

基于区域的图切割算法求解 Mumford-Shah 图像分割模型

张文娟^{1,2} 冯象初¹

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)¹ (西安工业大学数理系 西安 710032)²

摘要 在 Egil Bae 和 Tai Xue-Cheng 提出的图切割算法基础上,给出了一种改进算法用于求解 Mumford-Shah 图像分割模型。首先利用 Mean Shift 算法对原始图像进行过分割,基于过分割产生的小区域构造恰当的图,使得分割问题转化为求特定图的最小切割问题。数值实验结果显示,直接利用 Mean Shift 算法分割的效果不理想,本方法保持了与 Egil Bae 和 Tai Xue-Cheng 方法相类似的分割效果,而运算效率却有了很大提高。

关键词 图像分割,图切割,区域,Mumford-Shah 模型,分片常数水平集方法,Mean Shift 算法
中图分类号 TP391 **文献标识码** A

Region-based Graph Cut Algorithm for Mumford-Shah Image Segmentation Model

ZHANG Wen-juan^{1,2} FENG Xiang-chu¹

(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)¹

(Department of Mathematics and Physics, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)²

Abstract An improved graph cut algorithm was proposed based on the method presented by Egil Bae and Xue-Cheng Tai for solving the Mumford-Shah image segmentation model. Firstly the original image was over-segmented using Mean Shift method. An appropriate graph was constructed on the basis of the produced small regions. Thus by finding the minimum cut over the special graph, we obtained the solution for the segmentation problem. Numerical experiments show that the segmentation results of Mean Shift algorithm are not desirable. Our method has similar results with that presented by Egil Bae and Xue-Cheng Tai. However, the computation efficiency is greatly improved.

Keywords Image segmentation, Graph cut, Regions, Mumford-Shah model, Piecewise constant level set method, Mean shift algorithm

1 引言

以往的工作中,利用图切割技术解决多相位分割问题常用某种逼近方法,其基本思想是通过求解一系列二进极小化问题,最终以多项式时间收敛到次最优逼近解。其中一种方法是所谓的 α 展开方法,这种方法关于分割的相位数具有线性收敛速度。对 α 展开方法的某种改进参见文献[1]。文献[2]提出了一种类似的关于分割的相位数具有对数收敛速率的方法。其它的用于图像分析的整数优化方法可参考文献[3],常用的一种方法是基于拉格朗日松弛的。这些方法的难点在于很难分析逼近解与精确解之间的误差大小,只能确定最大误差的范围。

与上述方法不同,文献[4]中的方法和本文方法直接逼近要极小化的能量泛函,然后构造特定的图,通过图切割技术求得逼近泛函的精确解。本文与文献[4]中方法不同的是,文献[4]基于图像的全部像素构造图,数据量很大,而本文首先对原始图像进行过分割,再基于过分割后产生的小区域构造图。利用本文方法构造的图的节点数大大减少了,提高了算法的运行效率,节省了计算所需的存储空间,而且每个小区域中嵌入了图像的局部信息。数值试验证明,利用本文方法也能取

得与文献[4]方法接近的图像分割效果。但困难在于此时图的节点、边以及各边相应的权重系数都需要重新定义。

2 相关工作

2.1 图切割算法

设图 $G=(V, \epsilon)$, 其中 V 和 ϵ 分别为全体节点和全体边的集合。 (a, b) 表示由节点 a 指向节点 b 的边, $c(a, b)$ 表示该边上的权重系数。另外还有两个节点 s 和 t , 分别称为源点和接收点。图切割技术是将节点集 V 分成两个互不相交的集合 V_s 和 V_t , 使得 $s \in V_s, t \in V_t$ 。对某一给定的切割,有用边的集合 C 定义为

$$C = \{(a, b) | a \in V_s, b \in V_t, (a, b) \in \epsilon\} \quad (1)$$

若边 $e \in \epsilon$ 包含于 C , 就称其为有用边,切割的代价定义为

$$|C| = \sum_{e \in C} c(e) \quad (2)$$

图切割技术的目的是求使得式(2)所示的代价达到最小的切割,称为最小切割技术。根据 Ford 和 Fulkerson 的对偶理论,最小切割可以通过 Ford-Fulkerson 等最大流算法有效地计算出来。

