

基于相邻矩阵快速构建虚拟主干网的近似算法

贺毅朝¹ 田海燕^{2,3} 张新禄² 高锁刚²

(石家庄经济学院信息工程学院 石家庄 050031)¹ (河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050016)²
(计算数学与应用河北省重点实验室 石家庄 050016)³

摘要 在无线 Ad-hoc 网络中,基于极小连通支配集的虚拟主干网技术对资源分配和路由优化具有重要的作用。首先证明了相邻矩阵理论的一个有关结论,然后利用此结论以及极大独立集和极小支配集的关系,提出了一种基于相邻矩阵快速构建无线 Ad-hoc 网络最小连通支配集的近似算法,并给出了算法的正确性证明、复杂性分析和近似比分析。仿真试验结果表明,利用该算法可以快速高效地构建 Ad-hoc 网络的虚拟主干网。

关键词 Ad-hoc 网络,极大独立集,相邻矩阵,贪心策略,连通支配集

中图分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Fast Approximation Algorithm Based on Adjacent Matrix for Construction Virtual Backbone

HE Yi-chao¹ TIAN Hai-yan^{2,3} ZHANG Xin-lu² GAO Suo-gang²

(School of Information Engineering, Shijiazhuang University of Economics, Shijiazhuang 050031, China)¹

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)²

(Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Application, Shijiazhuang 050016, China)³

Abstract In Ad-hoc networks, a minimum connected dominating set (MCDS) can be used as a virtual backbone to improve the performance of source allocation and prolong the system lifetime. In this paper, we firstly proved a useful theorem about adjacent matrix. Secondly, using the theorem and the relationship between maximum independent set and minimum dominating set, we proposed a fast approximation algorithm based on adjacent matrix for constructing MCDS in Ad-hoc networks. The correctness, complexity and approximation rate of the proposed algorithm were analyzed respectively. Simulation results show that new algorithm can efficiently and fast construct virtual backbone in Ad-hoc networks.

Keywords Ad-hoc networks, Maximal independent set, Adjacent matrix, Greedy strategy, Connected dominating set

在无线 Ad-hoc 网络中,广播(broadcasting)是一种常见的通信方式,一般采用泛洪(flooding)实现。这种实现方法简单实用,但是非常容易导致广播风暴问题,对于资源相对有限的 Ad-hoc 网络是极其不利的。为了避免泛洪的缺点,目前主要采用虚拟主干网技术对路由进行优化整合,以合理分配网络资源。构建 Ad-hoc 虚拟主干网问题本质上等价于求解连通图的最小连通支配集(minimum connected dominating set, MCDS)问题,因此只要研究如何有效求解连通图中的最小连通支配集即可。但是,求图的 MCDS 问题已被证明是 NPC 问题^[1],所以在实际应用中往往利用启发式策略求解近似 MCDS,例如文献[2]基于贪心策略求解近似 MCDS,文献[3]利用 Steiner 树构建近似 MCDS,文献[4]基于极大独立集给出了一种求解 MCDS 的分布式算法,文献[5]进一步讨论了具有 m -连通 k -支配的 MCDS 问题,文献[6]基于局部信息提出了一种分布式近似算法,文献[7]基于分布式 Leader

Election 算法提出了一种 3 阶段启发式算法,文献[8]通过改变极大独立集顶点的连接方式有效地改进了文献[7]中的算法,文献[9]基于 2-跳邻域信息的局部处理提出了一种多点转播(MPR)算法,文献[10]利用 3-跳邻域信息对 MPR 的局部优化提出了一种 EEMPR 算法,文献[11]则进一步提出了一种在网络节点具有不同传输半径情况下的高效近似算法。总之,求解近似 MCDS 的有效方法是构建 Ad-hoc 虚拟主干网的关键所在。本文基于极大独立集、极小支配集和相邻矩阵的有关结论,给出了一种基于相邻矩阵快速构建 Ad-hoc 虚拟主干网的近似算法。

本文第 2 节介绍了图论的相关理论,并证明了简单连通图相邻矩阵的一个实用的结论;第 3 节首先基于相邻矩阵给出了 3 个核心算法,在此基础上提出了一种快速求解连通图的 MCDS 的近似算法,证明了它的正确性,并分析了其时间复杂度与渐近近似比;第 4 节通过与已有代表性算法的仿真

到稿日期:2011-04-21 返修日期:2011-06-23 本文受国家自然科学基金(10971052),河北省教育厅青年基金(2010260),河北省科学技术研究与发展指导计划项目(07216926)资助。

贺毅朝(1969-),男,硕士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为算法理论、计算机密码学与智能计算,E-mail:heyichao@sjzue.edu.cn;田海燕(1972-),女,硕士,讲师,主要研究领域为网络优化与算法;张新禄(1968-),男,硕士,副教授,主要研究领域为网络优化与算法理论;高锁刚(1958-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为代数组合与近似算法。

