基于对象导出三支概念格的形式背景粒约简方法

常欣欣 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

摘 要 形式背景的属性约简是形式概念分析的重要研究方向。研究者针对形式背景提出了多种属性约简标准并建立了属性约简方法。文中研究了形式背景基于对象导出三支概念格的约简问题,通过刻画对象之间的区分属性提出了一种新的粒约简计算方法,该方法无需构造基于对象导出的三支概念格;同时,证明了基于三支概念格的形式背景粒约简与基于粗糙集理论的分类约简等价。

关键词 形式背景,对象导出三支概念格,粒约简,分类约简

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.041

Approach for Granular Reduction in Formal Context Based on Objects-induced Three-way Concept Lattices

CHANG Xin-xin QIN Ke-yun

(College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract The attribute reduction in formal context is an important topic of formal concept analysis. Researchers have put forward many kinds of attribute reduction criterions and methods aiming at formal context. This paper studied the reduction in formal context based on objects-induced three-way concept lattices. A new approach for granular reduction was proposed by using discernibility attributes of the objects. In this new approach of granular reduction, the objects-induced three-way concept lattices don't need to be constructed. Furthermore, it is proved that objects-induced three-way concept lattices based granular reduction and rough set based classification reduction are equivalent.

Keywords Formal context, Objects-induced three-way concept lattices, Granular reduction, Classification reduction

1 引言

Wille于1982年提出了形式概念分析(FCA)理论[1],也称概念格理论。该理论是根据数据集中对象与属性之间的二元关系建立的一种概念层次结构,可用于概念的表示、排序和显示,是数据分析与规则提取的一种有效工具。作为知识处理的有力工具,概念格理论已广泛应用于知识工程、机器学习、模式识别、专家系统、决策分析、数据挖掘等领域[1-3]。

作为形式概念分析的重要研究内容之一,形式背景的属性约简理论与方法受到了学术界的广泛关注。通过属性约简可以获得更简洁的知识,并揭示属性之间的依赖关系。Zhang等[4]给出了协调属性集的判定定理,提出了形式概念的区分属性与区分矩阵的概念,并借助布尔逻辑公式转换给出了约简的计算方法。Liu等[5]针对基于属性的概念格与基于对象的概念格给出了协调集判定定理,通过概念的区分属性给出了属性约简方法,并刻画了概念格约简与信息系统约简之间的关系。Wu等[6]将粒计算理论与概念格理论相结合,提出了形式背景中的粒结构与粒协调集的概念,给出了粒约简计算方法,其中的约简计算无需构造概念格,可直接通过对象的区分属性获得,计算简便易行。Shao等[7]针对模糊形式背景提出了粒协调集与粒约简的概念,给出了粒约简计算方法。根据粒计算观点,张文修等[8-10]给出了认知的粒化描述和新的认知模型。李金海等[11]提出了概念格外延信息量的概念,给出了信息量计算方法并提出了一种启发式属性约简计算方法。Wei等[12]从决策规则的角度提出了决策形式背景的强协调性与弱协调性概念,对于强协调决策形式背景,给出了协调集的判定定理及约简方法,对于弱协调决策形式背景,通过蕴含映射给出了约简计算方法。Wu等[6]提出了粒协调决策形式背景的概念,并通过对象的区分属性矩阵给出了粒协调决策形式背景的约简方法。Li等[13-16]对决策形式背景基于决策规则的约简问题进行了系统研究,提出了决策规则之间的蕴涵关系、冗余决策规则、必要决策规则等概念,给出了冗余决策规则及必要决策规则的等价描述,借助区分属性给出了决策形式背景保持决策规则的约简方法。Shao等[17]借助决策属性建立了概念之间的等价关系,给出了概念的压缩方法以及决策规则获取方法。李进金等[18]通过引入交式可约元提出了一种形式背景属性约简方法,给出了一种概念格生成算法,针对协调决策形式背景给出了一种属性约简方法。三支决策是Yao于2009年提出的以"三分而治"为主要思想的一个有效决策理论[19-21],即将一个整体(论域)分为3个部

到稿日期:2017-08-07 返修日期:2017-11-12 本文受国家自然科学基金(61473239,61372187)资助。

常欣欣(1991-),女,硕士生,主要研究方向为概念格理论;**秦克云**(1962-),男,教授,博士生导师,CCF高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail:keyunqin@263.net(通信作者)。

