第45卷 第10期
2018年10月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol.45 No.10
Oct.2018

# 决策形式背景三支粒约简

林 洪 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

**摘 要** 针对决策形式背景,文中研究了基于对象导出三支概念格的粒约简问题。首先提出了三支粒协调决策形式背景的概念以及三支粒协调集的概念,以此为基础给出了三支粒协调集的判定定理。然后结合区分矩阵和区分函数给出了三支粒约简方法,并通过实例说明了提出的约简方法的有效性。最后讨论了决策形式背景下三支粒约简、粒约简、分类约简之间的关系。

**关键词** 决策形式背景,粒约简,三支粒约简

**中图法分类号** TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.009

## Three-way Granular Reduction for Decision Formal Context

LIN Hong QIN Ke-yun

(College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China)

**Abstract** This paper studied the three-way granular reduction in decision formal context. The concepts of three-way granular consistent formal decision context and three-way granular consistent set were put forward. The judgment theorem for consistent set was examined. Based on discernibility matrix and discernibility function,the reduction method and an illustrative example were presented. At last,the relationships among three-way granular reduction,granular reduction and classification reduction were examined.

**Keywords** Decision formal context,Granular reduction,Three way granular reduction

形式概念分析(FCA),也称概念格理论,是由 Wille[1] 于1982年提出的。形式概念分析基于形式背景展开讨论,形式背景可表示为布尔型二维数据表,其中行表示对象,列表示属性。根据对象与属性之间的关系可以建立一种概念层次结构,用于概念表示、概念排序及概念推理。概念格理论是一种有效的数据分析工具,在诸多领域得到了广泛应用。

形式背景的属性约简理论和方法作为 FCA 的热门研究内容被学术界广泛关注。通过属性约简可以获得更简洁的知识,并揭示属性之间的依赖关系。Zhang 等[2] 讨论了概念格属性约简问题,给出了协调集的判定定理,并通过辨识函数给出了概念格属性约简方法。Liu 等[3] 借助粗糙集理论中的近似算子对形式背景中的对象及属性进行刻画,给出了形式背景中的属性及对象约简方法,并讨论了形式背景基于概念格的约简与信息系统基于粗糙集理论的约简之间的关系。Wu 等[4] 将粒计算方法应用于形式概念分析,讨论了形式背景中的粒结构,提出了粒协调集与粒约简的概念,并给出了粒约简方法,该方法无需构造概念格且直接通过对象的区分属性获得约简。Shao 等[5] 针对模糊形式背景提出了属性和对象约简的方法。李金海等[6] 提出了概念格外延信息量的概念,给出了信息量计算方法,并进一步提出了一种启发式属性约简计算方法。Wei 等[7] 从决策规则的角度提出了决策形式背景的强协调性与弱协调性概念,对于强协调决策形式背景,给出了协调集的判定定理及约简方法;对于弱协调决策形式背景,通过蕴含映射给出了约简计算方法。Wu 等[4] 提出了粒协调决策形式背景的概念,并通过对象的区分属性矩阵给出了粒协调决策形式背景的约简方法。Li 等[8-11] 基于决策规则的约简问题对决策形式背景进行了系统研究,提出了决策规则之间的蕴涵关系、冗余决策规则、必要决策规则等概念,给出了冗余决策规则及必要决策规则的等价描述,借助区分属性给出了决策形式背景保持决策规则的约简方法。Shao 等[12] 借助决策属性建立了概念之间的等价关系,给出了概念的压缩方法以及决策规则获取方法。李进金等[13] 通过引入交可约元提出了一种形式背景属性约简方法,给出了一种概念格生成算法。三支决策是 Yao 于2009年提出的以“三分而治”为主要思想的一种有效决策理论[14-16],其根据对象特性将所有对象分为3个不相交的区域,并对这3个区域的对象分别采取适当的策略进行处理。Qi 等[17] 于2014年将三支决策理论应用于形式概念分析,在形式背景中提出了三支形式概念,建立了三支概念格。近几年,三支决策思想受到了广泛关注,同时,三支决策思想在信息系统中扮演着重要角色,并应用于计算机科学、信息科学、社会科学等多个领域。由于三支决策和形式概念的广泛应用,三支形式概念分析成为了知识发现和数据分析的重要工具。Ren 等[18] 研究了形式背景基于三支概念格的属性约简问题,分别提出了基于属性与基于对象的