实验结果对比验证了算法的有效性 with 实用性;最后总结全文并提出进一步的研究思路。

1 理论基础

设无线 Ad-hoc 网络有 n 个无线节点,每个节点发射功率的覆盖范围均为 d ,其无线节点在覆盖的范围内是连通的,则无线 Ad-hoc 网络可以看作为一个单位圆盘图^[1,5] (unit disk graph, UDG) $G=(V, E)$,并且 G 是一个无向简单连通图。为了讨论文中算法,下面首先给出图论的有关概念和理论,并证明一个关于简单图的有用结论。

设 $G=(V, E)$ 为无向标定图, G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{k-1} e_k v_k$ 称为顶点 v_0 到 v_k 的一条通路(walk),其中 v_{i-1} 与 v_i 为边 $e_i (i=1, 2, \dots, k)$ 的两个端点。称 Γ 中的边数为通路长度。如果 $v_0=v_k$, 则称 Γ 为一条回路;如果通路 Γ 中所有的顶点各异,所有的边也各异,则称 Γ 为一条路径(path)。顶点 v_i 到 v_j 的最短路径的长度称为 v_i 与 v_j 间的距离,记为 $d(v_i, v_j)$ 。

设 $G=(V, E)$ 为无向简单图, $D \subseteq V$, 如果对于任意 $(u, v) \in E$, 均有 $u \in D$ 或 $v \in D$, 则称 D 为图 G 的一个支配集(dominating set);如果 D 的任意真子集不是 G 的支配集,则称 D 为图 G 的一个极小支配集(记为 MDS)。设 $I \subseteq V$ 且 $I \neq \emptyset$, 如果 V 中顶点互不相邻,则称 I 为图 G 的一个独立集(Independent set);如果对任意 $v \in V \setminus I, I \cup \{v\}$ 不再是独立集,则称 I 为图 G 的一个极大独立集(记为 MIS)。

引理 1^[12] 如果无向图 G 没有孤立点,则 G 的极大独立集必为 G 的极小支配集。

设 $G=(V, E)$ 为无向简单图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \forall i, j=1, 2, \dots, n$, 令 $a_{ii}^{(1)}=0$, 当 $i \neq j$ 时,若 v_i 与 v_j 相邻,则令 $a_{ij}^{(1)}=1$, 否则令 $a_{ij}^{(1)}=0$, 称矩阵 $A=[a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$ 为 G 的相邻矩阵(adjacent matrix)。显然,相邻矩阵 A 是对称的。对于 $k \geq 2$, 记 $A^k=A^{k-1}A=[a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$ 为相邻矩阵 A 的 k 次幂。

引理 2^[12] 设 $G=(V, E)$ 为无向简单图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, A$ 为 G 的相邻矩阵,则 A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)} (i \neq j)$ 为 G 中顶点 v_i 到 v_j 的长度为 k 的通路数, $a_{ii}^{(k)}$ 为 G 中顶点 v_i 到 v_i 的长度为 k 的回路数。

推论 1^[12] 如果 A 为 G 的相邻矩阵,则在 A^2 中 $a_{ii}^{(2)}$ 等于顶点 v_i 的度数。

定理 1 设 $G=(V, E)$ 为无向简单图, $|V|=n, A$ 为 G 的相邻矩阵,则有:

- (1) 如果 $a_{ij}^{(1)}=0$ 并且 $a_{ij}^{(2)} \neq 0 (i \neq j)$, 那么在 G 中必有 $d(v_i, v_j)=2$;
- (2) 如果 $a_{ij}^{(1)}=0$ 且 $a_{ij}^{(2)}=0, a_{ij}^{(3)} \neq 0 (i \neq j)$, 那么在 G 中必有 $d(v_i, v_j)=3$ 。

证明:(1)由于 $a_{ij}^{(2)} \neq 0$, 由引理 2 知存在 v_i 到 v_j 长度为 2 的通路,设其为 $\Gamma=v_i v_1 v_j$ 。由于 G 中无环, $v_i \neq v_1$ 且 $v_j \neq v_1$, 又 $v_i \neq v_j$, 因此 Γ 为 v_i 到 v_j 的路径。又 $a_{ij}^{(1)}=0$, 必有 $(v_i, v_j) \notin E(G)$, 所以 $d(v_i, v_j)=2$ 。

(2)由于 $a_{ij}^{(3)} \neq 0$, 由引理 2 知存在 v_i 到 v_j 长度为 3 的通路,设其为 $\Gamma=v_i v_1 v_2 v_j$ 。由于 G 中无环,因此 $v_i \neq v_1$ 且 $v_1 \neq v_2$ 且 $v_j \neq v_2$, 又 $v_i \neq v_j$, 于是有 4 种可能的情形:(2.1)若 $v_1 \neq$

