覆盖 Vague 集

汤建国[1,3] 佘堃[1] 祝峰[2]
(电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 611731)[1] (漳州师范学院粒计算实验室 漳州 363000)[2]
(新疆财经大学计算机科学与工程学院 乌鲁木齐 830012)[3]

摘 要 覆盖粗糙集和 Vague 集都是处理不确定性问题的数学工具,它们分别是粗糙集和模糊集的扩展。已有的覆盖粗糙集模型在求上、下近似时,可能将一些实际上并非肯定属于给定集合的元素纳入到下近似中,而一些可能属于给定集合的元素却没有纳入到上近似中,这就会改变一些元素与给定集合的关系。通过深入分析论域中的元素与其相关覆盖元之间的关系,建立了覆盖 Vague 集。该覆盖 Vague 集能够从一种新的角度反映出论域中各元素与给定集合之间的从属程度。进一步研究了覆盖 Vague 集与覆盖粗糙集中一些重要概念之间的关系。最后讨论了当覆盖退化为划分时覆盖 Vague 集的特性。

关键词 覆盖 Vague 集,粗糙集,真隶属函数,假隶属函数,基数和
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Covering Vague Sets

TANG Jian-guo[1,3] SHE Kun[1] ZHU William[2]
(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)[1]
(Lab of Granular Computing, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China)[2]
(School of Computer Science and Engineering, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi 830012, China)[3]

Abstract Both covering-based rough sets and vague sets are the mathematical tools to deal with the uncertainty information. The former is the extension of the rough set theory and the latter of the fuzzy sets. Computing the lower and the upper approximations with the existing covering-based rough set models, some elements, which are actually not sure whether they completely belong to the given set, may be put into the lower approximation. Similarly, some elements, which maybe belong to the given set, are excluded from the upper approximation. By analyzing carefully the relationship between the element of the universe and the covering-elements, a covering vague set was established. This covering vague set can reflect the degree of membership of every element of universe to the given set from a new viewpoint. Furthermore, some relationships between the covering vague set and some important concepts of covering-based rough sets were studied. Finally, the properties of a covering vague set that when a covering coincides with a partition were discussed.

Keywords Covering vague sets, Rough sets, Truth-membership function, False-membership function, Sum of base number

1 引言

粗糙集是一种重要的处理不确定性问题的数学工具[1]。作为一种经典集合论的扩展理论,粗糙集通过一对近似集合,即上近似集和下近似集,来描述一个任意给定的集合。由于粗糙集在辨识目标集合时不需要任何先验知识,因此被广泛应用于人工智能、数据挖掘以及决策分析等众多领域[2-5]。随着对粗糙集研究的不断深入,学者们认为粗糙集中的等价关系条件过于苛刻,限制了粗糙集理论的发展与应用的推广,因此将其扩展为相容关系[6]、相似关系[7,8]等较为一般的二元关系。同时,也有学者将等价关系对应的划分进行扩展,把论域的划分扩展为覆盖[9,10],从而提出了覆盖粗糙集理论。

覆盖粗糙集是粗糙集的一个重要扩展。覆盖是比划分更一般的概念,在现实世界中广泛存在,最近几年得到了越来越多学者的关注,从而出现了很多有意义的研究成果[11-19]。祝峰等[20]提出的可约元概念不仅回答了不同覆盖为何产生相同上下近似的问题,而且有效地消除了一个覆盖中的冗余覆盖元,极大地促进了覆盖粗糙集的理论研究与实际应用。此外,由于覆盖相对划分来说,在描述给定集合时一般具有更大的粗糙性,为了改善这一不足,Tang 等[21]从元素与覆盖元之间的关系出发,对覆盖粗糙集中的覆盖元进行了细化研究,提出了覆盖元细化的概念,并给出了细化的具体算法。特别地,

到稿日期:2011-02-20 返修日期:2011-04-25 本文受国家自然科学基金资助项目(60873077)资助。
汤建国(1978—),男,博士生,讲师,主要研究领域为粗糙集,E-mail:tjguo@126.com;佘 堃(1967—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为智能中间件计算、智能安全、粗糙集;祝 峰(1962—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为粗糙集、粒计算、软件水印。

李凯和王石平等用拟阵理论的方法来研究覆盖粗糙集。李凯等[22]提出了拟阵覆盖模糊粗糙集的概念，分析了其相关性质；王石平等[23]则研究了覆盖粗糙集与拟阵之间的联系，建立了覆盖粗糙集的拟阵结构。这些工作为研究粗糙集和覆盖粗糙集提供了一种全新的方式。此外，胡军等[24]研究了基于覆盖的粗糙模糊集，解决了之前此类研究中存在的两个不足之处。还有很多学者从其他不同的角度对覆盖粗糙集做了大量的研究，极大地丰富了覆盖粗糙集理论及其应用的研究。

Vague集是1993年由Gau[25]等提出的，它将模糊集中元素的单一隶属度扩展为由真隶属函数和假隶属函数确定的一对隶属度，从而使其对事物模糊性的描述比模糊集更为全面。由于Vague集具有很多与模糊集相类似的优点，因此很多学者都将其与粗糙集结合起来进行研究。闫德勤等[26]研究粗糙集与Vague集之间的关系，将任意一个给定集合的粗糙近似集表示成一个Vague集，并提出了粗糙Vague集模型，研究了它的相关性质；徐久成等[27]研究覆盖粗糙集与Vague集的结合，提出了覆盖粗糙Vague集，并给出了一种基于知识含量的覆盖粗糙Vague集不确定性度量的方式。梁家荣提出了Vague关系的概念以及Vague等价关系的概念，给出了二元Vague等价关系的充要条件。

