的动态决策方法,已经得到了广泛的研究并取得了不错的进展。

本文拟在现有研究的基础上,从静态和动态两个方面来系统地阐述三支决策方法,并通过多层次的粒结构、多选择的处理对象和多样化的代价结构等着重介绍和分析一种更加广义的序贯三支决策理论和模型,最后通过UCI实验分析该模型的性能和效果。

2 静态三支决策

Yao提出的基于“三分而治”的三支决策是一种快速、低成本、高收益、容错的复杂问题求解方法。图1给出了一个“三分而治”的静态三支决策框架^[1]。顾名思义,该方法包含两个基本任务:一个是“三分(Trisecting)”,即如何把一个整体 U 分成3个部分(部分 $P_1(R_1)$ 、部分 $P_2(R_2)$ 和部分 $P_3(R_3)$),我们也可以称这3个部分为3个区域,分别记为 R_1, R_2 和 R_3 ;另一个是“治略(Acting)”,即如何对不同的部分采取不同的处理策略。“三分”和“治略”形成了三支决策思想的两个主要阶段。其中“三分”的好坏直接影响“治略”的效果。

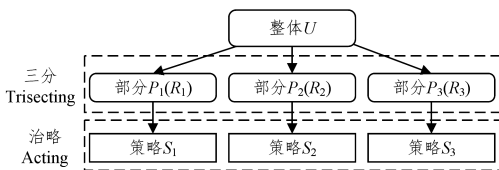


图1 三分而治的三支决策框架^[1]

Fig.1 Trisecting and acting framework of three-way decisions^[1]

下面给出一个基于评价的三支决策模型的定义。

定义1^[1] 假设 U 是一个有限非空的论域, (L, \leq) 是一个全序集合,其中偏序关系 \leq 满足自反性、反对称和传递性。给出一个评价函数 $v: U \rightarrow L$,对于任意对象 $x \in U$, $v(x)$ 代表对象 x 的评价值。设置一对阈值 $\alpha, \beta \in L$ 且 $\alpha > \beta$,我们可以通过以下方法将论域 U 划分为3个区域 R_1, R_2 和 R_3 :

$$R_1(v(x)) = \{x \in U \mid v(x) \geq \alpha\}$$

$$R_2(v(x)) = \{x \in U \mid \alpha > v(x) > \beta\} \quad (1)$$

$$R_3(v(x)) = \{x \in U \mid \beta \geq v(x)\}$$

划分得到的3个区域满足以下几个性质:

$$1) R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

$$2) R_1 \cap R_3 = \emptyset$$

$$3) R_2 \cap R_3 = \emptyset$$

$$4) R_1 \cup R_2 \cup R_3 = U$$

如果仅有一个区域为空集,则三支决策转化为二支决策。

因此,三支决策是二支决策的一种扩展方法,其思想起源于但又局限于决策粗糙集。通过以上三支决策框架,我们可以很容易地发现区间集、模糊集、阴影集和偏序集等都具有与三支决策相同的构造思想。因此,三支决策可以认为是对这些方法的总结、提炼和升华,是指导我们解决复杂问题的高效方法。

下面给出基于决策粗糙集的三支决策模型^[19-20]的定义。

定义2^[7] 假设一个四元决策信息表为 $S = (U, A, V, f)$ 。其中, U 是非空有限的对象集合; A 是非空有限的属性集合, $A = C \cup D$, C 代表条件属性集, D 代表决策属性集; $V = \cup V_a$ 是值域, V_a 是对象在属性 a 下的所有可能取值; $f: U \times A \rightarrow V$ 是一个映射函数,使得 $\forall a \in A, x \in U, f(x, a) \in V_a$ 。 $\forall B \subseteq A, E_B$ 是论域 U 上由 A 诱导出的一个等价关系,定义为:

$$E_B = \{(x, y) \in U \times U \mid f(x, b) = f(y, b), \forall b \in B\} \quad (2)$$