分,并采取有效的策略分别进行处理。Qi 等[22]于 2014 年将三支决策理论应用于形式概念分析,在形式背景中提出了三支形式概念,建立了三支概念格。近几年,三支决策思想受到了广泛关注,同时三支决策思想在信息系统中扮演着重要的角色,并被应用于计算机科学、信息科学、社会科学等多个领域。由于三支决策和形式概念的广泛应用,三支形式概念分析成为了知识发现和数据分析的重要工具。Ren 等[23]讨论了三支概念格的属性约简问题,提出了 4 种约简的概念并给出了约简计算方法。刘琳等[24]基于三支概念格研究了决策形式背景的规则提取问题。

本文针对基于对象导出三支概念格的形式背景,提出了新的粒约简方法,并讨论了基于对象导出三支概念格的形式背景粒约简与分类约简、经典形式背景粒约简之间的关系。新的粒约简方法无需构造概念格,可以通过对象的区分属性获得,计算简便易行。

2 预备知识

形式概念分析基于形式背景展开。一个形式背景为一个三元组(G,M,I),其中,G 为所讨论的对象构成的集合,M 为 G 中对象所具有的属性构成的集合,I 是 G 中对象和 M 中属性之间的关系,即 $I\subseteq G\times M$。对于任意 $g\in G,m\in M$,如果$(g,m)\in I$,则表示对象 g 具有属性 m;如果$(g,m)\notin I$,则表示对象 g 不具有属性 m。为刻画形式概念,Wille[1]引入了如下算子:对于任意 $A\subseteq G,B\subseteq M$,有:

$$A^{*}=\{m\in M;\forall a\in A((a,m)\in I)\} \tag{1}$$

$$B^{*}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\in I)\} \tag{2}$$

即 A^{*} 为 A 中对象所具有的公共属性构成的集合,B^{*} 为具有 B 中所有属性的对象构成的集合。对于 $\forall g\in G$,记$\{g\}^{*}=g^{*}$;对于 $\forall m\in M$,记$\{m\}^{*}=m^{*}$。

定义 1[1] 设(G,M,I)为形式背景,$A\subseteq G,B\subseteq M$。如果一个二元组$(A,B)$满足 $A^{*}=B$ 且 $A=B^{*}$,则称(A,B)为一个形式概念。其中,A 称为(A,B)的外延,B 称为(A,B)的内涵。

(G,M,I)中所有形式概念构成的集合记为 $L(G,M,I)$。对于任意$(A_1,B_1),(A_2,B_2)\in L(G,M,I)$,定义它们之间的序关系为:

$$(A_1,B_1)\leqslant(A_2,B_2)\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2(\Leftrightarrow B_2\subseteq B_1)$$

定理 1[1] 设(G,M,I)为形式背景。$L(G,M,I)$关于$\leqslant$构成完备格,称为概念格,其中对于任意$(X_j,Y_j)\in L(G,M,I),j\in J$($J$ 为指标集),有:

$$\bigwedge_{j\in J}(X_j,Y_j)=(\bigcap_{j\in J}X_j,(\bigcup_{j\in J}Y_j)^{**}) \tag{3}$$

$$\bigvee_{j\in J}(X_j,Y_j)=((\bigcup_{j\in J}X_j)^{**},\bigcap_{j\in J}Y_j) \tag{4}$$

在形式背景(G,M,I)中,如果对于任意 $g\in G,m\in M$ 有 $g^{*}\neq\emptyset,g^{*}\neq M,m^{*}\neq\emptyset,m^{*}\neq G$,则称$(G,M,I)$为正则形式背景[25]。以下假设所讨论的形式背景都是正则形式背景。

在形式背景(G,M,I)中,$\forall D\subseteq M$,记 $I_D=I\cap(G\times D)$,那么(G,D,I_D)也是一个形式背景。对于运算 $A^{*}(A\subseteq G)$,在(G,M,I)下仍用 A^{*} 表示,在(G,D,I_D)下用 A^{*D} 表示。显然,$I_M=I,A^{*_M}=A^{*},A^{*_D}=A^{*}\cap D$。

定义 2[26] 设 L 是一个格。称元素 $x\in L$ 是并不可约元,如果 x 满足:

1)$x\neq 0$(如果 L 有 0 元);

