

代价敏感的序贯三支决策方法

邢颖¹ 李德玉^{1,2} 王素格^{1,2}

(山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006)¹

(山西大学计算智能与中文信息处理教育部重点实验室 太原 030006)²

摘要 在现实决策中,代价敏感问题是影响人类决策的重要因素之一,许多研究者致力于降低决策的代价。现阶段,在粗糙集领域中,研究者多基于 DTRS 模型且仅考虑某一种代价,不够全面。针对以上问题,利用序贯三支决策模型对两种代价的敏感性,通过多层次粒结构可以有效降低决策总代价,且能够更好地模拟人类动态渐进的决策过程。在序贯三支决策模型的基础上,构造了多层次粒结构;将各个属性的测试代价与其分类能力相关联,从信息熵的角度为其设置测试代价;与此同时,将属性约简与序贯三支决策相结合,利用基于代价最小准则的属性约简去除冗余属性及不相关属性对代价的影响。在 7 个 UCI 数据集上的实验结果显示,在保证较高准确度的同时,决策的总代价平均下降了 26% 左右,充分验证了该方法的有效性。

关键词 多粒度,序贯三支决策,代价敏感,属性约简

中图分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.002

Cost-sensitive Sequential Three-way Decision Making Method

XING Ying¹ LI De-yu^{1,2} WANG Su-ge^{1,2}

(School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)¹

(Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing of Ministry of Education, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)²

Abstract In realistic decision-making, cost-sensitive issue is one of the important factors which affects human decision-making, and many researchers are committed to reducing the cost of decision-making. At present, in the field of rough set, many researchers mainly research decision-making based on DTRS model and only consider a certain cost, which is not comprehensive enough. While sequential three-way decision model is sensitive to two kinds of costs, and the multi-level granular structure can effectively reduce the total cost of decision and can better simulate the process of human's dynamic and gradual decision-making. Based on sequential three decision models, this paper constructed a multi-level granular structure. It relates the test cost of each attribute to its classification ability and sets the test cost from the perspective of information entropy. At the same time, combined with the sequential three decisions, the attribute reduction based on the minimum cost criterion is used to remove the influence of redundant attributes and irrelevant attributes on the cost. The experimental results on the seven UCI datasets show that while high accuracy is ensured, the total cost of decision-making is dropped by an average of 26%, which fully validates the effectiveness of the proposed method.

Keywords Multi-granularity, Sequential three-way decision, Cost-sensitive, Attribute reduction

1 引言

在现实决策过程中,代价敏感一直是研究的热点之一,通常考虑决策代价(误分类代价)和测试代价(成本代价),两者常常呈负相关,且各自偏重不同。以医疗诊断为例,诊断结果越准确,对应的测试成本越高。当患者进行医疗诊断时,部分患者侧重于诊断的准确度即决策代价,因此通常会选择决策

代价较低而测试代价较高的诊断方法;而另一部分患者则更注重于成本代价,会选择测试代价较低而决策代价稍高的诊断。两种偏重均有其现实意义,如何降低这两种代价成为了研究重点。

在现阶段的粗糙集领域中,对于代价敏感问题的研究多基于 DTRS 等传统的粗糙集模型,且其偏重不同。有的研究偏重于决策代价,以降低决策代价为主要目标^[1-3];有的研究

到稿日期:2018-03-09 返修日期:2018-05-09 本文受国家自然科学基金资助项目(61672331,61632011,61573231,61432011,61603229),山西省自然科学基金项目(201601D021076)资助。

邢颖(1992-),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集、数据挖掘,E-mail:715661871@qq.com;李德玉(1965-),男,博士,教授,主要研究方向为粒计算、机器学习,E-mail:lidy@sxu.edu.cn(通信作者);王素格(1964-),女,博士,教授,主要研究方向为自然语言处理、文本挖掘,E-mail:wsg@sxu.edu.cn。

则侧重于测试代价,以降低测试代价为主要目标^[4];还有的研究则考虑在决策代价和测试代价中取得平衡,以最小化总代价^[5-8]为决策目标。

从测试代价敏感模型的角度来看,Min 等^[9]在测试代价敏感决策系统中引入了分层模型,但没有考虑冗余属性对测试代价的影响。Yang 等^[4]提出测试代价敏感多粒度粗糙集模型,将测试代价融入到传统决策粗糙集的上、下近似中,给出新的近似定义方法,但该模型中一个属性特征对应形成一个粒结构,未曾考虑粒结构的选择方法。