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-18 本文受国家自然科学基金项目(61473239,61372187)资助。

林 洪(1993-),女,硕士生,主要研究方向为概念格理论;秦克云(1962-),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail:keyunqin@263.net(通信作者)。

4 种约简概念,给出了约简计算方法。刘琳等[19]给出了决策形式背景在属性导出三支概念格下的规则提取问题。

决策形式背景的约简理论与方法是相关领域的热门研究问题。本文针对决策形式背景,提出了三支粒协调集的概念,并给出了三支粒约简方法,进而研究了三支粒约简、粒约简、分类约简之间的关系。

## 1 预备知识

形式概念分析基于形式背景展开讨论。一个形式背景为一个三元组$(G,M,I)$,其中 $G$ 为所讨论的对象构成的集合,$M$ 为 $G$ 中对象所具有的属性构成的集合,$I$ 是 $G$ 中对象和 $M$ 中属性之间的二元关系,即 $I\subseteq G\times M$。对于 $\forall g\in G,m\in M$,若 $(g,m)\in I$,则表示对象 $g$ 具有属性 $m$;若$(g,m)\notin I$,则表示对象 $g$ 不具有属性 $m$。为刻画形式概念,Wille[1]引入了如下的算子:对于 $\forall A\subseteq G,B\subseteq M$,有:

$$A^{*}=\{m\in M;\forall a\in A((a,m)\in I)\} \tag{1}$$

$$B^{*}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\in I)\} \tag{2}$$

即 $A^{*}$ 为 $A$ 中对象所具有的公共属性构成的集合,$B^{*}$ 为具有 $B$ 中所有属性的对象构成的集合。对于 $\forall g\in G,m\in M$,记 $\{g\}^{*}=g^{*}$,$\{m\}^{*}=m^{*}$。

**定义 1**[1] 设$(G,M,I)$为形式背景,$X\subseteq G,A\subseteq M$。如果 $X^{*}=A$ 且 $A^{*}=X$,则称$(X,A)$为概念。其中 $X,A$ 分别称为$(X,A)$的外延与内涵。

设$(G,M,I)$为形式背景。令 $L(G,M,I)=\{(X,A);X^{*}=A$ 且 $A^{*}=X\}$。对于$\forall(X_1,A_1),(X_2,A_2)\in L(G,M,I)$,定义它们之间的序关系为:$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)$,当且仅当$X_1\subseteq X_2$ 或等价地 $A_2\subseteq A_1$。

**定理 1**[1] 设$(G,M,I)$为形式背景。$L(G,M,I)$关于$\leqslant$构成完备格,该完备格被称为概念格,其中对于$(X_j,Y_j)\in L(G,M,I)$,$j\in J$($J$ 为指标集),有:

$$\bigwedge_{j\in J}(X_j,Y_j)=(\bigcap_{j\in J}X_j,(\bigcup_{j\in J}Y_j)^{**}) \tag{3}$$

$$\bigvee_{j\in J}(X_j,Y_j)=((\bigcup_{j\in J}X_j)^{**},\bigcap_{j\in J}Y_j) \tag{4}$$

由此定理可知,所有形式概念具有格结构,反映了形式概念之间的特化与泛化关系。

在形式背景$(G,M,I)$中,如果对于$\forall g\in G,m\in M$,有 $g^{*}\neq\emptyset,g^{*}\neq M,m^{*}\neq\emptyset,m^{*}\neq G$,则称$(G,M,I)$为正则形式背景[2]。假设以下所讨论的形式背景都是正则形式背景。

在形式背景$(G,M,I)$中,$\forall D\subseteq M$,令 $I_D=I\cap(G\times D)$,则$(G,D,I_D)$也是一个形式背景,被称为$(G,M,I)$的一个子形式背景。为避免混淆,$(G,D,I_D)$中由式(1)和式(2)定义的算子记为 $*_D$,显然对于 $\forall A\subseteq G,B\subseteq D$,有 $A^{*_D}=A^{*}\cap D$,$B^{*_D}=B^{*}$。

设$(G,M,I)$,$(G,T,J)$是具有相同对象集的形式背景,如果 $M\cap T=\emptyset$,其中 $M,T$ 的属性分别为条件属性与决策属性,则称 $S=(G,M,I,T,J)$为决策形式背景[20]。

设 $S=(G,M,I,T,J)$为决策形式背景。称 $S$ 为粒协调决策形式背景[4],如果对于$\forall x\in G$,有 $x^{*_M*_M}\subseteq x^{*_T*_T}$。