2)对于任意 $a,b\in L$,若 $x=a\wedge b$,则 $x=a$ 或 $x=b$。

Qi 等[22]于 2014 年将三支决策理论应用于形式概念分析,提出了三支形式概念。对于任意 $X\subseteq G$ 和 $B\subseteq M$,记:

$$X^{\overline{*}}=\{m\in M;\forall x\in X,((x,m)\notin I)\} \tag{5}$$

$$B^{\overline{*}}=\{g\in G;\forall b\in B,((g,b)\notin I)\} \tag{6}$$

进一步,对于任意 $X\subseteq G$ 和 $A,B\subseteq M$,记:

$$X^{\lessdot}=(X^{*},X^{\overline{*}}) \tag{7}$$

$$(A,B)^{\gtrdot}=\{x\in G;x\in A^{*}\wedge x\in B^{\overline{*}}\}=A^{*}\cap B^{\overline{*}} \tag{8}$$

根据以上算子,Qi 等[22]给出了对象导出三支概念格的定义。

定义 3[22] 设(G,M,I)为一形式背景,对于任意 $X\subseteq G$ 和 $A,B\subseteq M$,如果 $X^{\lessdot}=(A,B)$且$(A,B)^{\gtrdot}=X$,则称$(X,(A,B))$为一个对象导出三支概念,以下简记为 OE 概念。其中,X 称为$(X,(A,B))$的外延,(A,B)称为$(X,(A,B))$的内涵。

设(G,M,I)为一形式背景,由该形式背景中所有 OE 概念构成的集合记为 $OEL(G,M,I)$。对于任意$(X,(A,B))$,$(Y,(C,D))\in OEL(G,M,I)$,定义它们之间的序关系为:$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow(C,D)\sqsubseteq(A,B)$且$(C,D)\sqsubseteq(A,B)\Leftrightarrow C\subseteq A,D\subseteq B$。

$OEL(G,M,I)$按照此关系构成格,称为对象导出三支概念格,以下简记为 OE 概念格,其上确界与下确界为:

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))=(X\cap Y,((A,B)\cup(C,D))^{\gtrdot\lessdot}) \tag{9}$$

$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))=((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(A,B)\cap(C,D)) \tag{10}$$

对于任意 $x\in G$,以下将$\{x\}^{\lessdot}$简记为 $x^{\lessdot}$。显然,$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})=(x^{**}\cap x^{\overline{**}},(x^{*},x^{*}))\in OEL(G,M,I)$。对于 $E\subseteq M$,在形式背景(G,E,I_E)下,由式(8)、式(9)定义的算子记为$\lessdot_E,\gtrdot_E$。

3 基于对象导出三支概念格的形式背景粒约简

对于形式背景,Wu 等[6]基于粒结构提出了粒约简的概念。

定义 4[6] 设 $S=(G,M,I)$为形式背景,$E\subseteq M$。称 E 为 S 的粒协调集,如果对于任意 $x\in U$,有 $x^{*_E*_E}=x^{**}$,则 S 的极小粒协调集称为 S 的粒约简。

类似于经典形式背景粒约简的定义,Ren 等[23]提出了基于 OE 概念格的形式背景粒约简与并不可约约简概念,并刻画了粒约简与并不可约约简之间的关系。

定义 5[23] 设 $S=(G,M,I)$为一形式背景,$E\subseteq M$,如果 $Ext_{\mathrm{OEJ}}(G,M,I)=Ext_{\mathrm{OEJ}}(G,E,I_E)$,则称 E 为 S 的 OE 并不可约协调集,以下简记为 OEJ 协调集。极小的 OEJ 协调集称为 OEJ 约简。其中 $Ext_{\mathrm{OEJ}}(G,M,I)$是 $OEL(G,M,I)$中并不可约元的外延构成的集合。

定义 6[23] 设 $S=(G,M,I)$为一形式背景,$E\subseteq M$,如果对于任意 $x\in G$,有 $x^{\lessdot\gtrdot}=x^{\lessdot_E\gtrdot_E}$,则称 E 是基于对象导出三支概念格的形式背景的粒协调集,以下简记为 OEG 协调集。极小的 OEG 协调集称为 OEG 约简。