DTRS 模型是决策代价敏感的典型代表,由 Yao 等^[10-11]首次提出,并受到越来越广泛的关注。DTRS 模型用一对阈值 (α, β) 描述对错误的容忍度,通过贝叶斯决策理论计算决策代价。基于决策代价属性约简的研究主要有:Yao^[12]基于 DTRS 模型给出了不同的属性约简定义;Jia 等^[13]研究了 DTRS 决策代价最小属性约简的 3 种算法。但以上方法的粒度单一,不能很好地利用多粒度渐进的优势,且阈值 (α, β) 对 DTRS 模型的影响较大,目前还没有确定阈值的较好方法,通常为给定一组阈值,不确定性较高。

三支决策模型^[14-18]为 DTRS 模型的 3 个域提供了对应的语义解释,其应用于生活中的多个领域,包括同行评审、医疗决策、文本分类、信息检索与智能代理、垃圾邮件过滤、投资管理、聚类分析与数据分析等^[19]。

序贯三支决策^[19-20]从粒计算的角度提高了三支决策的有效性,为模拟人们多粒度分析问题提供了决策途径;设置多组阈值,由保守到乐观,实现由粗粒度到细粒度动态渐进的决策过程;对于采取延迟决策的对象,逐步收集更多的有效信息,使决策结果由不确定性和粗粒度特征(边界域)向确定性和细粒度特征(正域和负域)转化^[21],重复该过程直至决策结果的风险代价符合预期,以更加有效地降低决策代价及测试代价。

Yang 等^[22]将序贯三支决策与多层次增量过程相结合以降低代价,但并未考虑冗余属性及不相关属性对代价的影响。因此,本文基于粒计算的思想构建多层次粒结构,将属性测试代价的设置与其分类能力相关联,提出了结合属性约简与序贯三支决策模型的方法,去除了冗余属性及不相关属性对决策总代价的影响。

2 基本知识

假设存在信息系统:

$$S = (U, AT = CUD, \{V_a | a \in AT\}, \{I_a | a \in AT\})$$

定义 1^[6] 给定信息系统 S , 其中 U 表示有限非空的所有对象的集合,也称为论域; AT 表示有限非空的属性集合, C 表示用于描述对象的条件属性集合, D 表示用于指明对象类别的决策属性集合; 对于 $\forall a \in AT, V_a$ 表示属性 a 的值域; 信息函数 $I_a: U \rightarrow V_a$, 用于将论域 U 中的对象映射到值域 V_a 中的某一个确定的值。若给定一组嵌套属性集合 $A_m \subset A_{m-1} \subset \dots \subset A_1 \subseteq AT$, 以及一组阈值 (α_i, β_i) , 则可以构造 m 层序贯三支决策模型。式(1)、式(2)表示第 i 层需要处理的样本数及对应概念:

$$U_i = BND_{(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})}(X_{i+1}) \quad (1)$$

$$X_i = X_{i+1} \cap BND_{(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})}(X_{i+1}) \quad (2)$$

图 1 简要描述了 m 层序贯三支决策的构造过程。

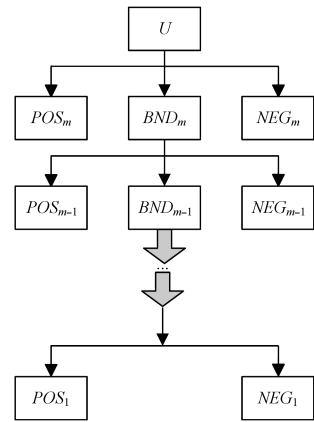


图 1 S3WD 的构造过程

Fig. 1 Construction process of S3WD

定义 2^[22] 给定第 i 层损失函数 M_i (见表 1) 及一对阈值 (α_i, β_i) 。 $\lambda_{PP}^i, \lambda_{BP}^i, \lambda_{NP}^i$ 分别表示当对象 $x \in X$ 时, 将 x 分入正域、边界域以及负域所对应的代价; $\lambda_{PN}^i, \lambda_{BN}^i, \lambda_{NN}^i$ 分别表示当对象 $x \notin X$ 时, 将 x 分入正域、边界域以及负域所对应的代价。如(3)~式(5)分别定义了第 i 层的正域、边界域以及负域规则。