本文从覆盖粗糙集中元素与其最小描述、隶属族及其邻域的关系出发，结合Vague集的特点，即元素的真隶属度与假隶属度之和不大于1，将两种主要的覆盖粗糙集模型分别转化为相应的Vague集。这种Vague集不仅反映了论域中各元素与给定集合之间的从属关系，而且充分考虑了那些在覆盖粗糙集模型中被忽视的元素与给定集合之间的关系。因此，对这种Vague集较覆盖粗糙集和覆盖粗糙模糊集而言，能够从给定数据中挖掘出更多有用的信息和知识。进而研究了这种Vague集的性质，以及它与覆盖粗糙集中一些重要概念之间的关系，建立起了两者之间的联系。最后，研究了覆盖退化为划分时覆盖Vague集的一些特性。

2 背景知识

为了方便理解本文的观点，本节将回顾一些有关覆盖粗糙集和Vague集的基本概念。

2.1 覆盖粗糙集

定义1(覆盖[28]) 设U是一个论域，$\boldsymbol{C}$是U的一个子集族。如果$\boldsymbol{C}$中的所有子集都不空，且$\bigcup \boldsymbol{C}=U$，则称$\boldsymbol{C}$是U的一个覆盖；称$(U,\boldsymbol{C})$为一个覆盖近似空间。

定义2(最小描述[28,29]) 设$(U,\boldsymbol{C})$为一个覆盖近似空间，$x\in U$，则称$Md_C(x)=\{K\in\boldsymbol{C}\mid x\in K\wedge(\forall S\in\boldsymbol{C}\wedge x\in S\subseteq K\Rightarrow S=K)\}$为$x$关于$\boldsymbol{C}$的最小描述。在不混淆的情况下，下标$\boldsymbol{C}$可省略。

定义3(友元[14]) 设$(U,\boldsymbol{C})$是一个覆盖近似空间，对于任意一个$x\in U$，称$F_C(x)=\{K\mid x\in K\wedge K\in\boldsymbol{C}\}$为$x$关于$\boldsymbol{C}$的隶属族。在不混淆的情况下，下标$\boldsymbol{C}$可省略。

定义4(邻域[28,30]) 设$(U,\boldsymbol{C})$是一个覆盖近似空间，对于任意一个$x\in U$，称$N_C(x)=\bigcap\{K\mid x\in K\wedge K\in\boldsymbol{C}\}$为$x$关于$\boldsymbol{C}$的邻域。在不混淆的情况下，下标$\boldsymbol{C}$可省略。

本文将针对下面两类覆盖粗糙集模型展开讨论，方便起见，分别称它们为第一类和第二类覆盖粗糙集。

定义5(第一类覆盖粗糙集[31]) 设$\boldsymbol{C}$是论域U的一个覆盖，对于任意一个集合$X\subseteq U$，定义

$X_*=\bigcup\{K\mid K\in\boldsymbol{C}\wedge K\subseteq X\}$为$X$的覆盖下近似；

$X^*=X_*\bigcup(\bigcup\{\bigcup Md(x)\mid x\in X-X_*\})$为$X$的覆盖上近似。

定义6(第二类覆盖粗糙集[32]) 设$\boldsymbol{C}$是论域U的一个覆盖，对于任意一个集合$X\subseteq U$，定义

$X_\#=\bigcup\{K\mid K\in\boldsymbol{C}\wedge K\subseteq X\}$为$X$的覆盖下近似；

$X^\#=X_\#\bigcup(\bigcup\{N(x)\mid x\in X-X_\#\})$为$X$的覆盖上近似；

2.2 Vague集

定义7(Vague集[25]) 设U是一个点(或对象)空间，x为U中任意一个元素。U上的一个Vague集V由一个真隶属函数t_V和一个假隶属函数f_V来表示。其中，t_V表示由支持x的证据所确定的隶属度的下界，f_V表示由反对x的证据所确定的否定隶属度的下界。t_V和f_V都是U到$[0,1]$区间的映射，即$t_V:U\to[0,1]$，$f_V:U\to[0,1]$，并且$t_V+f_V\leqslant 1$。则x关于V的隶属度$V(x)$存在于$[0,1]$上的一个子区间$[t_V(x),1-f_V(x)]$中。

换句话说，x的确切隶属度$V(x)$可能是未知的，但它是被限定在区间$[t_V(x),1-f_V(x)]$中的，即$t_V(x)\leqslant V(x)(1-f_V(x)$，其中，$t_V+f_V\leqslant 1$。

由此，关于x的知识精度可以通过差值$1-t_V(x)-f_V(x)$这个不确定值来刻画。也就是说，这个差值越小，则关于x的知识相对来说就更精确；反之，关于x的知识相对来说就越少。如果$t_V(x)=1-f_V(x)$，则关于x的知识是确定的，此时Vague集就退化为模糊集。当$t_V(x)$和$1-f_V(x)$同时为1或0时(这取决于x是否确定属于V或者确定不属于V)，关于x的知识是非常确定的，此时Vague集退化为普通集合。

3 覆盖Vague集

本节将讨论覆盖粗糙集向Vague集的转化。建立覆盖Vague集，即如何将第一类和第二类覆盖粗糙集转化成相应的覆盖Vague集，并研究与其相关的一些性质，以及覆盖Vague集与覆盖粗糙集中一些重要概念之间的关系。