2.2 基于分片常数水平集函数的 Mumford-Shah 模型

文献[5]提出利用 PCLSM(Piecewise Constant Level Set

Method)来表示 Mumford-Shah 泛函。不同于传统的水平集方法, PCLSM 通过水平集函数的不连续表示各子区域之间的边界曲线, 而且对任意给定相位数的分割, 只需要一个水平集函数即可。将其简单描述如下, 现将区域 Ω 分为 n 个子区域 $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$, 使其满足

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n; \bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \quad (3)$$

分片常数水平集函数 $\phi(x)$ 定义为

$$\phi(x) = i, \text{ 当 } x \in \Omega_i \text{ 时}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

当且仅当函数 $\phi(x)$ 的值为多项式

$$K(\phi) = \prod_{i=1}^n (\phi - i) \quad (5)$$

的零点时, 满足条件(4)。利用函数 ϕ 可以表示每个子区域 Ω_i 的特征函数 ψ_i 。

$$\psi_i = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{j=1, j \neq i}^n (\phi - j) \quad (6)$$

$$\alpha_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n (i - k)$$

式中, ψ_i 在 Ω_i 内取值为 1, 在其余区域 $\Omega \setminus \Omega_i$ 上取值为 0。Mumford-Shah 泛函可用下面的能量泛函逼近, 即

$$E(c, \phi) = \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx + \nu TV(\phi) \quad (7)$$

式中, u^0 为给定的定义在区域 Ω 上的图像, $u = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ 。为了在离散情形下可以用图表示及使得正则化尽可能各向同性, 总变差正则项 $TV(\phi)$ ^[7,8] 取为

$$TV_{1, \pi/4}(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\nabla \phi(x)|_1 + |R_{\pi/4} \nabla \phi(x)|_1 \} dx \quad (8)$$

式中, $R_{\pi/4}$ 为逆时针旋转 $\pi/4$ 所对应的旋转矩阵。综上所述, 利用分片常数水平集方法极小化 Mumford-Shah 泛函, 须求解下面带约束的最优化问题。

$$\min_{c, \phi} E(c, \phi), \text{ 使得 } K(\phi) = 0 \quad (9)$$

下面给出泛函(7)的离散化形式。设 $P = \{(i, j) | i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}\}$ 为图像的全体像素点, $\phi_{i,j}, u_{i,j}^0, u_{i,j}$ 分别表示相应的函数在这些像素点上的值, 则范数 $TV_{1, \pi/4}$ 的离散形式为

$$TVd_{1, \pi/4} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in P} \{ |\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}| + |\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}| \} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{(i,j) \in P} \{ |\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j}| + |\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i,j}| \} \quad (10)$$

对给定的 $(i, j) \in P$, 用 $N_8(i, j)$ 表示点 (i, j) 的全体邻域点的集合, $N(i, j)$ 表示 (i, j) 的部分邻域点的集合, 定义如下。

$$N_8(i, j) = \{(i \pm 1, j), (i, j \pm 1), (i \pm 1, j \pm 1)\}$$

$$N(i, j) = \{(i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1), (i-1, j+1)\}$$

则泛函(7)的离散形式可写为

$$E_d(c, \phi) = \sum_{(i,j) \in P} (u_{i,j} - u_{i,j}^0)^2 + \nu \sum_{(i,j) \in P} \sum_{(i',j') \in N(i,j)} |\phi_{i,j} - \phi_{i',j'}| \quad (11)$$

对 $(i', j') \in N_8(i, j)$, 有

$$\omega_{(i,j),(i',j')} = \frac{1}{2 \| (i, j) - (i', j') \|_2}$$

由于 $\omega_{(i,j),(i',j')} = \omega_{(i',j'),(i,j)}$, 因此在第二个和式中每一项

都被计算了两次, 故须乘以 $\frac{1}{2}$ 。

对固定的函数 ϕ , 关于向量 $c = \{c_i\}_{i=1}^n$ 求泛函(7)的极小解, 可求得 c 的各个分量值为

$$c_i = \frac{\int_{\Omega} u^0(x) \psi_i(x) dx}{\int_{\Omega} \psi_i(x) dx} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