$$POS_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_i) = \{x \in U_i | P(X_i | [x]_{A_i}) \geq \alpha_i\} \quad (3)$$

$$BND_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_i) = \{x \in U_i | \beta_i \leq P(X_i | [x]_{A_i}) \leq \alpha_i\} \quad (4)$$

$$NEG_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_i) = \{x \in U_i | P(X_i | [x]_{A_i}) \leq \beta_i\} \quad (5)$$

表 1 第 i 层损失函数

Table 1 Loss function of level- i

| | X | $\sim X$ |
|--------------|------------------|------------------|
| α_P^i | λ_{PP}^i | λ_{PN}^i |
| α_B^i | λ_{BP}^i | λ_{BN}^i |
| α_N^i | λ_{NP}^i | λ_{NN}^i |

在多层次 S3WD 模型中, 上层信息较少, 粒度较大, 采取保守决策以降低决策代价; 下层信息较多, 粒度较小, 采取乐观决策以增加正域及负域的决策规则。因此, S3WD 模型应当满足式(6)、式(7)^[6]:

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \leq 1, 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

$$\beta_m \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m \quad (7)$$

式(8)~式(10)分别表示 m 层正域、边界域及负域的决策代价计算方法^[6]。

$$COST_{POS} = \sum_{X_j \in \pi} \sum_{x \in POS_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_j)} \sum_{i=1}^m (\lambda_{PN}^i \cdot \dots) (1 - P(X_j | [x]_{A_i})) \quad (8)$$

$$COST_{BND} = \sum_{X_j \in \pi} \sum_{x \in BND_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_j)} \sum_{i=1}^m (\lambda_{BP}^i \cdot P(X_j | [x]_{A_i}) + \lambda_{BN}^i \cdot (1 - P(X_j | [x]_{A_i}))) \quad (9)$$

$$COST_{NEG} = \sum_{X_j \in \pi} \sum_{x \in NEG_{(\alpha_i, \beta_i)}^i(X_j)} \sum_{i=1}^m \lambda_{NP}^i \cdot P(X_j | [x]_{A_i}) \quad (10)$$

式(11)表示 m 层序贯三支决策的总决策代价。

$$COST_D = COST_{POS} + COST_{BND} + COST_{NEG} \quad (11)$$

式(12)表示单个属性测试代价的设置方法^[9]。

$$c^* \{a_i\} = M + [(N - M) \cdot (1 - H(D[a_i]))] \quad (12)$$

有关序贯三支决策及其代价的定义详见文献^[19-22]。

3 基于属性约简的序贯三支决策模型

基于三支决策的多层次粒结构构成了序贯三支决策。考虑到冗余属性和不相关属性的存在会增大测试代价以及决策代价,本文利用信息熵为各个属性设置测试代价,并将基于代价最小准则的属性约简与序贯三支决策模型相结合,构造多层次粒结构,降低决策总代价。

定义 3^[13] $\forall A \subseteq AT, A \neq \emptyset, A$ 是一个代价最小约简,当且仅当 A 是满足最小总代价的最小条件属性集。

定义 4 假定类别 X_j 为正类, $N_{PP}(X_j)$ 表示表示正域 POS 内正确分类的样本数, $N_{POS}(X_j)$ 表示正域中的样本数,有 n 个决策类别的样本集合的平均准确度可定义为:

$$CR = \left(\sum_{j=1}^n (N_{PP}(X_j) / N_{POS}(X_j)) \right) / n \quad (13)$$

给定损失函数矩阵 M , 由贝叶斯决策理论及式(8)一式(11)计算可得决策代价 $COST_D$ 。

一般而言,标准数据集中并未给出各个属性的测试代价,易知属性的测试代价与其对应的分类能力相关。因此,本文利用条件熵为属性 $\{a_i\}$ 分配了测试代价 $c^* \{a_i\}$, 式(12)给出了为属性设置测试代价的计算方法。