3.1 问题分析

为了更好地说明所建立覆盖Vague集的意义，下面通过一个例子来对此加以阐述。

例1 设$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$是一个论域，$X=\{a,b,c\}$是U的一个子集，$\boldsymbol{C}=\{K_1,K_2,K_3,K_4,K_5,K_6\}$是$U$的一个覆盖，其中$K_1=\{a,b\}$，$K_2=\{b,c,d,f\}$，$K_3=\{c,d\}$，$K_4=\{c,e\}$，$K_5=\{d,e\}$，$K_6=\{g,h\}$。分别求$X$的第一类和第二类覆盖近似集。

根据定义5可得$X_*=\{a,b\}$，$X^*=\{a,b,c,d,e\}$；根据定义6可得$X_\#=\{a,b\}$，$X^\#=\{a,b,c\}$。

在粗糙集中，X下近似中的元素通常被认为是根据已有知识判断而肯定属于X的，X上近似中的元素通常被认为是可能属于X的，而X负域中的元素则被认为是肯定不属于X的。但在覆盖粗糙集中，如果也这样理解就显得有点不合理。在例1中，X的下近似是a和b，但不能说b是肯定属于下近似X的，因为K_2中也含有b，而K_2中的d,f均不属于X的下近似，按照概率论的观点，b在一定程度上是不属于X的。

同理,f 虽然不在 X 的上近似中,但 f 与 b,c 同在 K_2 中,说明 f 在一定程度上也是属于 X 的。此外,K_5 与 X 的交集为空,但是 K_5 中的元素却均出现在 X 的上近似中。由此可见,在用覆盖粗糙集模型对 X 求近似集时,通常会放大一些元素与 X 的关系,同时又会忽略一些元素与 X 的关系。这就造成根据覆盖粗糙集模型求得的 X 的上、下近似集不能如实地反映出论域中各元素与 X 之间的关系。

为了解释上述情况出现的原因,以及更全面、准确地反映出论域中各元素与给定集合之间的关系,将在 3.2 节中介绍覆盖 Vague 集。

3.2 覆盖 Vague 集

一个元素的隶属族包含了与之相关的所有元素。从上面的分析可以发现,之所以出现上述情况是因为在利用覆盖粗糙集模型对给定集合求近似集时,只考虑了与目标集合中元素关系较为密切的元素,而忽略了其他一些关系相对不密切的元素。如第一类覆盖粗糙集中只考虑到了元素的最小描述,而第二类覆盖粗糙集中关注的则是元素的邻域。为此,将从元素的隶属族出发,来研究其与给定集合之间的关系。

定义 8(基数和) 设 $\boldsymbol{C}$ 是论域 U 上的一个覆盖,$x\in U$。定义

$$m_{\boldsymbol{C}}(x)=\sum_{K\in F(x)}|K|$$

为元素 x 关于 $\boldsymbol{C}$ 的基数和。在不混淆的情况下,下标 $\boldsymbol{C}$ 可以省略。

例 2 根据例 1 中给出的已知条件,分别求各元素的基数和。

解:根据定义 8 可得 $m(a)=2,m(b)=6,m(c)=8,m(d)=8,m(e)=4,m(f)=4,m(g)=2,m(h)=2$。

定义 9(元素的上近似集族) 设 $\boldsymbol{C}$ 是论域 U 上的一个覆盖,$x\in U,X\subseteq U$。定义

$$S_{X|\boldsymbol{C}}(x)=\{K\mid K\in F_{\boldsymbol{C}}(x)\wedge K\cap X\neq\emptyset\}$$

为元素 x 关于 X 在 $\boldsymbol{C}$ 中的上近似集族。在对 $\boldsymbol{C}$ 不混淆的情况下,可简记为 $S_X(x)$。

例 3 根据例 1 中给出的已知条件,分别求各元素关于 X 在 $\boldsymbol{C}$ 中的上近似集族。

解:根据定义 9 可得 $S_X(a)=\{\{a,b\}\},S_X(b)=\{\{a,b\},\{b,c,d,f\}\},S_X(c)=\{\{b,c,d,f\},\{c,d\},\{c,e\}\},S_X(d)=\{\{b,c,d,f\},\{c,d\}\},S_X(e)=\{\{c,e\}\},S_X(f)=\{\{b,c,d,f\}\},S_X(g)=\emptyset,S_X(h)=\emptyset$。

一个元素的隶属族包含了与之有关系的所有元素,如果该隶属族的并集与给定集合的交集不为空,则说明该元素与给定集合之间存在一定的联系;否则,该元素与给定集合之间没有联系。为此,下面将覆盖粗糙集建立为相应的覆盖 Vague 集。

定义 10(覆盖 Vague 集) 设 $\boldsymbol{C}$ 是论域 U 上的一个覆盖,$x\in U,X\subseteq U$。定义 x 相对 X 关于 $\boldsymbol{C}$ 的真隶属函数 $t_{X|\boldsymbol{C}}(x)$ 和假隶属函数 $f_{X|\boldsymbol{C}}(x)$ 分别为:

$$t_{X|\boldsymbol{C}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(x)}\sum\limits_{K\in S_{X|\boldsymbol{C}}(x)}|K\cap X|, & (\bigcup S_{X|\boldsymbol{C}}(x))\cap X\neq\emptyset\\ 0, & (\bigcup S_{X|\boldsymbol{C}}(x))\cap X=\emptyset\end{cases}$$

$$f_{X|\boldsymbol{C}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(x)}\sum\limits_{K\in S_{X|\boldsymbol{C}}(x)}|K\cap(\sim X)|, & (\bigcup S_{X|\boldsymbol{C}}(x))\cap X\neq\emptyset\\ 1, & (\bigcup S_{X|\boldsymbol{C}}(x))\cap X=\emptyset\end{cases}$$