其离散形式为

$$c_i = \frac{\sum_{(i,j) \in P} u_{i,j}^0 \psi_{i,(i,j)}}{\sum_{(i,j) \in P} \psi_{i,(i,j)}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

现要同时关于 ϕ 和 c 求解问题(9), 这里采用交替极小化的方法, 最终迭代收敛到所求的解。算法如下:

算法 1 估计初始值 c^0 , 设 $l=0$ 。

- 1) 求解 $\phi = \operatorname{argmin}_{\phi: K(\phi)=0} E_d(c^l, \phi)$;
- 2) 根据式(13)计算 c^{l+1} ;
- 3) 令 $l=l+1$, 若 $\|c^l - c^{l-1}\| < \epsilon$, 停止, 否则, 返回 1。

本文估计初始值 c^0 时用的是 Isodata 算法。给定向量 c 关于 ϕ 求解问题式(9)时, 若利用梯度下降法^[5,9], 缺点是容易收敛到局部极小解, 且收敛速度慢。图切割技术是一种全局优化算法, 而且实现速度快。第 3.2 节通过构造恰当的图, 使得问题转化为求该图的最小切割问题, 即构造图 G , 使得

$$\min_{\text{cutson } G} |C| = \min_{\phi: K(\phi)=0} E_d(c, \phi) + \sigma \quad (14)$$

式中, σ 为一常数, 极小解 ϕ 不会受此常数的影响。

文献[4]基于图像的像素点定义所构造的图的节点, 这样即使是一个很小的 200×200 的图像, 也会有 40000 个节点, 节点之间关系矩阵的大小为 40000×40000 。如此大的数据量会使得算法非常耗时, 而且所需的记忆存储空间也非常大, 影响算法的实施效率。这个问题可以通过下采样得以解决, 但是下采样会导致图像的局部强度信息丢失, 致使分割后目标物体的边界扭曲。

3 基于区域的图切割算法

3.1 Mean-Shift 算法

首先介绍一种局部分割方法: Mean Shift 方法。主要利用文献[10]的工作, 给定 d 维空间 R^d 的 n 个数据点 $x_i, i=1, 2, \dots, n$, 在点 x 的密度梯度估计^[10] 为

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} f_{h,K}(x) &\equiv \nabla \hat{f}_{h,K}(x) \\ &= \frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^n x_i g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right) - x \sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $\hat{f}_{h,K}(x)$ 表示在点 x 处以 K 为核的核密度估计, h 为带宽参数。函数 $g(x) = -k'(x)$, 对 $x \geq 0, k(x)$ 为核 $K(x)$ 的轮廓, 即 $K(x) = c_{k,d} k(\|x\|^2), c_{k,d} > 0$ 为归一化常数。以 $g(x)$ 为轮廓的核设为 $G(x) = c_{g,d} g(\|x\|^2)$, 利用核计算的在点 x 的核密度估计为

$$\hat{f}_{h,G}(x) = \frac{c_{g,d}}{nh^d} \sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right) \quad (16)$$

在点 x 的 Mean Shift 向量定义为

$$m_{h,G}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right)}{\sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{x-x_i}{h} \right\|^2 \right)} - x \quad (17)$$

由式(15)–式(17), $m_{h,G}(x)$ 可表示为

$$m_{h,G}(x) = \frac{1}{2} h^2 c \frac{\nabla \hat{f}_{h,K}(x)}{\hat{f}_{h,K}(x)} \quad (18)$$

上式说明在 x 点处与核对应的 Mean Shift 向量正比于规范化的以 K 为核的密度梯度估计, 故 Mean Shift 向量总是指向密度增加最快的方向, 因此它可以定义一条通向估计密度的稳定点的路径。