论域 U 在等价关系 E_B 下被划分成若干等价类 $[x]_{E_B}$,记为:

$$U/E_B = \{[x]_{E_B} \mid x \in U\}, \text{其中 } [x]_{E_B} \text{ 称为包含对象 } x \text{ 的等价类。}$$

定义3^[8] 假设一个概念 $X \subseteq U$,则 X 和等价类之间的条件概率定义如下:

$$\Pr(X \mid [x]_{E_B}) = \frac{|X \cap [x]_{E_B}|}{|[x]_{E_B}|} \quad (3)$$

其中, $|\cdot|$ 表示集合的势。如果我们把条件概率作为评价函数来量化概念 X 和等价类之间的相似性,则按照定义1,划分论域 U 可以得到具有决策语义的3个互不相交的区域:

$$POS(X) = \{x \in U \mid \Pr(X \mid [x]_{E_B}) \geq \alpha\}$$

$$BND(X) = \{x \in U \mid \beta < \Pr(X \mid [x]_{E_B}) < \alpha\} \quad (4)$$

$$NEG(X) = \{x \in U \mid \Pr(X \mid [x]_{E_B}) \leq \beta\}$$

其中,正域 $POS(X)$ 代表接受决策的区域,边界域 $BND(X)$ 代表延迟决策的区域,负域 $NEG(X)$ 代表拒绝决策的区域。 (α, β) 是一对阈值,满足 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ 。下面以二分类问题为例,通过贝叶斯最小风险原则给出一个基于代价矩阵的阈值计算公式。

在四元决策信息表 $S = (U, A, V, f)$ 中,用具有2个状态的集合 $\Omega = \{X, \neg X\}$ 和3个行动的集合 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$ 来描述贝叶斯决策过程。状态集中 X 和 $\neg X$ 互补;行动集中 a_P, a_B, a_N 分别表示将对象分类到正域、边界域和负域的决策动作。给定一个损失函数矩阵如下:

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_{PP} & \lambda_{PN} \\ \lambda_{BP} & \lambda_{BN} \\ \lambda_{NP} & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ 分别表示在状态 X 下采取行动 a_P, a_B, a_N 的损失, $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 分别表示在状态 $\neg X$ 下采取行动 a_P, a_B, a_N 的损失。因此, 可以给出分别采取行动 a_P, a_B, a_N 时的期望损失为:

$$\begin{aligned} R(a_P | [x]) &= \lambda_{PP} \Pr(X | [x]) + \lambda_{PN} \Pr(\neg X | [x]) \\ R(a_B | [x]) &= \lambda_{BP} \Pr(X | [x]) + \lambda_{BN} \Pr(\neg X | [x]) \\ R(a_N | [x]) &= \lambda_{NP} \Pr(X | [x]) + \lambda_{NN} \Pr(\neg X | [x]) \end{aligned} \quad (6)$$

根据贝叶斯决策准则, 我们会选择期望损失最小的行动集作为最佳的行动方案。通过推导(详细过程可参见文献[20-21]), 可以得到关于阈值对 (α, β) 的具体计算公式如下:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})} \\ \beta &= \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})} \end{aligned} \quad (7)$$

由以上可见, 基于决策粗糙集的三支决策方法不仅给出了 3 个区域的具体决策语义, 而且给出了基于贝叶斯最小风险下的阈值计算公式。因此, 决策粗糙集作为三支决策思想的典型代表, 受到了广大学者的广泛关注和研究。除此之外, 还有很多与机器学习相关的其他三支决策模型衍生出来, 但大多数研究都停留在一种静态的三支决策。从三支决策的基本思路来分析, 当信息不充分或证据不足时, 我们采取延迟策略, 把不确定的对象放到边界域, 待收集到更多的知识后再进行研究。因此, 从本质上可以看出三支决策思想就是一种动态的决策过程, 而动态的三支决策能够提高对象处理的效率, 减小处理对象的代价, 容忍一定程度的错误, 更适用于解决时序的复杂问题。下面以决策粗糙集为例来阐述和分析动态三支决策框架。