给定信息系统 S , 令混合函数 $COST$ 表示二者的总代价:

$$COST = COST_D + COST_T \quad (14)$$

由于本文的目标是降低决策的总代价,因此基于代价最小准则属性约简的目标函数为:

$$\min COST \quad (15)$$

本文的适应性函数设置为:

$$\varphi(\{a_i\}, AT) = COST_{AT - \{a_i\}} / COST_{AT} \quad (16)$$

式(16)表示属性的重要度。当 $\varphi(\{a_i\}, AT) = 1$ 时,表示属性 $\{a_i\}$ 是冗余属性,应当删除;当 $\varphi(\{a_i\}, AT) < 1$ 时,表示属性 $\{a_i\}$ 是不相关属性,其值越小,属性 $\{a_i\}$ 的重要性越低,应当删除;当 $\varphi(\{a_i\}, AT) > 1$ 时,表明属性 $\{a_i\}$ 的重要性较高,应当保留。

当属性数目减少时,测试代价会相应降低,但由于可用信息减少,分类的准确性可能会有所下降,即误分类代价会增大。为了保证决策的准确性,在属性约简时,若准确度较低,则赋予决策代价一个较大的权重值,此时决策总代价被重新定义为:

$$COST = \omega \cdot COST_D + COST_T \quad (17)$$

基于代价最小准则的启发式属性约简算法的描述如算法 1 所示。

算法 1 基于代价最小准则的启发式属性约简算法

输入:属性全集 AT

输出:最小代价约简 B

Step1 计算 $COST_{AT}$;

Step2 $B = AT, |AT| = n$;

Step3 for $i = 1$ to n

$\varphi(\{a_i\}, B) = \min(\varphi(\{a_i\}, B)), j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_j \in B$;

$B = B - \{a_i\}$;

计算 $COST_B$;

令 $COST_i = COST_B$;

$A_i = B$;

end for

Step4 令 $COST = \min COST_i$;

Step5 若 $COST < COST_{AT}$

$B = A_i$;

否则

$B = AT$;

首先计算求得属性全集的决策总代价;然后根据属性重要度函数,将全集 AT 依次减少一个属性,并求得对应的决策总代价;最后选取代价最小的属性子集 B 作为代价最小约简子集。

该约简算法的时间复杂度与属性数目 $|AT|$ 有关,通过属性约简减少属性数目,可以有效降低基于属性约简的序贯三支决策方法的时间复杂度。

4 实验设计与分析

本实验使用了 7 个 UCI 数据集,表 2 列出了有关数据集的样本个数、属性数目、决策类别数等详细信息。

表 2 数据集描述

Table 2 Description of datasets

| ID | UCI Dataset | Number of Samples | Number of Attributes | Number of Classes |
|----|-------------------|-------------------|----------------------|-------------------|
| 1 | Wdbc | 569 | 30 | 2 |
| 2 | Australian Credit | 690 | 14 | 2 |
| 3 | ILPD | 579 | 10 | 2 |
| 4 | Chess | 3196 | 36 | 2 |
| 5 | Soybean | 47 | 35 | 4 |
| 6 | SPECTF Heart | 267 | 22 | 2 |
| 7 | German Credit | 1000 | 20 | 2 |

基于属性约简的序贯三支决策方法(R-S3WD)将粒结构设计为 4 层,则第 i 层的属性数目为 $(i * \lfloor attr_num / 4 \rfloor)$ 。

为保证上层粒结构决策保守以降低决策代价,下层粒结构决策乐观以增加正域及负域决策规则,表 3 列出了各层对应的损失函数及阈值设定,该设置满足式(6)和式(7)。在测试代价参数的设置中, M 取 1, N 取 10, 权重 $\omega = 10^6$ 。

表 3 损失函数及阈值

Table 3 Loss function and thresholds

| granularity level | λ_{PP} | λ_{BP} | λ_{NP} | λ_{PN} | λ_{BN} | λ_{NN} | α | β |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|---------|
| level-4 | 0 | 1 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0.9 | 0.1 |
| level-3 | 0 | 1 | 5 | 5 | 1 | 0 | 0.8 | 0.2 |
| level-2 | 0 | 1 | 10/3 | 10/3 | 1 | 0 | 0.7 | 0.3 |
| level-1 | 0 | 1 | 5/2 | 5/2 | 1 | 0 | 0.6 | 0.4 |