**定义 2**[4] 设 $S=(G,M,I,T,J)$为粒协调决策形式背景,$E\subseteq M$。若对于$\forall x\in G$,有 $x^{*_E*_E}\subseteq x^{*_T*_T}$,则称 $E$ 为 $S$ 的粒协调集。$S$ 的极小粒协调集称为 $S$ 的粒约简。

在形式背景$(G,M,I)$中,对于$\forall x\in G,a\in M$,若$(x,a)\in I$,则令 $x_a^{*}=\{a\}$;否则令 $x_a^{*}=\emptyset$。若 $B\subseteq M$,则记 $R_B^{*}=\{(x,y)\in G\times G:x_a^{*}\subseteq y_a^{*},\forall a\in B\}$,对于$\forall a\in B$,将 $R_{\{a\}}^{*}$ 简记为 $R_a^{*}$,则 $R_B^{*}=\bigcap_{a\in B}R_a^{*}$。

Qi 等[17]于 2014 年将三支决策理论应用于形式概念分析,提出了三支形式概念,建立了三支概念格。为刻画三支形式概念,引入如下算子:在形式背景$(G,M,I)$中,对于$\forall X\subseteq G,B\subseteq M$,有:

$$X^{\bar{*}}=\{m\in M;\forall x\in X((x,m)\notin I)\} \tag{5}$$

$$B^{\bar{*}}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\notin I)\} \tag{6}$$

即 $X^{\bar{*}}$ 为 $X$ 中对象所不具有的公共属性的集合,$B^{\bar{*}}$ 为不具有 $B$ 中所有属性的对象构成的集合。进一步地,对于$\forall X\subseteq G$,$A,B\subseteq M$,记:

$$X^{\lessdot}=(X^{*},X^{\bar{*}}) \tag{7}$$

$$(A,B)^{\gtrdot}=\{x\in G;x\in A^{*}\wedge x\in B^{\bar{*}}\}=A^{*}\cap B^{\bar{*}} \tag{8}$$

根据以上算子,Qi 等[17]给出了对象导出三支概念格的定义。

**定义 3**[17] 设$(G,M,I)$为形式背景,$X\subseteq G$ 且 $A,B\subseteq M$。若 $X^{\lessdot}=(A,B)$且$(A,B)^{\gtrdot}=X$,则称$(X,(A,B))$为一个对象导出三支概念,以下简记为 $OE$ 概念。其中 $X$ 称为$(X,(A,B))$的外延,$(A,B)$称为$(X,(A,B))$的内涵。

设$(G,M,I)$为形式背景,由该形式背景中所有 $OE$ 概念构成的集合记为 $OEL(G,M,I)$。对于$\forall(X,(A,B)),(Y,(C,D))\in OEL(G,M,I)$,定义它们之间的序关系为:$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))$当且仅当 $X\subseteq Y$ 或等价地$(C,D)\subseteq(A,B)$。其中,$(C,D)\subseteq(A,B)$,即 $C\subseteq A,D\subseteq B$。

$OEL(G,M,I)$按照此序关系构成格,该格被称为对象导出三支概念格,以下简记为 $OE$ 概念格,其上确界与下确界分别为:

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))=(X\cap Y,((A,B)\cup(C,D))^{\gtrdot\lessdot}) \tag{9}$$

$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))=((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(A,B)\cap(C,D)) \tag{10}$$

对于$\forall x\in G$,以下将$\{x\}^{\lessdot}$ 简记为 $x^{\lessdot}$。显然$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})=(x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}},(x^{*},x^{\bar{*}}))\in OEL(G,M,I)$为形式概念,且由 $x$ 完全确定,称为三支对象概念。对于 $E\subseteq M$,在形式背景$(G,E,I_E)$下,由式(7)和式(8)定义的算子记为$\lessdot_E$,$\gtrdot_E$。

## 2 决策形式背景基于三支粒约简

Wu 等[4]将粒计算方法应用于形式概念分析,提出了粒协调决策形式背景的概念和粒约简理论。基于该理论,本节进一步讨论决策形式背景三支粒约简理论。

**定义 4** 设 $S=(G,M,I,T,J)$为决策形式背景,$\forall x\in G$。若 $x^{*_M*_M}\cap x^{\bar{*}_M\bar{*}_M}\subseteq x^{*_T*_T}\cap x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$成立,则称 $S$ 为三支粒协调决策形式背景。