3 动态(序贯)三支决策

动态三支决策泛指一种多阶段的决策问题的解决方法。Yao 提出的序贯三支决策(Sequential Three-way Decisions)^[11]是动态三支决策的典型代表。首先, 构建一个多层次的粒结构, 自上而下, 粒度由粗变细, 呈现一种单调变化的趋势。在粒结构的某一层, 我们对正域或负域中的对象分别做出接受或拒绝的决定; 而对边界域中的对象, 由于信息不充分或不足, 暂时不做出确定的决定, 即延迟决策。然后, 把这一层的边界域作为下一层的处理对象, 此时粒度进一步变细, 仍然用三支决策的方法把这些对象划分成 3 个区域。显而易见, 边界域的对象在多层次的处理中被逐渐划分到正域和负域。这种从粗粒度到细粒度的动态决策过程就是传统的序贯三支决策。但是, 以上方法只针对边界域中的对象做出进一步的处理。实质上, 随着信息证据的变化, 针对不同的任务和目标, 不同的区域组合都有可能是我们进一步选择处理的对象。下面通过扩展传统的序贯三支决策思想, 提出一种更加广义的动态三支决策框架。

3.1 多层次的粒结构

通常, 我们很容易通过条件属性的子集构建粒度由粗到细的多层次结构。

定义 4^[7] 假设一个四元决策信息表为 $S = (U, A = CU$

$D, V, f)$ 。给出 n 个条件属性的子集, 满足 $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset C$ 。定义第 n 层的等价关系为:

$$E_i = \{(x, y) \in U \times U | f(x, b) = f(y, b), \forall b \in C_i\} \quad (8)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, n$ 。根据这 n 个等价关系, 可以在不同条件的子集下得到论域的不同划分, 且满足:

$$[x]_{C_n} \subseteq \dots \subseteq [x]_{C_2} \subseteq [x]_{C_1} \quad (9)$$

由此, 我们可以定义一个 n 层粒结构为:

$$\begin{aligned} GS &= (GS_1, GS_2, \dots, GS_n) \\ GS_i &= (U_i, E_i, C_i, [x]_{C_i}) \end{aligned} \quad (10)$$

例 1 假设论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, 条件属性 $C = \{a, b, c\}$, 则可以得到 3 个有序的条件属性子集分别为 $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{a, b\}$, $C_3 = \{a, b, c\}$ 。通过这 3 个子集, 得到的论域划分为:

$$\begin{aligned} \text{第 1 层: } U/C_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \\ \text{第 2 层: } U/C_2 &= \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}\} \\ \text{第 3 层: } U/C_3 &= \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\} \end{aligned}$$

通过以上划分, 可以得到一个自顶向下的 3 层粒结构。在用属性子集构建多层次粒结构时, 每一层属性的选择以及具体层数的确定等都是值得进一步研究的问题。当然, 我们也可以通过其他方式来构建多粒度的层次结构, 比如多标记的属性值^[21]; 对象的变化也是构建多层次粒结构的方法之一, 但目前这方面的研究还较少见。

3.2 多选择的处理对象

在多层次粒结构的每一层, 我们都通过三支决策把待处理的对象划分到 3 个区域。显然, 待处理的对象都是上一层处理后我们认为有必要进一步处理的对象。考虑 Yao 提出的“点-线-面”三层处理模式: 在点层, 研究 3 个互相独立的点 A, B 和 C ; 在线层, 研究两两相关的点组成的 3 条线 AB, AC 和 BC ; 在面层, 研究 3 个相关点和 3 条线组成的一个三角形面 ABC 。

根据“点-线-面”的三层次治略模式, 我们可以得出 3 个决策区域 POS, BND 和 NEG 的 7 种不同区域组合, 如图 2 所示。下面给出 7 种序贯三支决策处理方法。