对每个 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 定义序列

$$y_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i g\left(\left|\frac{y_j - x_i}{h}\right|\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left|\frac{y_j - x_i}{h}\right|\right)} \quad j=1, 2, \dots \quad (19)$$

y_1 为核的初始位置的中心, 令 $\hat{f}_{h,K}(j) = \hat{f}_{h,K}(y_j)$ 。

定理 1 若核 K 有一个凸的且单调递减的轮廓, 则序列 $\{y_j\}_{j=1,2,\dots}$ 及 $\{\hat{f}_{h,K}(j)\}_{j=1,2,\dots}$ 收敛且 $\{\hat{f}_{h,K}(j)\}_{j=1,2,\dots}$ 单调递增。

设 y_c 为 $\{y_j\}_{j=1,2,\dots}$ 的收敛点, 因为 $\hat{f}_{h,K}(x)$ 为连续函数, 所以 $\hat{f}_{h,K} = \hat{f}_{h,K}(y_c)$ 为 $\{\hat{f}_{h,K}(j)\}_{j=1,2,\dots}$ 的收敛点。由于 $m_{h,G}(y_j) = y_{j+1} - y_j$, 也就是说从 y_j 到 y_{j+1} 是以 y_j 点的 Mean Shift 向量为路径的, 则有 $m_{h,G}(y_c) = 0$, 由式(18)可推出 $\nabla \hat{f}_{h,K}(y_c) = 0$, 即 y_c 为密度估计 $\hat{f}_{h,K}$ 的稳定点。

文献[10]给出了基于 Mean Shift 方法的图像特征空间 ($L^* u^* v^*$ 空间) 分析的两种应用: 保留不连续的滤波及在此基础上图像分割, 在图像的 d 维联合空-值域中进行分析, $d = p + 2$ 。当图像为灰度图像时, $p = 1$; 为彩色图像时, $p = 3$ 。其中采用的多元核定义为两个径向对称核的乘积。

$$K_{h_s, h_r}(x) = \frac{C}{h_s^2 h_r^2} k\left(\left|\frac{x^s}{h_s}\right|\right) k\left(\left|\frac{x^r}{h_r}\right|\right) \quad (20)$$

式中, x^s 和 x^r 分别表示向量 x 的空域和值域部分, $k(x)$ 为空域和值域中所用的共同的轮廓, h_s 和 h_r 为核的带宽, C 为相应的规范化常数。

设 $x_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为联合空-值域中的 d 维输入和滤波后的数据点, L_i 为分割后图像中第 i 个像素点的标值, Mean Shift 分割算法为

1) 对图像进行 Mean Shift 滤波。

a) 初始化 $j=1$, 令 $y_{i,1} = x_i = (x_i^s, x_i^r) (i=1, 2, \dots, n)$

根据式(19)计算 $y_{i,j+1}$, 直到收敛, 收敛点为 $y_{i,c}$;

b) 令 $z_i = (x_i^s, y_{i,c})$ 。

2) 在联合域中将 $\{z_i\}_{i=1}^n$ 分为 m 类: $\{C_p\}_{p=1,2,\dots,m}$, 将所有在空域中距离小于 h_s 、值域中距离小于 h_r 的 z_i 分为一类。

3) 对 $i=1, 2, \dots, n$, 令 $L_i = \{p | z_i \in C_p\}$ 。

4) 丢掉包含像素点个数小于 M 的区域。

从第 4 节的数值实验可以看出, 如果直接利用 Mean Shift 方法对原始图像进行分割, 虽然分割的速度很快, 但分割效果不佳。本文在文献[4]的工作基础上, 给出了一种改进算法, 可以克服文献[4]中算法数据量大的问题, 而不会像下采样方法那样丢失图像的局部强度信息, 同时又能得到比 Mean Shift 算法好得多的分割效果。首先利用上述 Mean Shift 方法对原始图像进行过分割, 所谓过分割是指分割所产生的区域数要相对大一些, 然后基于这些小区域构造图, 使得式(14)成立。利用这种方法, 图像的局部特性会嵌入到每个

小区域中, 而图的节点数却大大减少了。但此时, 所构造图的节点要重新定义为过分割后的小区域, 边建立在相邻的两个小区域之间。最关键的是要定义每条边上的权重系数, 使得当给定这些小区域的某种分割时, 应该与文献[4]中的方法等价。