对于$\forall OE$ 概念$(X,(A,B))\in OEL(G,M,I)$,由 $\bigcap_{x\in X}x^{\lessdot}=X^{\lessdot}=(A,B)$可得 $\bigvee_{x\in X}(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})=(X,(A,B))$,即所有 $OE$ 概念可以表示成若干三支对象概念之并。因此,三支对象概念$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})$是 $OEL(G,M,I)$中的基本概念,可以看作 $OEL(G,M,I)$中的信息粒。因为 $OE$ 概念中的外延与内涵是可以

相互确定的，所以可将$\{x^{\lessdot\gtrdot} \mid x\in G\}$看作 $OEL(G,M,I)$中的信息粒。对于三支粒协调决策形式背景，$x^{\lessdot_M \gtrdot_M}\subseteq x^{\lessdot_T \gtrdot_T}$意味着条件属性决定的信息粒比决策属性决定的信息粒更精细。

**定义 5**　设 $S=(G,M,I,T,J)$为三支粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$。$\forall x\in G$，若 $x^{*_E *_E}\cap x^{\bar{*}_E \bar{*}_E}\subseteq x^{*_T *_T}\cap x^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$，即 $x^{\lessdot_E \gtrdot_E}\subseteq x^{\lessdot_T \gtrdot_T}$成立，则称 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集。$S$ 的极小三支粒协调集称为 $S$ 的三支粒约简。

按照定义 5，三支粒协调决策形式背景$(G,M,I,T,J)$的三支粒约简是使得$(G,E,I_E,T,J)$仍然为三支粒协调决策形式背景的极小属性集 $E$。

设 $S=(G,M,I,T,J)$为三支粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$，$x,y\in G$。记：

$$R_T^{*}=\{(x,y):x_t^{*}\subseteq y_t^{*},\forall t\in T\}=\{(x,y):x_T^{*}\subseteq y_T^{*}\}$$

$$R_T^{\bar{*}}=\{(x,y):x_t^{\bar{*}}\subseteq y_t^{\bar{*}},\forall t\in T\}=\{(x,y):x_T^{\bar{*}}\subseteq y_T^{\bar{*}}\}$$

进而可以记：

$$x^{*_E *_E}=\{y\in G:(x,y)\in R_E^{*}\},x^{\bar{*}_E \bar{*}_E}=\{y\in G:(x,y)\in R_E^{\bar{*}}\}$$

$$x^{*_T *_T}=\{y\in G:(x,y)\in R_T^{*}\},x^{\bar{*}_T \bar{*}_T}=\{y\in G:(x,y)\in R_T^{\bar{*}}\}$$

则易证 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集的充分必要条件为：$R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}\subseteq R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$。

**定义 6**　设 $S=(G,M,I,T,J)$为三支粒协调决策形式背景，对于$\forall (x,y)\in G\times G$，令 $\psi(x,y)$表示条件 $x^{*_T}\not\subset y^{*_T}$ 或 $x^{\bar{*}_T}\not\subset y^{\bar{*}_T}$，且

$$OED(x,y)=\begin{cases}\{a\in M:x_a^{*}\not\subset y_a^{*}\text{ 或 }x_a^{\bar{*}}\not\subset y_a^{\bar{*}}\}, & \\ & \psi(x,y)\text{成立}\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 $OED(x,y)$为 $x$ 和 $y$ 的三支粒协调区分属性集。称 $\Lambda_{OED}=\{OED(x,y),(x,y)\in G\times G\}$为三支粒协调决策形式背景的区分矩阵。

**定理 2**(协调性判定定理)　设 $S=(G,M,I,T,J)$为三支粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$。则 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集的充分必要条件为：若 $OED(x,y)\neq\emptyset$，则 $E\cap OED(x,y)\neq\emptyset$。