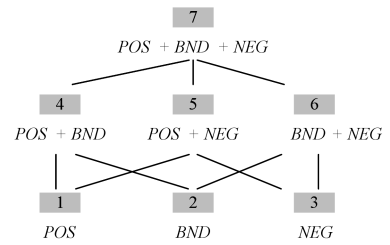


图 2 3 个决策区域的三层治略模式^[7]

Fig. 2 Three-level acting model with three decision regions^[7]

定义 5^[7] 设通过决策信息表 S 得到一个 n 层粒结构为: $GS = (GS_1, GS_2, \dots, GS_n)$, $GS_i = (U_i, E_i, C_i, [x]_{C_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。给出阈值对 (α_i, β_i) , 且满足 $0 \leq \beta_i < \alpha_i \leq 1$, 则我们可以在粒结构的第 i 层得到 3 个区域:

$$\begin{aligned} POS_i(X_i) &= \{x \in U_i | \Pr(X_i | [x]_{E_{C_i}}) \geq \alpha_i\} \\ BND_i(X_i) &= \{x \in U_i | \beta_i < \Pr(X_i | [x]_{E_{C_i}}) < \alpha_i\} \\ NEG_i(X_i) &= \{x \in U_i | \Pr(X_i | [x]_{E_{C_i}}) \leq \beta_i\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, U_i 是第 i 层的处理对象, X_i 是第 i 层的概念。 U_i 和 X_i 都有 7 种选择情况, 具体如表 1 所列 ($i \neq 1, U_1 = U$)。

表 1 序贯三支决策中 7 种不同的选择情况

Table 1 Seven selections in sequential three-way decisions

序号	第 i 层的处理对象 U_i	第 i 层的概念 X_i
1	$U_i = P(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
2	$U_i = B(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
3	$U_i = N(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
4	$U_i = P(X_{i-1}) \cup B(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
5	$U_i = P(X_{i-1}) \cup N(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
6	$U_i = B(X_{i-1}) \cup N(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$
7	$U_i = P(X_{i-1}) \cup B(X_{i-1}) \cup N(X_{i-1})$	$X_i = X_{i-1} \cap U_i$

在多层次的粒结构中, 当粒度由粗变细、粒层由低到小时, 我们可以根据三支决策的任务和目的, 在每一层从表 1 中选择 7 种不同的对象处理方式。比如, 在医疗诊断中, 在引入了新的检测方法后, 已经被分到正域或负域的患者可能会再次被要求接受测试并诊断, 此时我们会选择第 1 种或第 3 种情况; 如果要尽快把不确定的对象分到正域或负域, 首选第 2 种方法, 即在每一层只处理上一层得到的边界域; 在多分类问题中, 被分到某一决策类的边界域和负域的对象都应该是我们需要继续关注的对象, 因此当采取序贯三支多分类时, 应该采用第 6 种方法。

3.3 多样化的代价结构

在序贯三支决策中, 我们通常会考虑两类代价, 即决策结果代价和决策过程代价。

1) 决策结果代价

在多层次的粒结构中, 每一层都基于贝叶斯最小风险准则, 通过损失函数计算出阈值对 (α_i, β_i) , 按照决策粗糙集模型得出待处理对象的 3 种决策规则。实际上, 由于每一层的信息和粒结构不同, 我们设置的损失函数也应该不同。换句话说, 由于在动态决策过程中信息和粒结构都在不断变化, 因此错误决策带来的损失也会发生变化。

定义 6^[7] 设通过决策信息表 S 得到一个 n 层粒结构为: $GS = (GS_1, GS_2, \dots, GS_n)$, $GS_i = (U_i, E_i, C_i, [x]_{C_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则第 i 层的损失函数矩阵定义为:

$$L_i = \begin{bmatrix} \lambda_{PP}^i & \lambda_{PN}^i \\ \lambda_{BP}^i & \lambda_{BN}^i \\ \lambda_{NP}^i & \lambda_{NN}^i \end{bmatrix} \quad (12)$$