则 x 从属于 X 的隶属度被限定在区间 $[0,1]$ 的子区间 $[t_{X|\boldsymbol{C}}(x),1-f_{X|\boldsymbol{C}}(x)]$ 中,称 $[t_{X|\boldsymbol{C}},1-f_{X|\boldsymbol{C}}]$ 为 X 关于 $\boldsymbol{C}$ 的覆盖 Vague 集,记为 $X_{V(\boldsymbol{C})}$。在对 $\boldsymbol{C}$ 没有混淆的情况下,简记为 $X_V=[t_X,1-f_X]$。其中,$\sim X$ 表示 X 的补集。

例 4 根据例 1 中给出的已知条件,求 U 中各元素相对 X 关于 $\boldsymbol{C}$ 的覆盖 Vague 集。

解:根据例 3 中得到的各元素的上近似集族的结果,由定义 10 可得 $t_X(a)=\frac{1}{2}\times2=1,t_X(b)=\frac{1}{6}\times(2+2)=\frac{4}{6},t_X(c)=\frac{1}{8}\times(2+1+1)=\frac{4}{8},t_X(d)=\frac{1}{8}\times(2+1+0)=\frac{3}{8},t_X(e)=\frac{1}{4}\times(1+0)=\frac{1}{4},t_X(f)=\frac{1}{4}\times2=\frac{2}{4},t_X(g)=0,t_X(h)=0$。

$f_X(a)=0,f_X(b)=\frac{1}{6}\times(0+2)=\frac{2}{6},f_X(c)=\frac{1}{8}\times(2+1+1)=\frac{4}{8},f_X(d)=\frac{1}{8}\times(2+1+0)=\frac{3}{8},f_X(e)=\frac{1}{4}\times(1+0)=\frac{1}{4},f_X(f)=\frac{1}{4}\times2=\frac{2}{4},f_X(g)=1,f_X(h)=1$。

从而,$X_V(a)=[1,1],X_V(b)=[\frac{4}{6},\frac{4}{6}],X_V(c)=[\frac{4}{8},\frac{4}{8}],X_V(d)=[\frac{3}{8},\frac{5}{8}],X_V(e)=[\frac{1}{4},\frac{3}{4}],X_V(f)=[\frac{2}{4},\frac{2}{4}],X_V(g)=[0,0],X_V(h)=[0,0]$。

从上面的例子可以发现,a 隶属于 X 的程度为 1,也就说 a 确定属于 X;g,h 隶属于 X 的程度为 0,也就说确定它们不属于 X;元素 b,c,f 的 Vague 集中,$t_X(x)=1-f_X(x)$,也就是说关于它们的知识是确定的,此时它们隶属于 X 的程度是确定的,即分别为 $\frac{4}{6}$,$\frac{4}{8}$ 和 $\frac{2}{4}$;而元素 d,e 的 Vague 集中,$t_X(x)\neq1-f_X(x)$,也就是说关于它们的知识是含糊的,此时它们隶属于 X 的确切程度是未知的,但可以被分别限定在区间 $[\frac{3}{8},\frac{5}{8}]$ 和 $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ 中。从元素与其隶属族之间的关系角度看,d,e 的这种含糊性是因为 d,e 的隶属族中存在与给定集合 X 不相交的覆盖元 K,此时一般会认为 K 中的元素与 X 没有关系。但因为 d,e 的隶属族的并集与 X 的交不为空,这说明 d,e 又是与 X 有着某种关系,而这种关系是无法确切表述出来的,它是一种含糊的关系。此时就将 K 中的元素作为既不能说属于也不能说不属于的元素看待,即作为含糊的对象看待。

4 覆盖 Vague 集的性质

根据覆盖 Vague 集的定义,可以对论域上任意一个子集,根据所给的覆盖知识来求得与之对应的一个覆盖 Vague 集。下面将研究覆盖 Vague 集的一些相关性质。

为了讨论方便,不妨设 $\boldsymbol{C}$ 是论域 U 上的一个覆盖,$x\in U$,$X\subseteq U$。

命题 1 如果 $x\in X$,则 $t_X(x)=1-f_X(x)$。

证明:因为 $x\in X$,所以 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$。根据覆盖 Vague 集的定义可知,因为 $x\in X$,所以 $\forall K\in F(x)$ 都有 $x\in K$,即 $K\cap X\neq\emptyset$,并且 $(K\cap X)\cup(K\cap\sim X)=K$。从而,根据元素上近似集族的定义可知 $S_X(x)=F(x)$,并且 $\forall K\in F(x)$,

$|K\cap X|+|K\cap\sim X|=|K|$。再由基数和的定义可以得知 $\sum_{K\in F(x)}|K\cap X|+\sum_{K\in S_X(x)}|K\cap\sim X|=m(x)$，所以 $t_X(x)+f_X(x)=1$，即 $t_X(x)=1-f_X(x)$。证毕。

命题 2 如果 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$ 且 $\exists K\in F(x)$ 使得 $K\cap X=\emptyset$，则 $t_X(x)\neq 1-f_X(x)$。