$v_j \wedge v_2 \neq v_i$, 则 Γ 必为 v_i 到 v_j 的路径;(2.2)若 $v_1=v_j \wedge v_2 \neq v_i$, 此时通路 Γ 中必有 $(v_i, v_j)=(v_i, v_1) \in E(G)$, 与 $a_{ij}^{(1)}=0$ 矛盾;(2.3)若 $v_1 \neq v_j \wedge v_2=v_i$, 此时通路 Γ 中必有 $(v_i, v_j)=(v_2, v_j) \in E(G)$, 与 $a_{ij}^{(1)}=0$ 矛盾;(2.4)若 $v_1=v_j \wedge v_2=v_i$, 此时通路 Γ 中必有 $(v_i, v_j)=(v_1, v_2) \in E(G)$, 与 $a_{ij}^{(1)}=0$ 矛盾。

因此,仅有(2.1)满足条件,即 v_i 与 v_j 之间存在长度为 3 的路径。又由于 $a_{ij}^{(2)}=0$ 且 $a_{ij}^{(1)}=0$, 由引理 2 知 v_i 与 v_j 之间不存在长度为 1 和 2 的通路,因此 $d(v_i, v_j)=3$ 。

引理 3^[13] 设 I 为图 G 的一个极大独立集,如果 $\{B, C\}$ 为 I 的一个划分,则 B 与 C 之间的最短距离 $d(B, C)$ 必满足 $d(B, C)=2$ 或 $d(B, C)=3$ 。

引理 4^[14] 对任意单位圆盘图 G , 极大独立集 I 的大小不超过 $3.399mcds(G)+4.874$, 这里 $mcds(G)$ 是 G 的最小连通支配集的大小。

2 构建虚拟主干网的近似算法

无线 Ad-hoc 网络可抽象为无向简单连通图 $G=(V, E)$, 为构建其虚拟主干网,只要求无向连通图 G 的一个 MCDS。已经证明求图 G 的 MCDS 问题是 NPC 问题,通常的方法是求 G 的一个近似 MCDS。下面先基于贪心策略寻找无向连通图 G 的一个 MIS(也即 MDS),然后利用引理 3 与定理 1 并借助图的相邻矩阵将 MDS 快速扩充为一个近似 MCDS。

2.1 基于贪心策略的极大独立集算法

设 $G=(V, E)$ 的顶点集为 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 其相邻矩阵为 $A=[a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$, A 的 2 次幂 $A^2=[a_{ij}^{(2)}]_{n \times n}$ 。下面根据 V 中顶点度数的大小,给出基于贪心策略与相邻矩阵求 G 的 MIS 算法 MaxIndependentSet 的伪 C 代码描述。

算法 1 MaxIndependentSet(V)

1. $I \leftarrow \Phi; M \leftarrow V;$
2. 对 M 中顶点按度数的 $a_{ii}^{(2)}$ 由大到小排序,并设排序后 $M=\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}\};$
3. for ($k=1; k \leq n; k++$) {
4. if ($v_{i_k} \in M$) { $I \leftarrow I \cup \{v_{i_k}\}; M \leftarrow M \setminus \{v_{i_k}\};$ }
5. for ($j=1; j \leq n; j++$)
6. if ($a_{i_k j}^{(1)}=1$) $M \leftarrow M \setminus \{v_{i_j}\};$
7. }
8. return (I)

定理 2 对于无向简单连通图 G , 算法 1 输出的集合 I 是 G 的一个 MIS。

证明:若集合 I 不是图 $G=(V, E)$ 的一个极大独立集,由于 $M=V$, 则必存在顶点 $u \in M \setminus I$, 对于 $\forall v \in I$, 有 $(u, v) \notin E$ 。于是 u 满足算法 1 中步骤 4 的条件,从而 $I \leftarrow I \cup \{u\}$, 即得 $u \in I$, 矛盾。

2.2 基于相邻矩阵的 MCDS 近似算法

虽然算法 1 求得的极大独立集 I 必是图 G 的一个极小支配集,但 $G[I]$ 并不一定是连通的,因此还需要在 I 的基础上添加 $V(G) \setminus I$ 中某些顶点 $T=\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ 将 I 扩充为近似 MCDS。此外,为了减小近似 MCDS 的规模,应删除 I 中所存在的树叶顶点,以便提高解的质量。

根据引理 3,通过将 I 的不同划分 $\{B, C\}$ 的划分块 B 和 C

之间的最短路径上顶点 $u(u \in V(G) \setminus I)$ 所构成的集合 T 并入集合 I , 使 $G[I \cup T]$ 成为 G 的一个连通子图, 即得 G 的一个近似 MCDS。下面利用相邻矩阵的性质, 首先分别给出算法 FastSearchTwoPath(B, C, H_1, H_2, T) 和 FastSearchThreePath(B, C, H_1, H_2, T), 用于求 $d(B, C) = 2$ 和 $d(B, C) = 3$ 时 B 和 C 之间最短路径上的顶点, 从而确定集合 T 。然后, 在此基础上给出一种快速求解 MCDS 的有效近似算法。