在粒结构的第 i 层, 按照贝叶斯决策过程采取行动 α_i ($i = P, B, N$) 得到的期望风险损失为:

$$\begin{aligned} R(\alpha_P | [x]_{C_i}) &= \lambda_{PP}^i \Pr(X | [x]_{C_i}) + \lambda_{PN}^i \Pr(\neg X | [x]_{C_i}) \\ R(\alpha_B | [x]_{C_i}) &= \lambda_{BP}^i \Pr(X | [x]_{C_i}) + \lambda_{BN}^i \Pr(\neg X | [x]_{C_i}) \\ R(\alpha_N | [x]_{C_i}) &= \lambda_{NP}^i \Pr(X | [x]_{C_i}) + \lambda_{NN}^i \Pr(\neg X | [x]_{C_i}) \end{aligned} \quad (13)$$

通过采取风险最小的行动得到 3 个不同的决策规则。第 i 层的总决策结果代价可以通过式(14)计算:

$$\begin{aligned} COST_R^i &= \sum_{[x]_{C_i} \subseteq U_i} R(\tau([x]_{C_i}) | [x]_{C_i}) \Pr([x]_{C_i}) \\ &= COST_R^{P_i} + COST_R^{B_i} + COST_R^{N_i} \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $COST_R^{P_i}$ 表示正域的总决策代价, $COST_R^{B_i}$ 表示边界域

的总决策代价, $COST_R^{N_i}$ 表示负域的总决策代价。

2) 决策过程代价

在序贯三支决策中, 决策过程代价泛指整个序贯过程中处理对象所需要的各种代价, 一般包括测试代价、延迟代价和计算代价。因此, 可以定义第 i 层的总决策过程代价为:

$$COST_P^i = COST_T^i + COST_D^i + COST_C^i \quad (15)$$

其中, $COST_T^i$ 表示对象的测试代价, $COST_D^i$ 表示对象的延迟代价, $COST_C^i$ 表示对象的计算代价。通常, 测试代价可以用金钱等量化, 而延迟代价和计算代价都以时间来表示。

3) 两个代价的平衡

在序贯三支决策中, 减小决策过程代价会增加决策结果代价, 而减小决策结果代价会增加决策过程代价。在多层次的序贯决策过程中, 我们可以通过设置一个加权的总代价来实现对两种代价的平衡^[11]。

$$\begin{aligned} COST_i &= F(COST_R^i, COST_P^i) \\ &= \omega_R \cdot COST_R^i + \omega_P \cdot COST_P^i \end{aligned} \quad (16)$$

其中, ω_R 和 ω_P 分别代表两类代价的偏好权重值, 且满足以下条件:

$$\omega_R \geq 0, \omega_P \geq 0, \omega_R + \omega_P \neq 0$$

如果决策过程代价同时考虑测试代价、延迟代价和计算代价, 那么进一步可得:

$$\begin{aligned} COST_i &= F(COST_R^i, COST_T^i, COST_D^i, COST_C^i) \\ &= \omega_R \cdot COST_R^i + \omega_T \cdot COST_T^i + \omega_D \cdot COST_D^i + \\ &\quad \omega_C \cdot COST_C^i \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\omega_R, \omega_T, \omega_D$ 和 ω_C 分别代表 4 种代价的偏好权重值, 且满足以下条件:

$$\omega_R \geq 0, \omega_T \geq 0, \omega_D \geq 0, \omega_C \geq 0, \omega_R + \omega_T + \omega_D + \omega_C \neq 0$$

4 实验结果与分析

本文选择了 4 个 UCI 数据集来对比分析广义序贯三支决策中 7 种不同区域处理方法的性能和效果。数据集的基本信息如表 2 所列。

表 2 数据集的基本信息

Table 2 Description of data sets

数据集	对象	属性	决策类	层数
Zoo	101	16	7	4
Cmc	1473	9	3	4
Car	1728	6	4	4
Splice	3190	60	3	4

将所有数据集都转化为二分类问题, 并按照属性个数的平均原则构建 4 层的粒结构, 损失函数在 $[1, 10]$ 区间随机生成。所有实验都在 PC 机上运行, 其配置为 Intel(R) Core(TM) i5-4210U CPU @ 1.70 GHz, 12 GB 内存, Windows10 操作系统, Matlab 2016a 实验平台。