定理 2[23] 设 $S=(G,M,I)$为一形式背景,$E\subseteq M$,E 为 S 的 OEJ 协调集当且仅当 E 为 S 的 OEG 协调集。

为计算基于 OE 概念格的形式背景约简，Ren 等[23]提出了三支概念之间的区分属性。

定义 7[23]　设 $S=(G,M,I)$ 为一形式背景，对任意 $(X,(A,B))$，$(Y,(C,D))\in OEL(G,M,I)$，称：

$$DIS_{\mathrm{OEL}}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))=\begin{cases}(A-C,B-D), & \text{若}(X,(A,B))\prec(Y,(C,D))\\ \varnothing, & \text{否则}\end{cases}\tag{11}$$

为 $(X,(A,B))$ 与 $(Y,(C,D))$ 的 OE 可辨识属性集。

记 $\Lambda_{\mathrm{OEJ}}=(DIS_{\mathrm{OEL}}((X,(A,B)),(Y,(C,D))))$，其中 $(X,(A,B))$ 为 $OEL(G,M,I)$ 中的并不可约元。如果 $DIS_{\mathrm{OEL}}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))=(E,F)$，则用 $E\cup F$ 表示 $DIS_{\mathrm{OEL}}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))$。

定理 3[23]　设 (G,M,I) 是一个形式背景，$E\subseteq M$，E 为该形式背景的 OEG 协调集的充要条件为：如果 $(X,(A,B))\prec(Y,(C,D))$，其中 $(X,(A,B))$ 为 $OEL(G,M,I)$ 中的并不可约元，则 $E\cap DIS_{\mathrm{OEL}}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))\neq\varnothing$。

定义 8[23]　设 (G,M,I) 是一个形式背景，则 OEJ 可辨识函数与 OEG 可辨识函数的定义如下：

$$f(\Lambda_{\mathrm{OEJ}})=f(\Lambda_{\mathrm{OEG}})=\bigwedge_{H\in\Lambda_{\mathrm{OEJ}}}\left(\bigvee_{h\in H}h\right)\tag{12}$$

通过吸收率和分配率，可以将辨识函数变换为极小析取范式，这个极小析取范式的所有合取子式是该形式背景的全部 OEG 约简[27]。

下面给出一种新的 OEG 协调集判定定理，并由该定理得出新的 OEG 约简计算方法。

定理 4（OEG 协调集判定定理）　设 (G,M,I) 为一形式背景，$E\subseteq M$，E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集的充要条件为：对于任意 $x,y\in G$，若 $(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})\neq\varnothing$，则 $E\cap((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\neq\varnothing$。

证明：(⇒)假设 E 是形式背景 (G,M,I) 的 OEG 协调集，$(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})\neq\varnothing$，其中 $x,y\in G$。则 $x^{*}-y^{*}\neq\varnothing$ 或 $x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}\neq\varnothing$，即 $y\notin x^{**}$ 或 $y\notin x^{\bar{*}\bar{*}}$，从而 $y\notin x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$，由于 E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集，因此 $y\notin x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}=x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$。于是有 $y\notin x^{*_E*_E}$ 或 $y\notin x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$，因此 $x^{*_E}-y^{*_E}\neq\varnothing$ 或 $x^{\bar{*}_E}-y^{\bar{*}_E}\neq\varnothing$，即 $x^{*}\cap E-y^{*}\cap E\neq\varnothing$ 或 $x^{\bar{*}}\cap E-y^{\bar{*}}\cap E\neq\varnothing$，从而 $E\cap((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\neq\varnothing$。

(⇐)假设对于 $\forall x,y\in G$，若 $(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})\neq\varnothing$，则 $E\cap((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\neq\varnothing$。证明 E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集，只需证对于任意 $x\in G$，$x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}=x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$，$x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}\subseteq x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$ 显然成立，下证 $x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}\subseteq x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$。若 $y\notin x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$，则 $y\notin x^{**}$ 或 $y\notin x^{\bar{*}\bar{*}}$，即 $x^{*}-y^{*}\neq\varnothing$ 或 $x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}\neq\varnothing$，故 $(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})\neq\varnothing$。根据假设可知 $E\cap((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\neq\varnothing$，即 $(x^{*_E}-y^{*_E})\cup(x^{\bar{*}_E}-y^{\bar{*}_E})\neq\varnothing$，因此 $x^{*_E}-y^{*_E}\neq\varnothing$ 或 $x^{\bar{*}_E}-y^{\bar{*}_E}\neq\varnothing$，从而有 $y\notin x^{*_E*_E}$ 或 $y\notin x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$，即 $y\notin x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$。于是 $x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}\subseteq x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$。综上可得：$x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}=x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}\cap x^{*_E*_E}$，即 E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集。