证明：(必要性)设 $E$ 为三支粒协调集，由定义 5 得 $x^{*_E *_E}\cap x^{\bar{*}_E \bar{*}_E}\subseteq x^{*_T *_T}\cap x^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$，即 $R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}\subseteq R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$。若 $OED(x,y)\neq\emptyset$，则 $x^{*_T}\not\subset y^{*_T}$或 $x^{\bar{*}_T}\not\subset y^{\bar{*}_T}$，即$(x,y)\notin R_T^{*}$ 或$(x,y)\notin R_T^{\bar{*}}$，因此有$(x,y)\notin R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$。又因为 $R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}\subseteq R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$，所以$(x,y)\notin R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}$。若$(x,y)\notin R_E^{*}$，则存在元素 $e\in E$ 使得$(x,y)\notin R_e^{*}$，即 $x_e^{*}\not\subset y_e^{*}$，因此有 $e\in OED(x,y)$；若$(x,y)\notin R_E^{\bar{*}}$，则存在元素 $e'\in E$ 使得$(x,y)\notin R_{e'}^{*}$，即 $x_{e'}^{*}\not\subset y_{e'}^{*}$，因此有 $e'\in OED(x,y)$。综上可得，$E\cap OED(x,y)\neq\emptyset$。

(充分性)对于$\forall (x,y)\in G\times G$，设$(x,y)\notin R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$。由于 $S$ 为三支粒协调决策形式背景，因此 $R_M^{*}\cap R_M^{\bar{*}}\subseteq R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$，故$(x,y)\notin R_M^{*}\cap R_M^{\bar{*}}$。若$(x,y)\notin R_M^{*}$，则存在元素 $m\in M$ 使得$(x,y)\notin R_m^{*}$，即 $x_m^{*}\not\subset y_m^{*}$；若$(x,y)\notin R_M^{\bar{*}}$，则存在元素 $m'\in M$ 使得$(x,y)\notin R_{m'}^{*}$，即 $x_{m'}^{*}\not\subset y_{m'}^{*}$。因此，$OED(x,y)\neq\emptyset$。若 $E\cap OED(x,y)\neq\emptyset$，则存在元素 $a\in E\cap OED(x,y)$。由定义 6 可知 $x_e^{*}\not\subset y_e^{*}$ 或 $x_e^{\bar{*}}\not\subset y_e^{\bar{*}}$，即$(x,y)\notin R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}$。因此 $R_E^{*}\cap R_E^{\bar{*}}\subseteq R_T^{*}\cap R_T^{\bar{*}}$，即 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集。

**定义 7**　设 $S=(G,M,I,T,J)$为三支粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$。$\Lambda_{OED}$为 $S$ 的区分矩阵，称 $oef=\wedge\vee(\Lambda_{OED}(x,y))$为 $S$ 的区分函数，其中 $OED(x,y)\neq\emptyset$。

通过使用吸收率和分配律，可以将辨识函数 $oef$ 变换为极小的析取范式，极小析取范式的所有合取子式是决策形式背景的全部约简。

例 1　参考文献[4]给出的决策形式背景 $S=(G,M,I,T,J)$。其中，$G=\{1,2,3,4,5\}$，$M=\{a,b,c,d,e\}$，$T=\{f,g,h\}$，如表 1 所列。

表 1　决策形式背景$(G,M,I,T,J)$

Table 1　Decision formal contexts $(G,M,I,T,J)$

| $G$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

由于 $x_a^{*}=\begin{cases}\{a\}, & (x,a)\in I\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$，$x_a^{\bar{*}}=\begin{cases}\{a\}, & (x,a)\notin I\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$，则可以得到：

$$1^{*_M *_M}\cap 1^{\bar{*}_M \bar{*}_M}=\{1\}\subseteq\{1,4\}=1^{*_T *_T}\cap 1^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$$

$$2^{*_M *_M}\cap 2^{\bar{*}_M \bar{*}_M}=\{2\}=2^{*_T *_T}\cap 2^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$$

$$3^{*_M *_M}\cap 3^{\bar{*}_M \bar{*}_M}=\{3\}\subseteq\{3,5\}=3^{*_T *_T}\cap 3^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$$

$$4^{*_M *_M}\cap 4^{\bar{*}_M \bar{*}_M}=\{4\}\subseteq\{1,4\}=4^{*_T *_T}\cap 4^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$$

$$5^{*_M *_M}\cap 5^{\bar{*}_M \bar{*}_M}=\{5\}\subseteq\{3,5\}=5^{*_T *_T}\cap 5^{\bar{*}_T \bar{*}_T}$$

因此，由定义 4 可知 $S$ 为三支粒协调决策形式背景。

由定义 6 可计算得到 $S$ 的三支粒协调区分矩阵，如表 2 所列。

表 2　三支粒协调区分矩阵

Table 2　Discernibility matrix of three-way granular consistent

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $abcde$ | $ade$ | | $abde$ |
| 2 | $abcde$ | | $c$ | $abde$ | |
| 3 | $ade$ | $c$ | | $acde$ | |
| 4 | | $abde$ | $acde$ | | $abcde$ |
| 5 | $abde$ | $c$ | | $abcde$ | |