本文所提出的广义序贯三支决策给出了 3 个层次共 7 种不同的处理方法, 分别对应图 3 和图 4 中横坐标的 P, B, N, PB, PN, BN 和 PBN。图 3 给出了不同方法下需要处理的对象总数量, 能有效反映出测试代价和延迟代价的大小。从图中可以明显看出, 当需要处理的区域数量越多时, 所需处理的

对象总数量就越多。当在每一层都需要同时处理 3 个区域时,所需处理对象的数量达到最大值。特别指出,在图 3 中,数据集 Car 和 Cmc 中的 PN 处理对象总数量明显比 PBN 少,在数据集 Zoo 中 PN 和 PBN 数量相等,在数据集 Splice 中 PN 比 PBN 少 18。

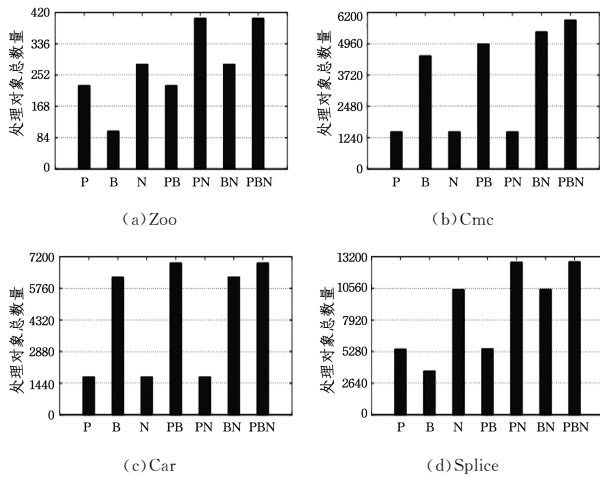


图 3 处理对象总数量的变化

Fig. 3 Variation of total number of processing objects

图 4 给出了 7 种不同区域组合下所需要的计算代价,即计算时间。同样可以发现,所需处理区域越少,计算代价越小。当需要同时处理 3 个区域时,计算代价达到最大值。

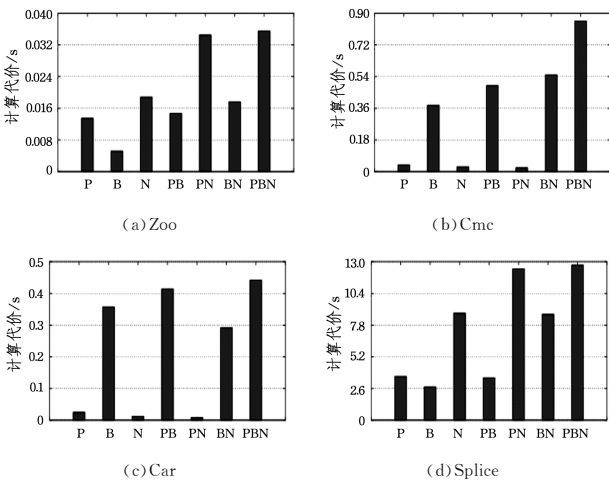


图 4 计算代价的变化

Fig. 4 Variation of computational cost

此外,为评价序贯三支决策中每一层 3 个区域的精度,我们引入正确接受率指标:

$$CAR_i = \frac{|POS_i(X_i) \cap X_i|}{|POS_i(X_i)|} \quad (18)$$

其中, $POS_i(X_i)$ 和 X_i 分别表示第 i 层的正域和概念。

在表 3 中,“—”表示某一层计算得到的正域中的对象个数等于零。从总体上看,不同数据集在不同层次的正确接受率都超过了 0.89;特别在数据集 Zoo 和 Splice 中,正确接受率均为 1。由此可见,从粒结构的第 1 层到第 n 层,本文所提序贯三支决策中的 7 种方法在减小对象处理代价的同时,也取得了不错的正确决策精度。