由定理 4，形式背景 (G,M,I) 的 OEG 可辨识函数为：

$$f=\bigwedge\bigvee_{x,y\in G}((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\tag{13}$$

其中，$(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})\neq\varnothing$。通过吸收率和分配率，可以将辨识函数变换为最小析取范式，该最小析取范式的所有合取子式是形式背景的全部 OEG 约简[27]。

形式背景 (G,M,I) 的 OEG 约简 E 的算法步骤如下：

步骤 1　输入形式背景 (G,M,I)；

步骤 2　计算 x 与 y 之间的可辨识属性集，其中 $x,y\in G$；

步骤 3　计算 OEG 可辨识函数 f；

步骤 4　计算可辨识函数 f 的最小析取范式：$f=\bigvee_{k=1}^{t}(\bigwedge_{s=1}^{q_k}a_s)$；

步骤 5　令 $C_k=\{a_s\mid s\leqslant q_k\}$，$E=\{C_k\mid k\leqslant t\}$；

步骤 6　输出 E。

例 1　考虑文献[23]中给出的形式背景 (G,M,I)，其中 $G=\{1,2,3,4\}$，$M=\{a,b,c,d,e\}$，形式背景 (G,M,I) 如表 1 所列。计算该形式背景的 OEG 约简。

表 1　形式背景 (G,M,I)

Table 1　Formal context (G,M,I)

	a	b	c	d	e
1	1	1	0	1	1
2	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	1	1	1	0	1

由该形式背景可得：$1^{*}=\{a,b,d,e\}$，$1^{\bar{*}}=\{c\}$，$2^{*}=\{a,b,c\}$，$2^{\bar{*}}=\{d,e\}$，$3^{*}=\{d\}$，$3^{\bar{*}}=\{a,b,c,e\}$，$4^{*}=\{a,b,c,e\}$，$4^{\bar{*}}=\{d\}$。因此，该形式背景的 OEG 可辨识函数为：

$$\begin{aligned}f&=\bigwedge\bigvee_{x,y\in G}((x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}}))\\&=e\wedge(c\vee d)\wedge(c\vee d\vee e)\wedge(a\vee b\vee e)\wedge(a\vee b\vee c\vee d)\\&\quad\wedge(a\vee b\vee c\vee d\vee e)\\&=e\wedge(c\vee d)\\&=(e\wedge c)\vee(e\wedge d)\end{aligned}$$

故该形式背景的 OEG 约简为 $\{e,c\}$，$\{e,d\}$。此结果与文献[23]中的计算结果相同。

相对于文献[23]中给出的粒约简计算方法，通过定理 4 给出的粒约简计算方法无需构造三支概念格，计算相对简单。

形式背景 (G,M,I) 为二值信息系统。按照粗糙集的观点，$E\subseteq M$ 确定对象集合上的一个不可区分关系 R_E，满足：对于任意 $x,y\in G$，$(x,y)\in R_E$ 当且仅当对于任意 $a\in E$，有 $(x,a)\in I$ 且 $(y,a)\in I$，或 $(x,a)\notin I$ 且 $(y,a)\notin I$。显然，借助概念格中的算子，不可区分关系可以描述为：$(x,y)\in R_E$ 当且仅当 $x^{*_E}=y^{*_E}$。如果 $R_E=R_M$，则称 E 为 S 的分类协调集。

由于 $(x^{*}-y^{*})\cup(x^{\bar{*}}-y^{\bar{*}})=\alpha(x,y)$ 表示能够区分对象 x,y 的属性，因此可得以下定理。

定理 5　设 (G,M,I) 为一形式背景，$E\subseteq M$。E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集当且仅当 E 是分类协调集。

该定理说明形式背景基于三支概念格的粒约简与基于粗糙集理论的分类约简等价。

定理 6　设 (G,M,I) 为一形式背景，$E\subseteq M$。如果 E 是 $L(G,M,I)$ 的粒协调集，则 E 是 (G,M,I) 的 OEG 协调集。