设 $|V(G)| = n, I = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ 为图 G 的一个 MIS 且 $\{B, C\}$ 为 I 的划分, $A^2 = [a_{ij}^{(2)}]_{n \times n}$ 和 $A^3 = [a_{ij}^{(3)}]_{n \times n}$ 分别为 G 的相邻矩阵 $A = [a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$ 的 2 次幂和 3 次幂。 T 为一个集合, 用于存放 B 与 C 间最短路径上 $V(G) \setminus I$ 中的顶点。 $H_1, H_2 \subseteq B$, 其中 H_1 用于存放 B 中那些还没有与 C 中顶点进行是否存在长度等于 2 的路径检测的顶点, H_2 用于存放 B 中那些还没有与 C 中顶点进行是否存在长度等于 3 的路径检测的顶点。算法 FastSearchTwoPath 的伪 C 代码描述如下。

算法 2 FastSearchTwoPath(B, C, H_1, H_2, T)

```

1. 设  $H_1 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}\}, C = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\};$ 
2. for ( $m=1; m \leq t; m++$ ) {
3.   for ( $n=1; n \leq k; n++$ ) {
4.     if ( $a_{i_m, j_n}^{(2)} \neq 0$ )
5.       for ( $h=1; h \leq n; h++$ )
6.         if ( $a_{i_m, h}^{(1)} = 1 \wedge a_{h, j_n}^{(1)} = 1$ ) {
7.           if ( $a_{j_n, j_n}^{(2)} \neq 1$ )  $\{B \leftarrow B \cup \{v_{j_n}\};$ 
8.              $H_1 \leftarrow H_1 \cup \{v_{j_n}\}; H_2 \leftarrow H_2 \cup \{v_{j_n}\};$ 
9.              $T \leftarrow T \cup \{v_h\}; C \leftarrow C \setminus \{v_{j_n}\};$  Return (true) ;
10.          }
11.        }
12.       $H_1 \leftarrow H_1 \setminus \{v_{i_m}\};$ 
13.    }
14. return (false)

```

在算法 2 中, 步骤 4 中 $a_{i_m, j_n}^{(2)}$ 用于判定顶点 v_{i_m} 和 v_{j_n} 是否存在长为 2 的通路。若 $a_{i_m, j_n}^{(2)} \neq 0$ 成立, 因为 $v_{i_m}, v_{j_n} \in I$, 则有 $a_{i_m, j_n}^{(1)} \neq 0$, 根据定理 1(1) 知顶点 v_{i_m} 和 v_{j_n} 之间必存在长为 2 的路径, 此时利用步骤 5—步骤 10 求出即可; 若 $a_{i_m, j_n}^{(2)} = 0$ 成立, 由引理 2 易知 v_{i_m} 和 v_{j_n} 之间必不存在长为 2 的路径, 则算法继续考察 C 中其他顶点。此外在步骤 7 中, 若 $a_{j_n, j_n}^{(2)} = 1$, 则由推论 1 知顶点 v_{j_n} 的度数为 1, 将其删去, 不影响连通性且减小了 I 的规模。

定理 3 如果算法 2 输出 true, 则 $d(B, C) = 2$, 并且找到 B 与 C 的一条最短路径及其上 $V(G) \setminus I$ 中的顶点 v_h ; 同时, 顶点集 $B_1 = B \cup \{v_h\}$ 与 $C_1 = C \setminus \{v_h\}$ 构成 I 的一个新划分 $\{B_1, C_1\}$ 。如果算法 2 输出 false, 则 B 与 C 的最短距离为 $d(B, C) = 3$ 。

证明: 当算法 2 输出 true 时, 根据算法中的步骤 6, 必有 $a_{i_m, h}^{(1)} = 1$ 且 $a_{h, j_n}^{(1)} = 1$, 即 $(v_{i_m}, v_h) \in E(G)$ 且 $(v_h, v_{j_n}) \in E(G)$ 。又知 I 为独立集, $v_{i_m} \in B \subseteq I$ 且 $v_{j_n} \in C \subseteq I$ (注意 $B \cap C = \Phi$, $B \cup C = I$), 从而 $(v_{i_m}, v_{j_n}) \notin E(G)$, 因此 $v_{i_m} v_h v_{j_n}$ 为顶点 v_{i_m} 到 v_{j_n} 的长度为 2 的路径, 且 $v_h \in V(G) \setminus I$, 所以 $d(B, C) = 2$ 。此时, $\{B_1, C_1\}$ 构成 I 的一个新划分是显然的。

当算法 2 输出 false 时, 根据算法中的步骤 4 可知, 对于

$\forall v_{i_m} \in B \subseteq I$ 与 $\forall v_{j_n} \in C \subseteq I$, 均有 $a_{i_m, j_n}^{(2)} = 0$ 。由引理 2 知 B 与 C 的任意顶点之间不存在长度为 2 的通路, 从而 $d(B, C) \neq 2$, 于是根据引理 3 可得 $d(B, C) = 3$ 。

当算法 2 输出 false 时, B 与 C 之间的路径为 $d(B, C) = 3$, 因此只要将其找到即可。于是利用定理 1 的 (2) 可给出相应算法 FastSearchThreePath 的伪 C 代码描述如下。