表 3 正确接受率的变化

Table 3 Variation of correct-acceptance rate

数据集	层数	P	B	N	PB	PN	BN	PBN
Zoo	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	—	—	1	1	—	1
	3	1	—	—	1	1	—	1
	4	1	—	—	1	1	—	1
Cmc	1	—	—	—	—	—	—	—
	2	—	0.9874	—	0.9874	—	0.9874	0.9874
	3	—	0.9189	—	0.9603	—	0.9205	0.9607
	4	—	0.8951	—	0.9516	—	0.9050	0.9537
Car	1	—	—	—	—	—	—	—
	2	—	1	—	1	—	1	1
	3	—	—	—	1	—	—	1
	4	—	0.9869	—	0.9915	—	0.9869	0.9915
Splice	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	—	1	1	1	1
	3	1	1	—	1	1	1	1
	4	1	—	—	1	1	—	1

结束语 本文从静态和动态两个方面对三支决策进行研究分析,提出了一种广义的序贯三支决策模型。该模型在粒结构的每一层都提供了 7 种不同的处理方式,可以根据任务目标选择相应的方法。序贯三支决策是动态三支决策的一种典型方法,具有更广阔的应用前景。下一步主要是对这 7 种序贯模型进行深入分析,通过一些具体的应用场景来验证其有效性。

参 考 文 献

- [1] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing [J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554.
- [2] LI Y F, ZHANG L B, XU Y, et al. Enhancing binary classification by modeling uncertain boundary in three-way decisions [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2017, 29(7): 1438-1451.
- [3] YU H, ZHANG C, WANG G Y. A tree-based incremental overlapping clustering method using the three-way decision theory [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91(C): 189-203.
- [4] ZHANG H R, MIN F, SHI B. Regression-based three-way recommendation [J]. Information Sciences, 2017, 378: 444-461.
- [5] LANG G M, MIAO D Q, CAI M J. Three-way decision approaches to conflict analysis using decision-theoretic rough set theory [J]. Information Sciences, 2017, 406: 185-207.
- [6] WANG L N, YANG X, CHEN Y, et al. Dynamic composite decision-theoretic rough set under the change of attributes [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2018, 11(1): 355-370.
- [7] YANG X, LI T R, FUJITA H, et al. A unified model of sequential three-way decisions and multilevel incremental processing [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 134: 172-188.
- [8] YANG X, LI T R, LIU D, et al. A unified framework of dynamic three-way probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2017, 420: 126-147.
- [9] ZHANG Q H, LV G X, CHEN Y H, et al. A dynamic three-way decision model based on the updating of attribute values [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 142: 71-84.
- [10] XU J F, MIAO D Q, ZHANG Y J, et al. A three-way decisions model with probabilistic rough sets for stream computing [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 88: 1-22.