由区分矩阵可以得到三支粒协调决策形式背景的三支粒约简，该决策形式背景的区分函数为：

$$\begin{aligned}oef&=(a\vee b\vee c\vee d\vee e)\wedge(a\vee d\vee e)\wedge(a\vee b\vee d\vee e)\wedge\\&\quad(a\vee c\vee d\vee e)\wedge c\\&=c\wedge(a\vee d\vee e)\\&=(c\wedge a)\vee(c\wedge d)\vee(c\wedge e)\end{aligned}$$

因此决策形式背景的三支粒可约简为$\{c,a\}$，$\{c,d\}$和$\{c,e\}$，其中核心属性为$\{c\}$。

## 3　三支粒约简、粒约简、分类约简之间的关系

由定义 2 可知，若 $E$ 为粒协调决策形式背景 $S$ 的协调

集，则 $S'=(G,E,I_E,T,J)$ 仍为粒协调决策形式背景。粒协调决策形式背景 $(G,M,I,T,J)$ 的约简使得 $(G,E,I_E,T,J)$ 仍然为粒协调决策形式背景的极小属性集 $E$。

粒协调决策形式背景的粒约简和三支粒约简计算方法均无需构造概念格，可直接通过对象的区分属性获得约简，计算简便易行。粒协调决策形式背景的粒约简和三支粒约简之间的关系如下。

**定理 3** 设 $S=(G,M,I,T,J)$ 为粒协调决策形式背景，则有：

(1) $S$ 为三支粒协调决策形式背景；

(2) 若 $E\subseteq M$ 为 $S$ 的粒协调集，则 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集。

证明：(1) 对于 $\forall x\in G$，由于 $S$ 为粒协调决策形式背景，因此有 $x^{**}\subseteq x^{*_T*_T}$。对于 $\forall y\in x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$，有 $y\in x^{**}\subseteq x^{*_T*_T}$。另 $y\in x^{\bar{*}\bar{*}}$，有 $y^{\bar{*}}\subseteq x^{\bar{*}}$ 等价于 $x^{*}\subseteq y^{*}$。即 $x\in y^{**}\subseteq y^{*_T*_T}$，则 $y^{*_T}\subseteq x^{*_T}$ 等价于 $x^{\bar{*}_T}\subseteq y^{\bar{*}_T}$，即 $y\in x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$。综上可知，$y\in x^{*_T*_T}\cap x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$，因此 $x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}\subseteq x^{*_T*_T}\cap x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$，即 $S$ 为三支粒协调决策形式背景。

(2) 假设 $E$ 为 $S$ 的粒协调集，由定义 2 可得 $S'=(G,E,I_E,T,J)$ 仍为粒协调决策形式背景。于是由式(1)可知，$S'=(G,E,I_E,T,J)$ 为三支粒协调决策形式背景，从而 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集。

**推论 1** 设 $S=(G,M,I,T,J)$ 为粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$。如果 $E$ 为 $S$ 的粒约简，那么存在 $E'\subseteq E$ 使得 $E'$ 为 $S$ 的三支粒约简。

决策形式背景 $(G,M,I,T,J)$ 为二值决策表。按照粗糙集的观点，$M$ 的每个子集 $E$ 确定对象集合上的一个不可区分关系 $R_E$。对于 $\forall x,y\in G$，$(x,y)\in R_E$ 当且仅当对于 $\forall a\in E$，有 $(x,a)\in I$ 且 $(y,a)\in I$，或 $(x,a)\notin I$ 且 $(y,a)\notin I$。显然，借助概念格中的算子，不可区分关系可以描述为：$(x,y)\in R_E$ 当且仅当 $x^{*_E}=y^{*_E}$。在决策表 $(G,M,I,T,J)$ 中，若 $R_M\subseteq R_T$，则称 $(G,M,I,T,J)$ 为协调决策表。

在协调决策表 $(G,M,I,T,J)$ 中，如果 $E\subseteq M$ 产生的分类包含于 $T$ 产生的分类，即 $R_E\subseteq R_T$，则称 $E$ 为 $S$ 的分类协调集。$S$ 的极小分类协调集称为 $S$ 的分类约简。