证明：根据覆盖 Vague 集的定义可知，当 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$ 时，如果 $\exists K\in F(x)$ 使得 $K\cap X=\emptyset$，则 $K\notin S_X(x)$。所以 $S_X(x)\subset F(x)$。从而，$\sum_{K\in S_X(x)}|K\cap\sim X|<\sum_{K\in F(x)}|K\cap\sim X|$。所以 $\sum_{K\in F(x)}|K\cap X|+\sum_{K\in S_X(x)}|K\cap\sim X|<m(x)$，即 $t_X(x)+f_X(x)<1$。由此可见，$t_X(x)\neq 1-f_X(x)$。证毕。

命题 3 $t_X(x)=1$ 当且仅当 $\forall K\in F(x),K\subseteq X$。

证明：($\Rightarrow$)因为 $t_X(x)=1$，根据覆盖 Vague 集的定义可知 $\sum_{K\in F(x)}|K\cap X|=m(x)$，再由基数和的定义可知，$\forall K\in F(x),K\cap X=K$。从而 $\forall K\in F(x),K\subseteq X$。

($\Leftarrow$)由覆盖 Vague 集的定义可直接证明该结论成立。证毕。

推论 1 $f_X(x)=0$ 当且仅当 $\forall K\in F(x),K\subseteq X$。

证明：因为 $f_X(x)=0$，根据覆盖 Vague 集的定义可知，$(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X=\emptyset$，所以 $t_X(x)=1$。则由命题 3 可直接得到该结论成立。

命题 4 $t_X(x)=0$ 当且仅当 $\forall K\in F(x),K\cap X=\emptyset$。

证明：($\Rightarrow$)因为 $t_X(x)=0$，根据覆盖 Vague 集的定义可知：(1) 当 $(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X=\emptyset$ 时，则 $\forall K\in F(x)$，使得 $K\cap X=\emptyset$；(2) 当 $(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X\neq\emptyset$ 时，因为 $t_X(x)=0$，所以 $(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X=\emptyset$，这与 $(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X\neq\emptyset$ 相矛盾。因此，如果 $t_X(x)=0$，则 $(\bigcup S_{X|C}(x))\cap X$ 必为空集。也就是说，当 $t_X(x)=0$ 时，$\forall K\in(\bigcup S_{X|C}(x))$ 都有 $K\cap X=\emptyset$。

($\Leftarrow$)由覆盖 Vague 集的定义可直接证明该结论成立。证毕。

推论 2 $f_X(x)=1$ 当且仅当 $\forall K\in F(x),K\cap X=\emptyset$。

证明：因为 $f_X(x)=1$，则 $t_X(x)=1$。由命题 4 可直接得到该结论成立。

命题 5 $F(x)=S_X(x)$ 当且仅当 $t_X(x)=1-f_X(x)$，并且 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$。

证明：($\Rightarrow$)因为 $F(x)=S_X(x)$，则 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$。又根据前面覆盖 Vague 集与元素上近似集族的定义可以得知，$\sum_{K\in F(x)}|K\cap X|+\sum_{K\in S_X(x)}|K\cap\sim X|=m(x)$。从而 $t_X(x)+f_X(x)=1$，即 $t_X(x)=1-f_X(x)$。

($\Leftarrow$)因为 $(\bigcup F(x))\cap X\neq\emptyset$ 以及 $t_X(x)=1-f_X(x)$，根据覆盖 Vague 集与元素上近似集族的定义可知，$\sum_{K\in F(x)}|K\cap X|+\sum_{K\in S_X(x)}|K\cap\sim X|=m(x)$。再由基数和的定义可得 $F(x)=S_X(x)$。证毕。

另外，根据 Gau 等[25]给出的关于 Vague 集的交($\cap$)、并($\cup$)、补($\sim$)运算的定义，可以得到定理 1。

定理 1 设 C 是论域 U 上的一个覆盖，$X,Y,Z\subseteq U$，X_V，Y_V，Z_V 分别为 X,Y,Z 关于 C 的覆盖 Vague 集，则下面的性质是成立的：

(1) $X_V\cup Y_V=Y_V\cup X_V$，$X_V\cap Y_V=Y_V\cap X_V$；

(2) $X_V\cup(Y_V\cup Z_V)=(X_V\cup Y_V)\cup Z_V$，$X_V\cap(Y_V\cap Z_V)=(X_V\cap Y_V)\cap Z_V$；

(3) $X_V\cup X_V=X_V$，$X_V\cap X_V=X_V$；

(4) $X_V\cup(Y_V\cap Z_V)=(X_V\cup Y_V)\cap(X_V\cup Z_V)$，$X_V\cap(Y_V\cup Z_V)=(X_V\cap Y_V)\cup(X_V\cap Z_V)$；

(5) $X_V\cup U_V=U_V$，$X_V\cap U_V=X_V$，其中 $U_V=[1,1]$；

(6) $X_V\cup\emptyset V=X_V$，$X_V\cap\emptyset_V=\emptyset_V$，其中 $\emptyset_V=[0,0]$；

(7) $X_V\cup(X_V\cap Y_V)=X_V$，$X_V\cap(X_V\cup Y_V)=X_V$；

(8) $\sim(X_V\cup Y_V)=\sim X_V\cap\sim Y_V$，$\sim(X_V\cap Y_V)=\sim X_V\cup\sim Y_V$；