3.2 图的构造

下面展示分别将图像分割为两个相位和多个相位的情形下, 如何构造恰当的图以及如何建立对该图的切割与函数 ϕ 的关系, 从而可以通过图切割算法极小化泛函式(11)。

3.2.1 二相位分割

对二相位分割, 要把过分割产生的小区域分为两部分。设这些小区域的个数为 L , 把每个小区域作为图 G 的节点, 记作 $v_p (p=1, 2, \dots, L)$ 。在以后的内容中, 也用 v_p 表示其所对应的小区域。则全部节点的集合定义为

$$V = \{v_p | p \in \{1, 2, \dots, L\}\} \cup \{s\} \cup \{t\}$$

所构造的图 G 的边由从源点 s 到每个节点、从每个节点到接收点 t 以及相邻的两个小区域所对应的节点之间 3 部分构成, 全体有向边组成的集合为

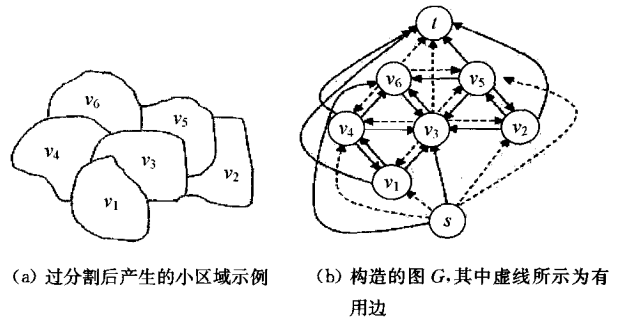
$$\epsilon = \{(v_p, v_q) | p \in \{1, 2, \dots, L\}, v_q \in N(p)\} \cup \{(s, v_p) | \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}\} \cup \{(v_p, t) | \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}\}$$

式中, $N(p)$ 表示与 v_p 相邻的小区域的集合。

现在建立对图 G 的某种切割与分片常数水平集函数 ϕ 之间的关系。设 (V_s, V_t) 为对图 G 的某一切割, C 为有用边的集合, 对任意小区域 v_p 所包含的全体像素点, ϕ 的取值为同一常数。在这些像素点, ϕ 的值定义为

$$\phi_p = \begin{cases} 1, & v_p \in V_t \\ 2, & v_p \in V_s \end{cases} \quad (21)$$

图 1 给出了这种情况下图 G 的构造以及相应于 G 的某种切割函数 ϕ 的取值情况。假设过分割后 6 个小区域的结构如图 1(a) 所示, 图 1(b) 为构造的图 G , 给定切割 $V_s = \{v_3, v_6, s\}$, $V_t = \{v_1, v_2, v_4, v_5, t\}$, 图 1(b) 中虚线表示有用边, 对应于该切割每个小区域或节点的 ϕ 的取值如图 1(c) 所示。



(a) 过分割后产生的小区域示例 (b) 构造的图 G , 其中虚线所示为有用边

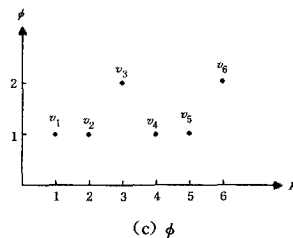


图 1 二相位分割情形

为保证等式(14)成立, 图 G 中各边的权重系数定义如下, 此时常数 $\sigma = 0$ 。

$$c(s, v_p) = \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j}^0 - c_1|^2, \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}$$

$$c(v_p, t) = \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j}^0 - c_2|^2, \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}$$

$$c(v_p, v_q) = \nu \sum_{(i,j) \in v_p} \sum_{\substack{(i',j') \in v_q \\ (i',j') \in N_8(i,j)}} \omega_{(i,j),(i',j')}, \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}$$

可以验证,下面给出的能量泛函与式(11)是等价的。

$$E_d(c, \phi) = \sum_{p=1}^L \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j} - u_{i,j}^0|^2 + \nu \sum_{p=1}^L \sum_{v_q \in N(p)} \frac{1}{2} \left(\sum_{(i,j) \in v_p} \sum_{\substack{(i',j') \in v_q \\ (i',j') \in N_8(i,j)}} \omega_{(i,j),(i',j')} \right) |\phi_p - \phi_q| \quad (23)$$