算法 3 FastSearchThreePath(B, C, H_1, H_2, T)

```

1. 设  $H_2 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}\}$  与  $C = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\};$ 
2. for ( $m=1; m \leq t; m++$ ) {
3.   for ( $n=1; n \leq k; n++$ ) {
4.     if ( $a_{i_m, j_n}^{(3)} \neq 0$ )
5.       for ( $h=1; h \leq n; h++$ )
6.         for ( $f=1; f \leq n; f++$ )
7.           if ( $a_{i_m, h}^{(1)} = 1 \wedge a_{h, f}^{(1)} = 1 \wedge a_{f, j_n}^{(1)} = 1$ ) {
8.             if ( $a_{j_n, j_n}^{(2)} \neq 1$ )  $\{H_2 \leftarrow H_2 \cup \{v_{j_n}\};$ 
9.                $B \leftarrow B \cup \{v_{j_n}\}; H_1 \leftarrow H_1 \cup \{v_{j_n}\};$ 
10.               $T \leftarrow T \cup \{v_h, v_f\}; C \leftarrow C \setminus \{v_{j_n}\};$  return;
11.            }
12.          }
13.         $H_2 \leftarrow H_2 \setminus \{v_{i_m}\};$ 
14.      }

```

定理 4 对于 I 的划分 $\{B, C\}$, 当 $d(B, C) = 3$ 时算法 3 必得到 B 与 C 间最短路径及其上 $V(G) \setminus I$ 中的顶点 v_h 与 v_f , 并且 $B_2 = B \cup \{v_h\}$ 与 $C_2 = C \setminus \{v_h\}$ 构成 I 的一个新的划分 $\{B_2, C_2\}$ 。

证明: 由于 $\{B, C\}$ 为 I 的划分并且 $d(B, C) = 3$, 根据引理 3 必存在 $v_{i_m} \in B \subseteq I$ 且 $v_{j_n} \in C \subseteq I$, 使得 A^3 中元素 $a_{i_m, j_n}^{(3)} \neq 0$ ($i_m \neq j_n$), 而此时 $(v_{i_m}, v_{j_n}) \notin E(G)$, 故必有 A 中元素 $a_{i_m, j_n}^{(1)} = 0$ ($i_m \neq j_n$) 与 A^2 中元素 $a_{i_m, j_n}^{(2)} = 0$ ($i_m \neq j_n$) (否则, 由定理 1(1) 知 $d(v_{i_m}, v_{j_n}) = 2$, 与 $d(B, C) = 3$ 矛盾), 于是根据定理 1(2) 可知 v_{i_m} 与 v_{j_n} 之间存在长度为 3 的路径, 所以 $d(v_{i_m}, v_{j_n}) = d(B, C) = 3$ 。于是知 $\Gamma = v_{i_m} v_h v_f v_{j_n}$ 为 v_{i_m} 与 v_{j_n} 间长度为 3 的路径, $v_h, v_f \in V(G) \setminus I$, 因此条件 $(a_{i_m, h}^{(1)} = 1$ 且 $a_{h, f}^{(1)} = 1$ 且 $a_{f, j_n}^{(1)} = 1)$ 必成立, 算法 3 必能执行步骤 7—步骤 11, 从而可求得 B 与 C 间最短路径上 $V(G) \setminus I$ 中的顶点 v_h 与 v_f 。而 $B_2 = B \cup \{v_h\}$ 与 $C_2 = C \setminus \{v_h\}$ 构成 I 的一个新划分 $\{B_2, C_2\}$ 是显然的。

下面给出利用算法 1—算法 3 快速求解无向简单连通图 G 的 MCDS 的近似算法 FastStructureMCDS。首先, 计算 G 的相邻矩阵 A 的 2 次幂与 3 次幂, 然后由算法 1 得到 G 的一个极大独立集 I (即 MDS); 在此基础上, 反复运用算法 2 和算法 3 求出使 $G[I \cup T]$ 成为 G 的连通子图的最小顶点集 T , 则 $D = I \cup T$ 即为 G 的一个近似 MCDS。算法 FastStructureMCDS(V, A) 的伪 C 代码描述如下。

算法 4 FastStructureMCDS(V, A)

```

1. 计算  $A^2 = [a_{ij}^{(2)}]_{n \times n}$  和  $A^3 = [a_{ij}^{(3)}]_{n \times n};$ 
2.  $I \leftarrow \text{MaxIndependentSet}(V)$ , 不妨设  $I = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t}\};$ 
3.  $B \leftarrow \{v_{i_1}\}; C \leftarrow I \setminus \{v_{i_1}\}; T \leftarrow \Phi;$ 
4.  $H_1 \leftarrow \{v_{i_1}\}; H_2 \leftarrow \{v_{i_1}\}; p \leftarrow |C|;$ 
5. While( $p > 0$ ) {
6.   if (FastSearchTwoPath( $B, C, H_1, H_2, T$ )  $\neq$  true)
7.     FastSearchThreePath( $B, C, H_1, H_2, T$ );

```

8. $p \leftarrow p-1$;

9.)