4.1 评估函数

定义 5 给定信息系统 S , AT 表示属性全集, B 表示约简属性集,则属性数目的变化率 AR 为:

$$AR = (|AT| - |B|) / |AT| \quad (18)$$

定义 6 假设第 i 层粒结构的属性集合为 A_i , 需要处理的样本集为 U_i , 则总测试代价为:

$$COST_T = \sum_{X_j \in \pi_{i=1}}^m COST_T(X_j) / n \quad (19)$$

其中,

$$\pi = U/D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad (20)$$

$$COST_T^*(X_j) = |U_j| \cdot \left(\sum_{a_i \in A_j} c^* \{a_i\} - \sum_{a_{i+1} \in A_{j+1}} c^* \{a_{i+1}\} \right) \quad (21)$$

定义 7 假设 $COST_T, COST_T^*$ 以及 $COST_D, COST_D^*$ 分别表示 NR-S3WD 和 R-S3WD 的决策代价及测试代价,则测试代价降低率 (TCR)、决策代价降低率 (DCR) 以及决策总代价降低率 (SCR) 分别定义为:

$$TCR = (COST_T - COST_T^*) / COST_T \quad (22)$$

$$DCR = (COST_D - COST_D^*) / COST_D \quad (23)$$

$$SCR = TCR + DCR \quad (24)$$

4.2 属性数目的评估

在属性约简问题中,属性数目的约简率 AR 是衡量约简性能的重要评价指标之一。表 4 列出了分别采用 NR-S3WD 及 R-S3WD 两种方法时 7 个数据集属性的数目及其变化率,其中 $|A|$ 表示原数据集的属性数目, $|B|$ 表示约简后数据集的属性数目。由表 4 可知,相较于未经过属性约简的 NR-S3WD 方法(属性数目为 $|A|$),R-S3WD 方法在经过属性约简后,各个数据集的属性数目均大幅减少(属性数目为 $|B|$),7 个数据集属性数目平均减少了 60% 左右。例如,数据集

Wdbc 以及 ILPD 在约简后的属性数少于 4,对于本文多层次序贯三支决策模型而言,经过两层/三层序贯即可完成分类。

表 4 属性数目的变化率

| ID | UCI Dataset | $ A $ | $ B $ | AR/% |
|----|-------------------|-------|-------|------|
| 1 | Wdbc | 30 | 2 | 93 |
| 2 | Australian Credit | 14 | 6 | 57 |
| 3 | ILPD | 10 | 3 | 70 |
| 4 | Chess | 36 | 24 | 33 |
| 5 | Soybean | 35 | 7 | 80 |
| 6 | SPECTF Heart | 22 | 16 | 27 |
| 7 | German Credit | 20 | 6 | 70 |

4.3 代价评估

图 2(a) — 图 2(g) 给出了 7 个 UCI 数据集在 NR-S3WD 及 R-S3WD 两种方法下,各层及总的测试代价和决策代价的变化,在图 2(c) — 图 2(d)、图 2(g) 中,左图表示该数据集决策代价的变化,右图表示该数据集测试代价的变化。由于数据集 Wdbc, Australian Credit, Soybean 以及 German Credit 采用两种方法后各层的决策代价相等,均为 0,因此这里未给出这 3 个数据集决策代价的变化图,只给出了对应的测试代价变化图。