由此,对图 G 的任一切割和相应的函数 ϕ ,有如下关系成立。

$$|C| = E_d(c, \phi) \quad (24)$$

因此,对图 G 的最小切割所对应的分片常数水平集函数 ϕ 就是能量泛函式(11)的极小解。

3.2.2 多相位分割

这里,将多相位分割看作是上述二相位分割情形的推广,其目的是将过分割后产生的小区域分为 n 个相位。为此,须在上节所构造的图 G 的基础上再增加一个维数,即在 R^3 中考虑该问题。这里构造的图 G 的节点用 $v_{p,l}$ 表示,全体节点的集合 V 定义为

$$V = \{v_{p,l} | p \in \{1, 2, \dots, L\}, l \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{s\} \cup \{t\}$$

节点总数为 $L \times (n-1) + 2$,而文献[4]中多相位分割情况下的节点数为 $N \times M \times (n-1) + 2$,显然这里的节点数要少得多。将图 G 的全体边的集合分为两类: ϵ_D 和 ϵ_R 。 ϵ_D 对应于泛函式(11)中的数据项,其定义如下:

$$\epsilon_D = \bigcup_{p \in \{1, 2, \dots, L\}} \epsilon_p$$

对每个小区域 v_p ,有向边集合 ϵ_p 定义为

$$\epsilon_p = (s, v_{p,1}) \cup \bigcup_{l=1}^{n-2} (v_{p,l}, v_{p,l+1}) \cup (v_{p,n-1}, t) \in \epsilon_R$$

对应于泛函式(11)的正则项,定义为

$$\epsilon_R = \{(v_{p,l}, v_{q,l}) | p \in \{1, 2, \dots, L\}, v_q \in N(p), l \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$$

给定对图 G 的任一切割 $\{V_s, V_t\}$,对每个 $p \in \{1, 2, \dots, L\}$, ϵ_p 中至少有一条边是有用的,否则节点 s 和 t 就分不开了。这样, ϵ_D 中至少有 L 条边是有用的。如果存在任一切割,对每个 $p \in \{1, 2, \dots, L\}$, ϵ_p 中刚好有一条边是有用的,则称该切割是容许的。此时, ϵ_D 中正好有 L 条边是有用的。

类似于上节,下面建立对图 G 的某种切割与水平集函数 ϕ 之间的关系。设 (V_s, V_t) 是对图 G 的任一切割, $C \subseteq \epsilon$ 为有用边集合,对任意 $p \in \{1, 2, \dots, L\}$,在小区域 v_p 所包含的像素点处,水平集函数 ϕ 的取值为

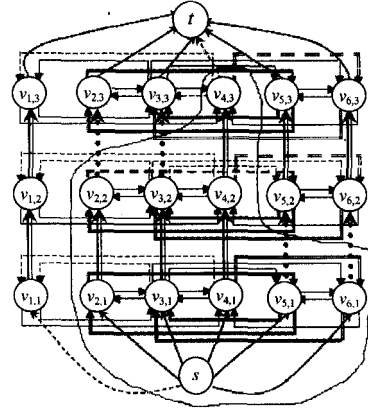
$$\phi_p = \begin{cases} 1, & v_{p,1} \in V_t \\ l+1, & v_{p,l} \in V_t, v_{p,l+1} \in V_s \\ n, & v_{p,n-1} \in V_s \end{cases} \quad (25)$$

由于容许切割的限制,故这样定义的水平集函数一定是单值的,取

$$\sigma = M \cdot N \cdot (n-1) \cdot k \cdot \nu \cdot \max_{(i,j) \in P, (i',j') \in N_8(i,j)} \omega_{(i,j),(i',j')} \quad (26)$$

则对图 G 的具有最小代价的切割均为容许切割。图 2 为将图 1(a)所示的 6 个小区域分割为 4 个相位时,图 G 的构造以及给定对 G 的某一容许切割后相应的函数 ϕ 的取值情况。这里为简单起见,将图 G 放在了 R^2 中。图 2(a)为所构造的