**定理 4** 设 $S=(G,M,I,T,J)$ 为三支粒协调决策形式背景，则有：

(1) $S$ 为协调决策表。

(2) 若 $E\subseteq M$，则 $E$ 为 $S$ 的三支粒协调集当且仅当 $E$ 为 $S$ 的分类协调集。

证明：(1) 对于 $\forall (x,y)\in R_M$，有 $x^{*_M}=y^{*_M}$，从而有 $x^{\bar{*}_M}=y^{\bar{*}_M}$，$y\in x^{*_M*_M}\cap x^{\bar{*}_M\bar{*}_M}\subseteq x^{*_T*_T}\cap x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$。由 $y\in x^{*_T*_T}$ 可得 $x^{*_T}\subseteq y^{*_T}$；由 $y\in x^{\bar{*}_T\bar{*}_T}$ 可得 $x^{\bar{*}_T}\subseteq y^{\bar{*}_T}$。于是有 $x^{*_T}=y^{*_T}$，即 $(x,y)\in R_T$。故 $R_M\subseteq R_T$，即 $S$ 为协调决策表。

(2) 由(1)可得。

**推论 2** 设 $S=(G,M,I,T,J)$ 为粒协调决策形式背景，$E\subseteq M$。$E$ 为 $S$ 的三支粒约简当且仅当 $E$ 为 $S$ 的分类约简。

**结束语** 决策形式背景属性约简理论和方法是形式概念分析的重要研究内容。本文针对决策形式背景讨论了基于三支粒约简的理论和方法，给出了三支粒协调决策形式背景和三支粒协调集的概念，借助区分矩阵与区分函数给出了基于三支粒协调的属性约简方法，说明了粒协调决策形式背景下粒约简标准强于三支粒约简标准。我们将另文讨论决策形式背景三支规则约简、三支粒约简与三支协调约简之间的关系。

## 参 考 文 献


[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[J]. Ordered Sets Reidel, 1982, 83: 314-339.

[2] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice[J]. Science China Information Sciences, 2005, 48(6): 713-726.

[3] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.

[4] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 20(10): 1461-1474.

[5] SHAO M W, YANG H Z, WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73: 265-275.

[6] LI J H, LV Y J, LIANG B M. Algorithm for attribute reduction based on information quantity of concept lattice extension[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(10): 144-146. (in Chinese)
李金海，吕跃进，梁斌梅. 基于概念格外延信息量的属性约简算法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(10)：144-146.

[7] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science China Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.

[8] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.

[9] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189(7): 191-207.

[10] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.

[11] LI J H, LV Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(7): 182-188. (in Chinese)
李金海，吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识，2009，39(7)：182-188.

[12] SHAO M W, LEUNG Y, WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 259-274.

[13] LI J J, ZHANG Y L, WU W Z, et al. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation[J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 37(8): 1768-1774. (in Chinese)
李进金，张燕兰，吴伟志，等. 形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成[J]. 计算机学报，2014，37(8)：1768-1774.


（下转第 68 页）

通过对系统固有性能的影响和抵抗 3 种调制识别算法的仿真分析，表明所提算法能够在不影响系统固有性能的前提下实现对物理层调制方式信息的保护。

**结束语** 本文从物理层安全的角度，提出了一种基于无线 OFDM 系统的调制方式保护算法。通过将对角密钥矩阵与 IFFT 后的符号相乘，进一步对数据信息完成了扰乱和加密，使得物理层调制信息得到保护，同时也保证了数据信息的安全。仿真结果表明，应用所提算法前后系统的误码率和峰均比并无较大变化。采用基于瞬时特征、高阶统计量以及星座图重构的调制识别方法得到了系统加密前后的识别结果，算法加密后，3 种调制识别方法的识别率均明显下降，这表明所提算法具有不错的抵抗调制识别性能。未来可以对更多的调制识别方法进行研究，构建出抵抗调制识别性能更加优异和全面的安全算法。

## 参 考 文 献


[1] BARENGHI A，BREVEGLIERI L，KOREN I，et al. Fault Injection Attacks on Cryptographic Devices：Theory，Practice，and Countermeasures[J]. Proceeding of The IEEE，2012，100(11)：3056-3076.