证明：若要证明该定理成立，即证如果 E 是 $L(G,M,I)$ 的粒协调集，则对于任意 $x\in G$，$x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}=x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$ 成立。由于 $x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}\subseteq x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$ 显然成立，因此只需证明 $x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}\supseteq x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$。设 $y\notin x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}}$，1)若 $y\notin x^{**}$，$y\notin x^{*_E*_E}$，从而 $y\notin x^{*_E*_E}\cap x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$；2)若 $y\in x^{**}$，则 $y\notin x^{\bar{*}\bar{*}}$，从而 $x^{*}\subseteq y^{*}$，$x^{\bar{*}}\not\subseteq y^{\bar{*}}$。下证 $y\notin x^{\bar{*}_E\bar{*}_E}$。若 $y\in$

$x^{\overline{*}_E\overline{*}_E}$,对于任意 $a\in E$,当$(y,a)\in I$ 时,必有$(x,a)\in I$。于是 $y^{*_E}\subseteq x^{*_E}$,$x\in y^{*_E*_E}=y^{**}$,则 $y^*\subseteq x^*$,与 $x^*\subseteq y^*$,$x^{\overline{*}}\not\subset y^{\overline{*}}$ 矛盾。故 $y\notin x^{\overline{*}_E\overline{*}_E}$,从而 $y\notin x^{*_E*_E}\cap x^{\overline{*}_E\overline{*}_E}$。综上,$x^{**}\cap x^{\overline{*}\overline{*}}=x^{*_E*_E}\cap x^{\overline{*}_E\overline{*}_E}$,即 E 是(G,M,I)的 OEG 协调集。

推论 1 如果 E 是$(G,M,\sim I)$的粒协调集,则 E 是(G,M,I)的 OEG 协调集。

该推论的证明类似于定理 6。

结束语 本文在已有文献的基于对象导出三支概念格的粒约简方法的基础上,提出了新的粒约简方法,该方法简便易行,不必计算概念格。另外,刻画了基于对象导出三支概念格的粒约简与分类约简的关系。下一步,我们将研究决策形式背景基于三支概念格的属性约简方法。

参考文献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[M]// Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2009: 314-339.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis, Mathematic Foundations[M]. Springer, 2005.

[3] 徐伟华,李金海,魏玲,等. 形式概念分析理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2016.

[4] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice[J]. Science in China F, 2005, 48(6): 713-726.

[5] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.

[6] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.

[7] SHAO M W, YANG H Z, WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73(1): 265-275.

[8] ZHANG W X, XU W H. Cognitive model based on granular computing[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 957-971. (in Chinese)
张文修,徐伟华. 基于粒计算的认知模型[J]. 工程数学学报,2007,24(6):957-971.

[9] XU W, PANG J, LUO S. A novel cognitive system model and approach to transformation of information granules[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(3): 853-866.

[10] XU W, LI W. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(2): 366-379.

[11] LI J H, LV Y J, LIANG B M. Algorithm for attribute reduction based on information quantity of concept lattice extension[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(10): 144-146. (in Chinese)
李金海,吕跃进,梁斌梅. 基于概念格外延信息量的属性约简算法[J]. 计算机工程与应用,2009,45(10):144-146.

[12] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China F, 2008, 51(7): 910-923.

[13] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.

[14] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189(4): 191-207.

[15] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71(1): 435-445.

[16] LI J H, LV Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(7): 182-188. (in Chinese)
李金海,吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识,2009,39(7):182-188.

[17] SYHAO M W, LEUNG Y, WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 259-274.

[18] LI J J, ZHANG Y L, WU W Z, et al. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation [J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 37(8): 1768-1774. (in Chinese)
李进金,张燕兰,吴伟志,等. 形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成[J]. 计算机学报,2014,37(8):1768-1774.

[19] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554.

[20] YAO Y Y. Three-Way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer-Verlag, 2009: 642-649.

[21] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[22] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way formal concept analysis [C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer, Cham, 2014: 732-741.

[23] REN R, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99(C): 92-102.

[24] LIU L, QIAN T, WEI L. Rules extraction in formal decision contexts based on attributes-Induced three-way concept lattices [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2016, 46(4): 481-487. (in Chinese)
刘琳,钱婷,魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取[J]. 西北大学学报(自然科学版),2016,46(4):481-487.

[25] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice[J]. Science in China F, 2005, 48(6): 713-726.

[26] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to lattices and order[M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2002.

[27] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社,2003.