图,并且给出了对 G 的某一容许切割,其中虚线所示为有用边。图 2(b)为对应于图 2(a)给出的切割,函数 ϕ 在各个小区域中的取值情况。



(a) 构造的图及某一容许切割

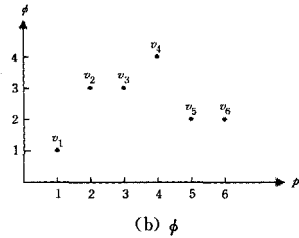


图 2 多相位分割情形

下面定义图 G 中各边的权重系数,使得关系式(14)成立。先定义数据项所对应的边,即 ϵ_D 中的边的权重系数。

$$c(s, v_{p,1}) = \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j}^0 - c_1|^2 + \frac{\sigma}{MN} \cdot l_p, \forall p \in \{1, 2, \dots, L\}$$

$$c(v_{p,l}, v_{p,l+1}) = \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j}^0 - c_{l+1}|^2 + \frac{\sigma}{MN} \cdot l_p$$

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, L\}, \forall l \in \{1, 2, \dots, n-2\}$$

$$c(v_{p,n-1}, t) = \sum_{(i,j) \in v_p} |u_{i,j}^0 - c_n|^2 + \frac{\sigma}{MN} \cdot l_p$$

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, L\} \quad (27)$$

式中, l_p 为小区域 v_p 中所含的像素点的个数。正则项对应的边,即 ϵ_R 中的边的权重系数定义为

$$c(v_{p,l}, v_{q,l}) = \nu \sum_{(i,j) \in v_p} \sum_{\substack{(i',j') \in v_q \\ (i',j') \in N_8(i,j)}} \omega_{(i,j),(i',j')}$$

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, L\}, v_q \in N(p), \forall l \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (28)$$

综上所述,对任一在区域 Ω 上且在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取值的分片常数水平集函数 ϕ ,都唯一存在对图 G 的一种容许切割,反之也成立。而且,给定向量 $c = \{c_i\}_{i=1}^n$,函数 ϕ 和与其相应的切割满足关系

$$|C| = E_d(c, \phi) + \sigma \quad (29)$$

因此,对应于最小切割的函数 ϕ 即为泛函式(11)的极小解。

4 数值实验

下面利用本文算法对一幅合成图像及一幅医学图像进行分割。使用的计算机系统为 Microsoft Windows XP Professional, 2002 版本,计算机为 Pentium (R) Dual-Core, CPU E5200, 2.5 GHz, 1.99 GB 的内存,编程软件为 Matlab 7.0。

如下实验中,合成图的大小为 256×256 ,医学图像的大小为 348×314 。

设利用 Mean Shift 算法对原始图像过分割后小区域的个数为 L ,分割的相位数为 n ,则本文算法所构造的图的节点数为 $L \times (n-1)$ (除源点与接收点外)。与文献[4]中算法相比较,以合成图为例,文献[4]中算法构造的图的节点数为 $256 \times 256 \times (n-1)$,关系矩阵的大小为 $(256 \times 256 \times (n-1))^2$ 。在前面所述的硬件条件下,用 Matlab 7.0 编程实现会出现内存不足的提示,故文献[4]中算法的分割结果是用 C++ 编程实现的。

图 3 为对合成图像的分割结果比较。(a)为原始的要分割的合成图像,其中含有标准差为 20 的高斯噪声。(b)为利用 Mean Shift 算法对(a)过分割后各区域的边界曲线图,各参数取值为 $h_s=8, h_r=7, M=30$,分割后小区域的个数为 36。(c)为本文算法的分割结果,算法中的图是基于(b)中的小区域构造的。(d)为文献[4]中算法的分割结果。可以看出,利用本文方法和文献[4]中算法的分割结果比较接近,原始图像中的尖角处以及目标内部的洞都能被很好地检测出来。(e)为利用 Mean Shift 算法的分割结果,所需参数 $h_s=8, h_r=7$,当参数 M 取得充分大时,经多次试验,当 $M=1009$ 时,利用 Mean Shift 算法也能将原始图像分割成 4 个区域,如(e)所示,从图中可以看出,分割的结果不够准确,圆环状目标内部的洞没能检测出来。如果 M 的取值小于 1008,则 Mean Shift 算法至少能将原始图像分割为 5 个区域,除了应该分割出来的 4 个区域外,将圆环中的洞也当作目标分割出来了。所以,利用 Mean Shift 算法分割的效果不佳。