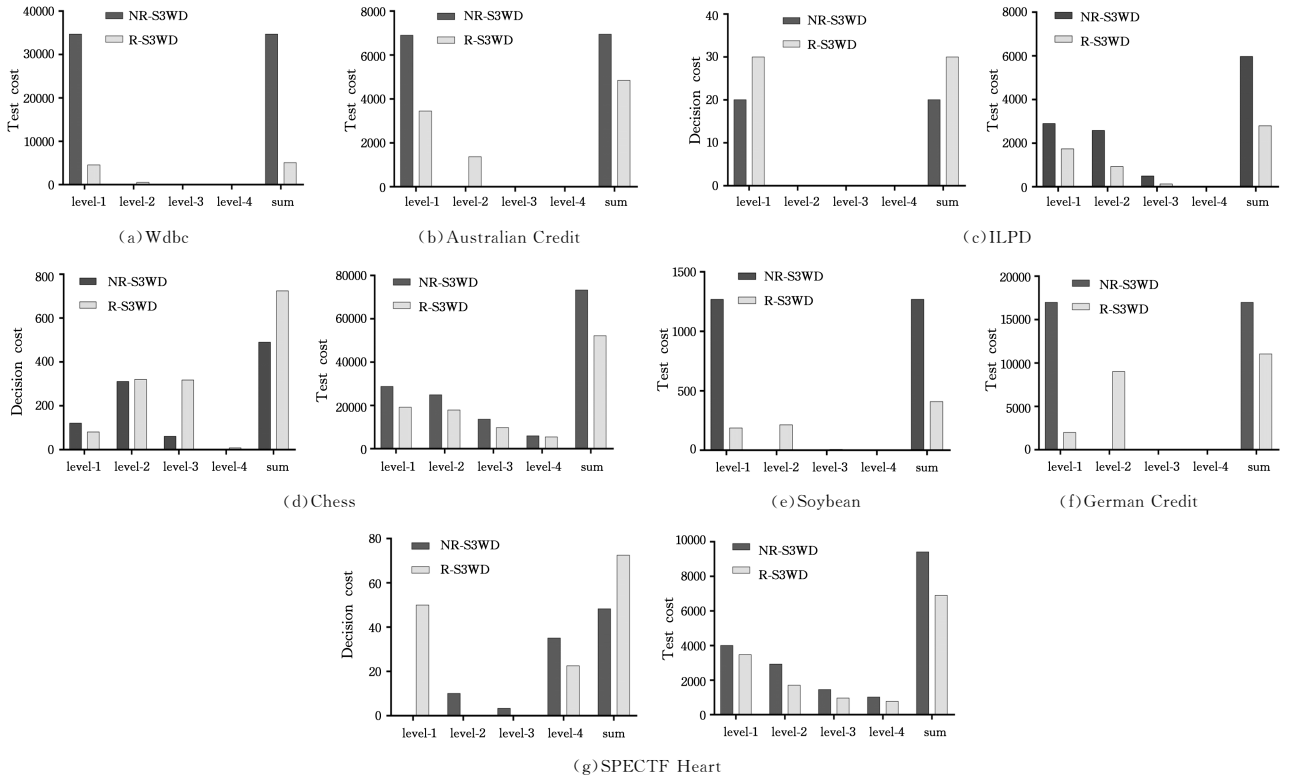


图 2 代价变化的比较

Fig. 2 Comparison of change of cost

如图 2 所示,部分数据集的决策代价有小幅增大,例如数据集 ILPD, Chess, SPECTF Heart,这是由于约简后属性数目变少,可用信息减少所致;但属性数目的减少,使得数据集的测试代价均有大幅下降,因此决策的总代价降低。

根据式(22) — 式(24),图 3 给出了 R-S3WD 方法相对于 NR-S3WD 方法的决策代价变化率 (DCR)、测试代价变化率

(TCR) 以及总代价变化率 (SCR)。从图 3 中可以更直观地看出,大部分数据集的决策总代价均有所下降。虽然对于分布较为不平衡的数据集 Chess 和 SPECTF Heart 的总代价稍有提高,但其余数据集的决策总代价均有所降低,其中数据集 Wdbc 和 Soybean 的总代价分别降低了 85% 和 67% 左右,降低幅度较大。因此,总体来说,本文方法可以有效地降低平衡数据的决策总代价。