- 汪小燕,沈家兰,申元霞. 基于加权粒度和优势关系的程度多粒度粗糙集[J]. 山东大学学报(理学版),2017,52(3):97-104.
- [19] LI J H,REN Y,MEI C L,et al. A comparative study of multi-granulation rough sets and concept lattices via rule acquisition [J]. Knowledge-Based Systems,2016,91:152-164.
- [20] LIN G P,LIANG J Y,QIAN Y H. An information fusion approach by combining multigranulation rough sets and evidence theory [J]. Information Sciences,2015,314:184-199.
- [21] YANG X B,QI Y S,SONG X N,et al. Test cost sensitive multi-granulation rough set:Model and minimal cost selection [J]. Information Sciences,2013,250:184-199.
- [22] LI T R,RUAN D,GEERT W,et al. A rough sets based characteristic relation approach for dynamic attribute generalization in data mining [J]. Knowledge-Based Systems,2007,20(5):485-494.
- [23] LI S Y,LI T R,LIU D. Incremental updating approximations in dominance-based rough sets approach under the variation of the attribute set [J]. Knowledge-Based Systems,2013,40(1):17-26.
- [24] CHEN H M,LI T R,RUAN D,et al. A rough-set-based incremental approach for updating approximations under dynamic maintenance environments [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2012,25(2):274-284.
- [25] LIU W B,LI T R,ZOU W L,et al. Approaches for Incrementally Updating Approximations under Characteristic Relation-based Rough Sets While Attribute Values Coarsening and Refining[J]. Computer Science,2010,37(6):248-251. (in Chinese)
刘伟斌,李天瑞,邹维丽,等. 特性关系粗糙集下属性值粗化细化时近似集增量更新方法研究[J]. 计算机科学,2010,37(6):248-251.
- [26] YANG X B,QI Y,YU H L,et al. Updating multigranulation rough approximations with increasing of granular structures [J]. Knowledge-Based Systems,2014,64(1):59-69.
- [27] JU H R,YANG X B,SONG X N,et al. Dynamic updating multi-granulation fuzzy rough set:approximations and reducts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2014,5(6):981-990.
- [28] HU C X,LIU S X,HUANG X L. Dynamic updating approximations in multigranulation rough sets while refining or coarsening attribute values [J]. Knowledge-Based Systems,2017,130:62-73.
- [29] HU C X,LIU S X,LIU G X. Matrix-based approaches for dynamic updating approximations in multigranulation rough sets [J]. Knowledge-Based Systems,2017,122:51-63.
- [30] HU C X,ZHAO G Z. A dominance-based multigranulation rough sets approach for dynamic updating approximations [J]. Journal of University of Science and Technology of China,2017(1):40-47. (in Chinese)
胡成祥,赵国柱. 优势关系多粒度粗糙集中近似集动态更新方法[J]. 中国科学技术大学学报,2017(1):40-47.
- [31] SUN A W. Experience in the diagnosis and treatment of acute pyelonephritis [J]. Chinese Journal of Medicine,1966,15(1):32-33. (in Chinese)
孙爱文. 诊治急性肾盂肾炎的体会[J]. 中国医刊,1966,15(1):32-33.
- [32] 刘维. 实战 MATLAB 之并行程序设计[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2012.
- [33] HAO C,LI J H,FAN M,et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions [J]. Information Sciences,2017,415:213-232.
- (上接第 5 页)
- [11] YAO Y Y. Granular computing and sequential three-way decisions [M]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer,2013:16-27.
- [12] LI H X,ZHANG L B,HUANG B,et al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition [J]. Knowledge-Based Systems,2016,91(C):241-251.
- [13] LI H X,ZHANG L B,ZHOU X Z,et al. Cost-sensitive sequential three-way decision modeling using a deep neural network [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,85(C):68-78.
- [14] SAVCHENKO A V. Fast multi-class recognition of piecewise regular objects based on sequential three-way decisions and granular computing [J]. Knowledge-Based Systems,2016,91:252-262.
- [15] QIAN J,DANG C Y,YUE X D,et al. Attribute reduction for sequential three-way decisions under dynamic granulation [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,85:196-216.
- [16] LI J H,HUANG C C,QI J J,et al. Three-way cognitive concept learning via multi-granularity [J]. Information Sciences,2017,378(1):244-263.
- [17] HAO C,LI J H,FAN M,et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions [J]. Information Sciences,2017,415:213-232.
- [18] FANG Y,MIN F,LIU Z H,et al. Sequential three-way decisions based cost-sensitive approach to classification [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science),2018,54(1):148-156. (in Chinese)
方宇,闵帆,刘忠慧,等. 序贯三支决策的代价敏感分类方法[J]. 南京大学学报(自然科学),2018,54(1):148-156.
- [19] YAO Y Y. Decision-theoretic rough set models [M]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin:Springer,2007:1-12.
- [20] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences,2010,180(3):341-353.
- [21] WU W Z,LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables [J]. Information Sciences,2011,181(18):3878-3897.