10. $D \leftarrow B \cup T$;

11. return (D)

定理 5 算法 4 结束时输出的顶点集 $D=B \cup T$ 是图 G 的一个近似 MCDS。

证明:首先利用数学归纳法证明在算法 4 结束时 $G[D]=G[B \cup T]$ 是图 G 的一个连通子图。

初始 $B=\{v_1\}$, $T=\Phi$, 则 $B \cup T=B$, 显然 $G[B \cup T]$ 是图 G 的一个连通子图。

假设 $B=\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ ($t < s$) 时 $G[B \cup T]$ 连通, 算法 4 调用算法 2 与算法 3 向 B 中加入的新顶点 $v_{j_n} \in C$ 时有两种情形(注意, 此时 $C=\Lambda B$): (1) 当 $d(B, C)=2$ 时, 由定理 3 可知必存在顶点 $v_m \in B$ 与 $v_n \in V(G) \setminus I$, 使得 v_n 在 v_m 到 v_{j_n} 的长度为 2 的路径上, 因此 v_m 与 v_{j_n} 连通, 再由假设 $G[B \cup T]$ 连通可知 $G[B \cup \{v_{j_n}\} \cup T \cup \{v_n\}]$ 必连通。从而由算法 2 知 $B=B \cup \{v_{j_n}\}$ 与 $T=T \cup \{v_n\}$, 故 $G[B \cup T]$ 连通。(2) 当 $d(B, C)=3$ 时, 由定理 4 可知必存在顶点 $v_m \in B$ 与 $v_h, v_f \in V(G) \setminus I$, 使得 v_h 与 v_f 在 v_m 到 v_{j_n} 长度为 3 的路径上, 因此 v_m 与 v_{j_n} 连通, 再由假设 $G[B \cup T]$ 连通可知 $G[B \cup \{v_{j_n}\} \cup T \cup \{v_h, v_f\}]$ 连通, 从而由算法 3 知 $B=B \cup \{v_{j_n}\}$ 与 $T=T \cup \{v_h, v_f\}$, 故 $G[B \cup T]$ 连通。

综上, 当 FastStructureMCDS 结束时 $G[B \cup T]$ 必连通, 即 $G[B \cup T]$ 是 G 的一个连通子图。

其次, 由于 $D=B \cup T = (\Lambda \{u | d(u)=1 \wedge u \in I\}) \cup T$, 在调用算法 2 与算法 3 时所删除 $\{u | d(u)=1 \wedge u \in I\}$ 中顶点的支配作用由 T 中顶点替代, 故 $B \cup T$ 仍然是 G 的一个支配集, 所以算法 4 结束时, $D=B \cup T$ 是图 G 的一个近似 MCDS。

3 算法的复杂度与近似比

设图 G 的顶点数为 $|V|=n$, 易知算法 1 的时间复杂度为 $O(n^2)$, 算法 2 的最坏时间复杂度为 $O(tkn)$, 算法 3 的时间复杂度为 $O(tkn^2)$ 。计算 A^2 与 A^3 的矩阵乘法时可采用 Strassen 算法^[15], 其时间复杂度为 $O(n^{2.81})$ 。因此, 若令 $c=tk$ (显然 $t+k \leq |I|$), 则算法 4 的时间复杂度为

$$O(n^{2.81}) + O(n^2) + aO(tkn) + bO(tkn^2) = \max\{O(n^{2.81}), O(cn^2)\}$$

定理 6 FastStructureMCDS 是一种求解无向简单连通图 G 的 MCDS 的近似算法, 并且其渐近近似比为 10.197。

证明: 由于 FastStructureMCDS 算法的时间复杂度为 $\max\{O(n^{2.81}), O(cn^2)\}$, 因此它是多项式时间的。

设 $a+b=|I|-1$, 其中 a 为算法 FastSearchTwoPath 的执行次数, b 为算法 FastSearchThreePath 的执行次数, 则算法 FastSearchTwoPath 贡献给 T 的顶点个数至多为 a 个, 算法 FastSearchThreePath 贡献给 T 的顶点个数至多为 $2b$ 个, 从而 $|T| \leq a+2b$ 。又由于 $D=B \cup T$, $B \cap T = \Phi$ 且 $|B| \leq |I|$, 于是 $|D| = |B| + |T| \leq |I| + |T| \leq |I| + a + 2b = 2|I| + b - 1$ 。注意到 $b \leq |I| - 1$, 所以 $|D| \leq 3|I| - 2$ 。再根据引理 4, $|I| \leq 3.399mcds(G) + 4.874$, 于是得到 $|D| \leq 10.197mcds(G) +$