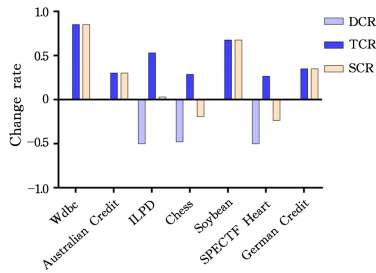


图3 代价变化率的比较

Fig. 3 Comparison of cost change rate

4.4 准确度评估

图4给出了7个UCI数据集分别利用NR-S3WD和R-S3WD方法进行决策后的准确度(CR)比较。

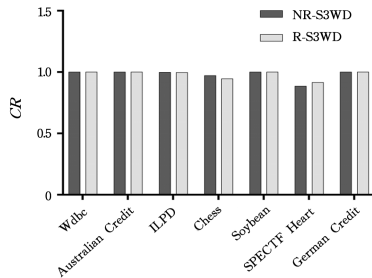


图4 准确度的比较

Fig. 4 Comparison of CR

从图4可以看出,大部分数据集的分类准确度较高且保持不变,这是由于R-S3WD方法去除冗余属性对决策准确度的影响不明显;在同时去除不相关属性时,准确度会有所提高,例如数据集SPECTF;但也有个别数据集的准确度稍有下降,如数据集Chess。总体而言,R-S3WD方法可以保证决策的准确度较高,同时能降低决策总代价。

结束语 本文提出的R-S3WD方法在多层次序贯三支决策模型的基础上,结合了基于代价最小准则的属性约简,相比NR-S3WD方法,在确保准确度较高的前提下,大大降低了决策的总代价,7个数据集平均降低了26%左右;同时,将属性的测试代价与其分类能力相关联,比人为给定测试代价的值更符合实际;此外,本文方法适用于多分类问题,应用范围更加广泛。尽管部分数据集的决策代价有小幅提高,但测试代价降幅较大,因此最终总代价仍然是降低的。以稍微增加决策代价来换取测试代价的下降在现实生活中具有实际意义。在7个UCI数据集上的实验结果显示,采用R-S3WD方法进行决策可以大幅降低决策的总代价,充分验证了本文方法的有效性。

本文通过线性方法来结合决策代价以及测试代价,今后需进一步考虑更复杂的结合两种代价的方法。

参考文献

[1] LI H X, ZHOU X Z, HUANG B, et al. Cost-sensitive three-way decision: a sequential strategy[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2013: 325-337.

[2] ZHANG Y P, ZOU H J, CHEN X, et al. Cost-sensitive three-way decisions model based on CCA[C]// International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Switzer-

land: Springer, 2014, 8536: 172-180.

[3] JIAO X Y, TANG Z M, LIAO W H, et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences, 2013, 219(1): 151-167.

[4] YANG X B, QI Y S, SONG X N, et al. Test cost sensitive multi-granulation rough set: model and minimal cost selection[J]. Information Sciences, 2013, 250(11): 184-199.

[5] LI H X, ZHOU X Z, ZHAO J B, et al. Cost-sensitive classification based on decision-theoretic rough set model[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer-Verlag, 2012: 379-388.

[6] JU H R, LI H X, YANG X B, et al. Cost-sensitive rough set: a multi-granulation approach [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 123(9): 137-153.

[7] DOU H L, YANG X B, SONG X N, et al. Decision-theoretic rough set: a multicost strategy[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91(1): 71-83.

[8] JU H R, YANG X B, YU H L, et al. Cost-sensitive rough set approach[J]. Information Sciences, 2016, 355-356(C): 282-298.

[9] MIN F, LIU Q H. A hierarchical model for test-cost-sensitive decision systems[J]. Information Sciences, 2009, 179(14): 2442-2452.

[10] YAO Y Y, WONG S K M, LINGRAS P. A decision-theoretic rough set model[C]// Proceedings of ISMIS. 1990: 17-25.

[11] YAO Y Y, WONG S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1992, 37(6): 793-809.

[12] YAO Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.

[13] JIA X Y, LIAO W H, TANG Z M, et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences, 2013, 219(1): 151-167.

[14] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]// International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Springer, 2012: 1-17.

[15] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[16] YAO Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.

[17] YAO Y Y. Probabilistic approaches to rough sets[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 287-297.

[18] YAO Y Y. Three-way decision: an interpretation of rules in rough set theory[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer-Verlag, 2009: 642-649.

[19] YAO Y Y, DENG X F. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[20] YAO Y Y. Granular computing and sequential three-way decisions[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2013, 8171: 16-27.

[21] 刘盾, 李天瑞, 苗夺谦, 等. 三支决策与粒计算[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 43-47.

[22] YANG X B, LI T R, FUJITA H, et al. A unified model of sequential three-way decisions and multilevel incremental processing[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 134(20): 172-188.