(9) $\sim(\sim X_V)=X_V$。

以上性质的具体证明可参见文献[25]。

5 覆盖 Vague 集与覆盖粗糙集的关系

本节将讨论覆盖 Vague 集与覆盖粗糙集中一些重要概念的关系，如与邻域、最小描述、隶属族等之间的关系。此外，还将研究当覆盖退化为划分时，覆盖 Vague 集又会发生哪些变化等。

下面的讨论中，均设 C 是论域 U 上的一个覆盖，$x\in U$，$X\subseteq U$。

5.1 与覆盖粗糙集中一些重要概念的关系

本小节将主要研究论域中元素从属于某个覆盖 Vague 集的隶属度与其邻域、最小描述以及隶属族之间的关系。

定理 2 设 C 是论域 U 上的一个覆盖，$x,y\in U$，则 $N(x)=N(y)\Leftrightarrow Md(x)=Md(y)\Leftrightarrow F(x)=F(y)$。

证明：(1) 当 $N(x)=N(y)$ 时。因为 $N(x)=N(y)$，所以 $\forall K\in C$，如果 $x\in K$，则 $y\in K$，即 $F(x)\subseteq F(y)$；反之，$\forall K\in C$，如果 $y\in K$，则 $x\in K$，即 $F(y)\subseteq F(x)$，所以 $F(x)=F(y)$。从而，根据最小描述的定义可得 $Md(x)=Md(y)$。

(2) 当 $Md(x)=Md(y)$ 时。因为 $Md(x)=Md(y)$，所以 $\bigcap Md(x)=\bigcap Md(y)$，即 $N(x)=N(y)$。从而，由(1)可得 $F(x)=F(y)$。

(3) 当 $F(x)=F(y)$ 时。因为 $F(x)=F(y)$，所以根据邻域的定义可知，$N(x)=N(y)$。从而，由(1)可得 $Md(x)=Md(y)$。证毕。

命题 6 $\forall x,y\in U$，如果 $N(x)=N(y)$，则 $X_V(x)=X_V(y)$。

证明：$\forall x,y\in U$，因为 $N(x)=N(y)$，根据邻域的定义可知 $\forall K\in C$，如果 $x\in K$，则 $y\in K$。同理，如果 $y\in K$，则 $x\in K$。所以，$\forall K\in F(x)$，则 $K\in F(y)$，反之亦然。又根据基数和的定义可知 $m(x)=m(y)$。因此，根据覆盖 Vague 集中真隶属函数的定义可知 $t_X(x)=t_X(y)$。再由元素上近似集族的定义可知 $S_X(x)=S_X(y)$。因此，$f_X(x)=f_X(y)$。综上所述可得 $X_V(x)=X_V(y)$。证毕。

命题 7 $\forall x,y\in U$，如果 $Md(x)=Md(y)$，则 $X_V(x)=X_V(y)$。

证明：由定理 2 和命题 6 可直接证明该结论成立。证毕。

命题 8 $\forall x,y\in U$，如果 $F(x)=F(y)$，则 $X_V(x)=X_V(y)$。

证明：由定理 2 和命题 6 可直接证明该结论成立。

5.2 覆盖 Vague 集的退化

从覆盖的定义知道，划分是一种特殊的覆盖。那么当覆盖是一个划分时，覆盖 Vague 集会有什么特点呢？下面先看一个例子。

例 5　设$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$是一个论域，$X=\{a,b,c\}$是U的一个子集，$\boldsymbol{C}=\{K_1,K_2,K_3,K_4\}$是$U$的一个覆盖，其中$K_1=\{a\}$，$K_2=\{b,d\}$，$K_3=\{c,e\}$，$K_4=\{f,g,h\}$。求$X$关于$\boldsymbol{C}$的覆盖 Vague 集。

根据定义 8—定义 10 可得$X_V(a)=[1,1]$，$X_V(b)=[0.5,0.5]$，$X_V(c)=[0.5,0.5]$，$X_V(d)=[0.5,0.5]$，$X_V(e)=[0.5,0.5]$，$X_V(f)=[0,0]$，$X_V(g)=[0,0]$，$X_V(h)=[0,0]$。

从上面这个例子可以发现，$\boldsymbol{C}$是论域上的一个划分，U中所有元素相对X关于$\boldsymbol{C}$的覆盖 Vague 集中，$t_X(x)=1-f_X(x)$。也就是说每一个元素x从属于X的程度是确定的，都等于$t_X(x)$(或$1-f_X(x)$)。此时的覆盖 Vague 集就退化为一个模糊集。

命题 9　当$\boldsymbol{C}$为论域U的一个划分时，X关于$\boldsymbol{C}$的覆盖 Vague 集X_V为U上的一个模糊集。

证明：因为$\boldsymbol{C}$为论域U的划分，所以$\forall x\in U$，$|F(x)|=1$，即有且仅有一个$K\in\boldsymbol{C}$，使得$x\in K$。根据元素上近似集族的定义可知$F(x)=S_X(x)$。因此，$|K\cap X|+|K\cap\sim X|=|(\bigcup F(x))\cap X|+|(\bigcup F(x))\cap\sim X|=|(\bigcup S_X(x))\cap\sim X|+|(\bigcup S_X(x))\cap X|=|(\bigcup F(x))|=|(\bigcup S_X(x))|=|K|$。从而，$t_X(x)=1-f_X(x)$。也就是说，$x$从属于$X$的隶属度是确定的，即$X_V(x)=t_X(x)=1-f_X(x)$。此时，$X_V$就退化为一个模糊集，该模糊集的隶属度函数为$\mu_X(x)=t_X(x)$或$\mu_X(x)=1-f_X(x)$。证毕。