12.622, 从而

$$\frac{|D|}{mcds(G)} \leq 10.197 + \frac{12.622}{mcds(G)}$$

所以, FastStructureMCDS 的渐近近似比为 10.197。

FastStructureMCDS 总是先调用 FastSearchTwoPath, 寻找划分块间长度为 2 的路径, 仅当这样的路径不存在时才调用 FastSearchThreePath, 在多数情况下 FastStructureMCDS 的近似比介于 6.798 和 10.197 之间。又注意到, 实现 FastStructureMCDS 的关键在于矩阵乘法运算和矩阵元素的线性查找, 故只要已知 Ad-hoc 网络对应图的相邻矩阵即可求其近似 MCDS, 因此在实际应用中既可避免 Ad-hoc 网络各节点间的反复通信, 也与节点间的通信半径大小无关。此外, FastStructureMCDS 能够由 $a_{m,j_n}^{(2)}$ 和 $a_{m,j_n}^{(3)}$ 值快速判断顶点 v 与顶点 u 之间是否存在长度为 2 或 3 的路径, 避免了大量盲目的枚举搜索, 大大加快了求解 Ad-hoc 网络虚拟主干网的速度。

4 仿真实验与分析

为了评估 FastStructureMCDS (以下简称 FMCDS) 的性能, 使用 DELL Pentium(R)4-CPU1.70 GHz-128MB 内存微机, 在 Windows XP 操作系统下利用 VC++6.0 语言编程, 进行 3 类不同的仿真实验, 并分别与代表性算法 EMCDS^[8]、EEMPR^[10] 和 G-CMA^[11] 进行比较。

在第一、二类仿真实验中, 采用 UDG 模型随机生成连通的网络拓扑, 即将 N 个无线节点随机地分布在 $L \times W$ 的平面区域上, 各节点的通信半径均为 R , 两节点连通当且仅当其间的距离不超过 R , 仿真实验的每一结果为 50 次实验所求得 $|D|$ 的平均值。在第三类仿真实验中, 采用非 UDG 模型随机生成连通自组网络所对应的相邻矩阵 A (各节点的通信半径 R 并不要求相等), 基于 A 求其近似 MCDS, 仿真实验的每一结果为 50 次实验求得的最好值、平均值与最差值的 $|D|/|V|$ 变化曲线 (分别记为 B-Curve, W-Curve 和 A-Curve) 及相应运行时间 (分别记为 B-time, W-time 和 A-time, 单位: s)。

在第一类仿真实验中, 当网络规模一定时, 分析算法在不同通信半径下的求解性能。其中节点随机地分布在 200×200 的平面区域上, 节点规模分别设为 $N=300$ 和 $N=500$ 。将 FMCDS 与在此类实验中表现较好的 EMCDS 进行比较, 仿真实验结果见图 1 与图 2。

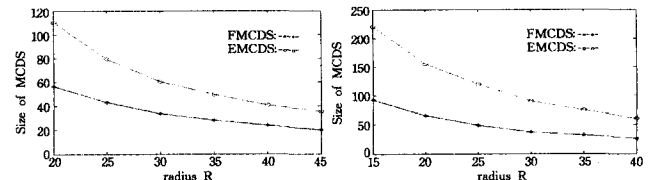


图 1 $N=300$ 时 FMCDS 与 EMCDS 比较

图 2 $N=500$ 时 FMCDS 与 EMCDS 比较

在第二类仿真实验中, 分析当通信半径一定时算法在不同网络规模下的求解性能, 其中节点随机地分布在 100×100 的平面区域上, 各节点通信半径设为 $R=25$ 。将 FMCDS 与此类实验中较突出的 EEMPR 进行比较, 仿真实验结果见图 3 与图 4。

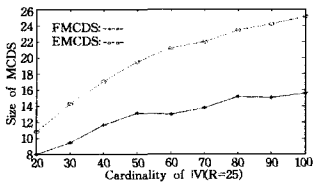


图3 R=25时 FMCDS 与 EMCDS 的比较(1)

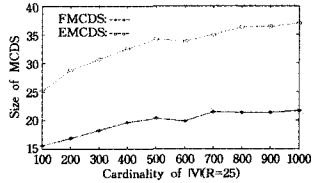


图4 R=25时 FMCDS 与 EEMPR 的比较(2)

在第三类仿真实验中,根据文献[12]中的理论,按照矩阵的元素 a_{ij} 满足 $Prob\{a_{ij}=0\} \geq 0.7$ 的概率随机生成顶点规模 N 满足 $100 \leq N \leq 600$ 的连通网络的相邻矩阵 $A=(a_{ij})_{N \times N}$ 各 50 个。由于没有通信半径的限制,每个矩阵实际上可视为是对应一个具有不同通信半径的 Ad-hoc 网络。利用 FMCDS 进行求解所得的仿真实验结果见图 5 和图 6。