[2] MU P C，YIN Q Y，WANG W J. A Security Method of Physical Layer Transmission Using Random Antenna Arrays in Wireless Communication[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University，2010，44(6)：62-66.(in Chinese)
穆鹏程，殷勤业，王文杰. 无线通信中使用随机天线阵列的物理层安全传输方法[J]. 西安交通大学学报，2010，44(6)：62-66.

[3] LIN T，HUANG K Z，LUO W Y. A Multicarrier-based Physical Layer Security Scheme for the Multicast Systems[J]. Journal of Electronics and Information Technology，2013，35(6)：1388-1343.(in Chinese)
林通，黄开枝，罗文宇. 一种基于多载波的多播系统物理层安全方案[J]. 电子与信息学报，2013，35(6)：1338-1343.

[4] LI M L，HUANG K Z，ZHONG Z. Physical-layer Security Algorithm Based on Joint Scrambling with Spatial and Frequency Resource[J]. Journal of Electronics and Information Technology，2013，35(12)：2966-2971.(in Chinese)
李明亮，黄开枝，钟州. 基于空频联合加扰的物理层安全算法[J]. 电子与信息学报，2013，35(12)：2966-2971.

[5] LIU Y，WANG G P，XIAO M，et al. Spectrum Sensing and Throughput Analysis for Cognitive Two-Way Relay Networks with Multiple Transmit Powers[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications，2016，34(11)：3038-3047.

[6] JIANG H Q，TANG P Z，GUAN W S. Research on Signal Modulation Recognition Technology Based on PDW[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology，2013，33(11)：1183-1188.(in Chinese)
江海清，唐浦钊，关文硕. 基于脉冲描述字的信号调制识别技术研究[J]. 北京理工大学学报，2013，33(11)：1183-1188.

[7] ALI A，FAN Y，SHU L. Automatic Modulation Classification of Digital Modulation Signals with Stacked Autoencoders[J]. Digital Signal Processing，2017，71：108-116.

[8] MAREY M，DOBRE O A，INKOL R. Blind STBC Identification for Multiple-Antenna OFDM Systems[J]. IEEE Transactions on Communications，2014，62(5)：1554-1567.

[9] CHORTI A. Masked OFDM：A Physical Layer Encryption for Future OFDM Applications[C]//IEEE Globecom Workshop on Mobile Computing and Emerging Communication Networks. 2010：1254-1258.

[10] GAO B J，WANG Y J，LUO Y L，et al. A Hiding Algorithm for OFDM Constellation Mapping Based on Physical Layer Encryption[J]. Journal of Applied Sciences，2013，13(18)：3790-3797.

[11] LIU B，ZHANG L，XIN X，et al. Constellation-masked Secure Communication Technique for OFDM-PON[J]. Optics Express，2012，20(22)：25161.

[12] BASAR B. On Multiple-Input Multiple-Output OFDM with Index Modulation for Next Generation Wireless Networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2016，64(15)：3868-3878.

[13] ZHENG B，CHEN F，WEN M，et al. Low-Complexity ML Detector and Performance Analysis for OFDM With In-Phase/Quadrature Index Modulation[J]. IEEE Communications Letters，2015，19(11)：1893-1896.

[14] YOU L，GAO X，SWINDLEHURST A L，et al. Low-Complexity ML Detector and Performance Analysis for OFDM With In-Phase/Quadrature Index Modulation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2016，64(6)：1461-1476.

[15] GORCIN A，ARSLAN H. An OFDM Signal Identification Method for Wireless Communications Systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology，2015，64(12)：5688-5700.


(上接第 50 页)


[14] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation，2016，8(4)：543-554.

[15] YAO Y Y. Three-Way Decision：An Interpretation of Rules in Rough Set Theory[C]//RSKT. 2009：642-649.

[16] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences，2010，180(3)：341-353.

[17] QI J J，WEI L，YAO Y Y. Three-way formal concept analysis[C]//Rough sets and Knowledge Technology. Springer，Heidelberg，2014：732-741.

[18] REN R，WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems，2016，99(C)：92-102.

[19] LIU L，QIAN T，WEI L. Rules extraction in formal decision contexts based on attributes-Induced three-way concept lattices[J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition)，2016，46(4)：481-487.(in Chinese)
刘琳，钱婷，魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取[J]. 西北大学学报(自然科学版)，2016，46(4)：481-487.

[20] WEI L，QI J J，ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China E：Information Sciences，2008，38(2)：195-208.(in Chinese)
魏玲，祁建军，张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学 E 辑：信息科学，2008，38(2)：195-208.