命题 10　设$\boldsymbol{C}$是U上的一个覆盖。$\forall x\in U$，$\forall X\subseteq U$，$t_X(x)+f_X(x)=1\Leftrightarrow\boldsymbol{C}$是$U$上的一个划分。

证明：($\Rightarrow$)假设$\boldsymbol{C}$不是U上的一个划分。则$\exists x\in U$，使得$|F(x)|\geq 2$。从而$\exists K_i,K_j\in F(x)$，$K_i\neq K_j$。由此，$\exists y\in(K_i-K_j)\bigcup(K_j-K_i)$。令$X=\{y\}$，则根据元素上近似集族的定义可知$S_X(y)\subset F(y)$。因为$(\bigcup F(y))\cap X\neq\emptyset$，由命题 5 可知，$t_X(y)\neq 1-f_X(y)$，即$t_X(y)+f_X(y)\neq 1$。这与已知$\forall y\in U$以及$\forall X\subseteq U$，$t_X(y)+f_X(y)=1$相矛盾。所以假设不成立，$\boldsymbol{C}$是$U$上的一个划分。

($\Leftarrow$)因为$\boldsymbol{C}$是U上的一个划分，所以$\forall x\in U$有且仅有一个$K\in\boldsymbol{C}$，使得$x\in K$。因此，如果$K\cap X=\emptyset$，则$t_X(x)=0$，$f_X(x)=1$，从而$t_X(x)+f_X(x)=1$；如果$K\cap X\neq\emptyset$，则由命题 5 可得$t_X(x)=1-f_X(x)$，即$t_X(x)+f_X(x)=1$。证毕。

结束语　本文从覆盖粗糙集中上、下近似与论域中各元素之间关系存在的不确定性出发，构建了任意覆盖上给定集合的覆盖 Vague 集，从一种新的角度展现了论域中各元素与给定集合之间的从属关系。通过覆盖 Vague 集所反映出的信息，我们对存在于覆盖粗糙集中的一些不确定现象有了更清晰的认识，即覆盖下近似中的元素并非完全从属于给定集合，以及上近似之外的元素也并非完全不从属于给定集合等。此外，还对覆盖 Vague 集与覆盖粗糙集中的一些重要概念之间的关系做了研究，这也为用覆盖 Vague 集的观点去更好地理解和研究覆盖粗糙集提供了理论依据。最后，研究了覆盖退化为划分时覆盖 Vague 集的一些特性，通过命题 9 可知，此时的覆盖 Vague 集退化为了一个模糊集，即所有元素的隶属度都是确定的。所有这些工作为更深入地理解和研究覆盖粗糙集提供了一种新的方式。

在将来的工作中，将探讨如何利用覆盖 Vague 集来对覆盖粗糙集的不确定性进行度量。本文中介绍了现有覆盖粗糙集模型中存在的不确定性情况，以及如何借助一个覆盖 Vague 集来反映这些不确定性。在后续的研究中，将进一步探寻这些不确定性背后的规律，以期为数据挖掘等应用领域提供一定的理论支持。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982: 341-356

[2] 刘清，黄兆华，刘少辉，等. 带 Rough 算子的决策规则及数据挖掘中的软计算[J]. 计算机研究与发展，1999(07): 33-37

[3] 王珏，王任，苗夺谦，等. 基于 Rough Set 理论的“数据浓缩”[J]. 计算机学报，1998(05): 393-400

[4] Chen D, Wang C, Hu Q. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(17): 3500-3518

[5] Qian Y, Liang J, Pedrycz W, et al. Positive approximation: An accelerator for attribute reduction in rough set theory[J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(9/10): 597-618

[6] Skowron A, Stepaniuk J. Tolerance Approximation Spaces[J]. Fundamenta Informaticae, 1996, 27: 245-253

[7] Pomykala J. Approximation, similarity and rough constructions [C]. 1993

[8] Slowinski R, Informatyki I, Vanderpooten D. Similarity relation as a basis for rough approximations [J]. 1995

[9] Bryniarski E. A Calculus of Rough Sets of the First order[J]. Bull. Pol. Acad. Sci, 1989, 36(16): 71-77

[10] Pomykala J A. Approximation Operations in Approximation Space[J]. Bull. Pol. Acad. Sci, 1987, 35(9/10): 653-662

[11] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 210-225

[12] Zhu W. Generalized Rough Sets Based on Relations[J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4997-5011

[13] Zhu W, Wang F. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152(1): 217-230

[14] Zhu W, Wang F. On Three Types of Covering Rough Sets[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144

[15] Zhu W, Wang F. Topological Properties in Covering-Based Rough Sets[C]. 2007

[16] Qin K, Gao Y, Pei Z. On covering rough sets[C]. 2007

[17] Wang S, Zhu P, Zhu W. Structure of covering-based rough sets [J]. 2010, 6(3): 147-150

[18] Wang S, Zhu W, Zhu P. Poset approaches to covering-based rough sets[C]. 2010

[19] Yang T, Li Q. Reduction about approximation spaces of covering generalized rough sets[J]. 2010, 51(3): 335-345

[20] Zhu W, Wang F. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230

[21] Tang J, She K, Zhu W. Covering-based rough sets based on the refinement of covering-element [J]. International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 2011, 5(4): 198-208