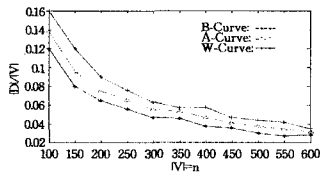


图5 FMCDS 的最差、最好和平均 $|D|/|V|$ 变化曲线

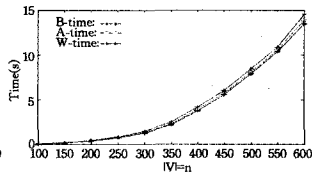


图6 FMCDS 的最差、最好和平均时间变化曲线

从图 1—图 4 可以看出, FMCDS 的求解结果明显优于 EMCDS 和 EEMPR, 表明 FastStructureMCDS 是求解 Ad-hoc 网络 MCDS 的一种有效的近似算法。由图 5 可以看出, 对于具有不同通信半径的 Ad-hoc 网络, 即使网络的规模 $|V| \geq 150$, FastStructureMCDS 求得的近似 MCDS 大小也不会超过网络规模的 8.3%, 比文献[11]中 G-CMA 算法的 10% 结果更好。

目前, 由于求解 MCDS 的近似算法多集中于对求解效果的讨论, 还未见在不同网络规模下算法所耗时间的有关统计与报道, 因此无法与 FastStructureMCDS 进行对比。但是, 从图 6 中的求解时间变化曲线来看, 即使网络规模 $N=500$, FMCDS 的平均求解时间也不会超过 8s, 说明 FastStructureMCDS 的求解速度是快速的。因此, 算法不但求解效果好, 求解速度也更快。

结束语 本文基于相邻矩阵理论在 UDG 模型下提出的 FastStructureMCDS 算法, 也适用于非 UDG 模型的情况。虽然算法在理论上的渐近近似比为 10.197, 但其仿真计算结果表明, 对于较大规模的无线 Ad-hoc 网络, FastStructureMCDS 不仅所求虚拟主干网的规模非常小, 求解速度也非常快。通过与其他代表性近似算法的计算对比表明, 利用 FastStructureMCDS 构建无线自组网的虚拟主干网是有效且快速的。FastStructureMCDS 的核心是子算法 FastSearch TwoPath 和 FastSearch ThreePath, 虽然两个子算法在扩充顶点集 T 时都对 I 中的树叶顶点作了删除优化处理, 但这样的优化还是比较简单的。如何进一步优化算法, 使其求得 $D=BU T$ 的规模更小, 将是今后需要进一步研究的问题。此外, 如何借助相邻矩阵快速构建 m -连通 k -支配 MCDS 问题, 也是今后的一

个探讨方向。

参考文献

- [1] Cadei M, Cheng M X, Cheng X, et al. Connected domination in ad hoc wireless networks[C]//Proc. Sixth Internat. Conf. Computer Science and Informatics (CS&I'2002). 2002
- [2] Ruan L, Du H, Jia X, et al. A greedy approximation for minimum connected dominating set[J]. Theoret. Computer Science, 2004, 329:325-330
- [3] Min M, Du H, Jia X, et al. Improving construction for connected dominating set with Steiner tree in wireless sensor networks [J]. J. Global Optimization, 2006, 35:111-119
- [4] 唐勇, 周明天. 基于极大独立集的最小连通支配集的分分布式算法 [J]. 电子学报, 2007, 35(5):868-874
- [5] Shang Wei-ping, Yao F, Wan Peng-jun, et al. Algorithms for minimum m -connected k -dominating set problem[C]//COCOA. LNCS 4616, 2007:182-190
- [6] 彭伟, 卢锡城. 一个新的分布式最小连通支配集近似算法[J]. 计算机学报, 2001, 24(3):254-258
- [7] Alzoubi K M, Wan P-J, Frieder O. Distributed heuristics for connected dominating set in wireless ad hoc networks[J]. IEEE ComSoc/KICS Journal on Communication Networks, 2002, 4(1):22-29
- [8] Han Bo, Fu Hao-huan, Lin Li-dong. Efficient construction of connected dominating set in wireless Ad-hoc networks[C]//2004 IEEE International Conference on Mobile Ad-hoc and Sensor Systems. Oct 2004:570-572
- [9] Qayyum A, Viennot L, Laouti A. Multipoint relaying for flooding broadcast message in mobile wireless networks[C]//Proc. of 35th Hawaii Int'l Conf. on System Sciences(HICSS-35). Jan. 2002:3898-3907
- [10] Wu Jie, Lou Wei. Extended multipoint relays to determine connected dominating sets in MANETs[J]. IEEE Trans. on Computers, 2006, 55(3):334-347
- [11] Park M A, Willson J, Wang Chen, et al. Weili Wu, Andras Fara-go. A dominating and absorbent set in a wireless Ad-hoc network with different transmission ranges[C]//Proceedings of the 8th ACM International Symposium on Mobile Ad-hoc Networking and Computing. Montreal, Quebec, Canada, September 2007
- [12] 耿素云, 屈婉玲, 王捍贫. 离散数学教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007
- [13] Alzoubi K M. Virtual backbone in wireless ad hoc networks [M]. USA: Illinois Institute of Technology, 2004
- [14] Gao Xiao-feng, Wang Yue-xuan, Li Xian-yue, et al. Analysis on theoretical bounds for approximation dominating set problems [J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2009, 1(1):71-84
- [15] Cormen T H, Leiserson C E, Rivest R L, et al. Introduction to algorithms(second edition)[M]. MIT Press and McGraw Hill, 2001