图 3 合成图像的分割结果比较

图 4 为对医学图像分割结果的比较。其中(a)为原始医学图像,要从中分割出 3 个相位:黑色区域、灰色区域以及白色区域;(b)为 Mean Shift 过分割后各区域的边界曲线图,各参数值为 $h_s=10, h_r=5, M=20$,过分割后小区域数为 428;(d),(e)分别为本文方法和文献[4]中算法的分割结果,可以看出,本文方法和文献[4]中方法都能将这 3 个区域很好地分割出来,分割结果差别不大。

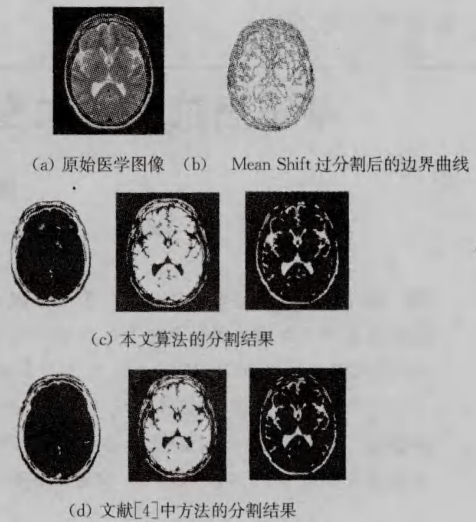


图 4 医学图像的分割结果比较

结束语 本文给出了一种新的极小化 Mumford-Shah 泛函的分片常数水平集表示的图切割算法。该方法基于对原始图像过分割后产生的小区域构造图,因此称为基于区域的图切割算法。与 Egil Bae 和 Tai Xue-Cheng 提出的图切割算法相比,所构造的图的节点数大大减少了,因而提高了算法的实现效率;而且数值实验结果显示,本文方法保持了较好的分割效果。然而,算法对用于过分割的局部分割方法有一定的依赖性,今后还须就此方面的问题改进算法。

参考文献

- [1] Komodakis N, Tziritis G, Paragios N. Fast, approximately optimal solutions for single and dynamic MRFS[C]//Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE Conference, 2007; 1-8, 17-22
- [2] Lempitsky V, Rother C, Blake A. Logcut-efficient graph cut optimization for markov random fields[C]//IEEE 11th International Conference on Computer Vision. 2007; 1-8, 14-21
- [3] Dahl G, Storvik G, Fadnes A. Large-scale integer programs in image analysis [J]. Operation Research, 2002, 50(3): 490-500
- [4] Bae E, Tai X C. Graph Cut Optimization for the Piecewise Constant Level Set Method Applied to Multiphase Image Segmentation [J]. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, 2009, 5567: 1-13
- [5] Lie J, Lysaker M, Tai X C. A variant of the level set method and applications to image segmentation [J]. Mathematics of Computation, 2006, 75(255): 1155-1174
- [6] Tai X C, Christiansen O, Lin P, et al. Image segmentation using some piecewise constant level set methods with MBO type of project [J]. International Journal of Computer Vision, 2007, 73: 61-76
- [7] Chambolle A. Total variation minimization and a class of binary MRF models [J]. Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, 2005, 3757: 136-152
- [8] Ranchin F, Chambolle A, Dibos F. Total variation minimization and graph cuts for moving objects segmentation [J]. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, 2007, 4485: 743-753
- [9] Tai X C, Yao C. Fast PCLSM with Newton updating algorithm [J]. Image Processing Based on Partial Differential Equations, 2007, Part III: 249-262
- [10] Comaniciu D, Meer P. Mean shift: A robust approach toward feature space analysis [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24: 603-619