[22] 李凯，祝峰，陈文，等. 拟阵下的覆盖模糊粗糙集[J]. 计算机工程与应用，2010(32): 29-32

(下转第 298 页)

4.3.2 加速比和效率

实验结果分析：

由图 3 可见，数据集规模大小对实验结果无影响，与 3.2 节的理论分析相符。

在达到 4 个线程之前，即当线程数小于处理器数时，加速比与处理器数成正比，具有线性加速比，并行效率保持较优状态，最高并行效率可达到 75%以上。

4.4 OpenMP 中调度策略对并行性能影响

采用表 1 中的数据集 1，设定 4 个线程，分别对 static 调度、dynamic 调度和 guided 调度进行实验。对每种调度方式，改变其分块大小(分块数从 2 块到 24 块)，测试调度策略对并行性能的影响，实验结果如图 4 所示。

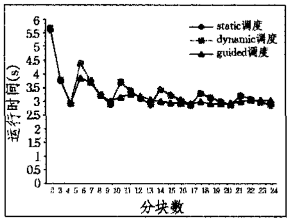

图 4 调度策略对并行性能的影响

实验结果分析：

由图 4 可见，3 种调度方式的实验结果与 3.3 节理论分析结果相符合。

分块数以线程数的整数倍为周期，即

分块数=线程数 $*n+k$，$n=1,2,3\cdots$，$k=0,1,2,3$

(1) 当 $k=0$ 时，即分块数为线程数的整数倍，运行时间最短；

(2) 当 $k=1$ 时，划分给各线程的块最不均匀，运行时间为该周期内最长，随着 k 的增加，可逐渐均化各线程的负担；

(3)随着 n 的增加，波动的起伏越来越小，最终趋于稳定。

由于图像边缘提取实验中，各线程做相同的计算，因此对于相等数据量处理的时间也相同。dynamic 调度与 static 调度都是将迭代空间分割成大小相等的块，则这两种调度下的各线程获得的数据量相同，所以两种调度的运行时间线完全重合。同时因为各线程进行相同计算，在分块数为线程数的整数倍时，各线程处理的数据不同，但处理的数据量相等，因此运行时间也相等。

采用 guided 调度类，在计算的进行过程中减少块的大小，从而更充分地均化各线程的数据处理量，因此在分块数不等于线程数时，可比 static 和 dynamic 调度达到更优的并行性能。

结束语 CMP 技术实现了一块 CPU 芯片上可集成多个计算核心，具有共享的二级(及二级以上)缓存，使得单独一台 CMP 计算机即可构成最简单的高性能计算环境，无论从性能上还是成本上都体现出了很强劲的优势。OpenMP 并行编程模型是基于共享内存架构的线程级并行，通过对共享内存的读写完成线程间通信，更适用于 CMP 计算机这种新型硬件环境。OpenMP 编写多线程程序简便高效，而且提供了多种调度策略，对同步共享变量、合理分配负载等任务都提供了有效的支持。理论分析和实验结果均表明，基于 OpenMP 的并行算法，通过对线程数、调度方式和分块大小的选择，可以最大限度地提升并行性能，获得更高的加速比和并行效率。本文的研究基于边缘提取算法，但其中并行优化方面的理论研究成果可广泛应用于栅格数据并行处理领域，对通用栅格数据并行处理研究具有很好的推动作用。

参 考 文 献

[1] Kuck, David J. High Performance Computing: Challenges for Future Systems[M]. New York, NY: Oxford University Press, 1996

[2] Hennessy J L, Patterson D A. Computer Architecture (4th edition)[M]. Morgan Kaufman, 2007

[3] Olukotun K, Hammond L, Laudon J. Chip Mutiprocessor Architecture: Techniques to Improve Throughput and Latency[M]. Morgen & Claypool Publishers, 2007

[4] Guan Qingfeng, Clarke, Keith C. A general-purpose parallel raster processing programming library test application using a geographic cellular automata model[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2010, 24(5): 695-722

[5] Bernhardsen T. 地理信息系统导论(第三版)[M]. 王浒, 李浩川, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006

[6] Liao Chunhua. A Compile-time OpenMP Cost Model[D]. US: University of Houston, 2007

[7] 孙即祥. 图像处理[M]. 北京: 科学出版社, 2004

[8] Grama M, et al. 并行计算导论(第二版)[M]. 张武, 毛国勇, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2005

[9] 孙世新, 卢光辉, 等. 并行算法及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005

(上接第 260 页)

[23] Wang S, Zhu W. Matroid theory in covering-based rough sets [J]. To appear in International Journal of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems, 2011

[24] 胡军, 王国胤, 张清华. 一种覆盖粗糙模糊集模型[J]. 软件学报, 2010(05): 968-977

[25] Gau W, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614

[26] 闫德勤, 迟忠先. 粗糙集与 Vague 集[J]. 计算机科学, 2004 (08): 133-135

[27] 徐久成, 张倩倩. 覆盖粗糙 Vague 集的不确定性度量研究[J]. 计算机科学, 2010(10): 225-227

[28] Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec-Skardowska U. Extensions and intensions in the rough set theory[J]. Information sciences, 1998, 107(1-4): 149-167

[29] Zhu W, Wang F Y. Reduction and Axiomization of Covering Generalized Rough Sets[J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230

[30] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179 (3): 210-225

[31] Zakowski W. Approximations in the Space(U, Π)[J]. Demonstratio Mathematica, 1983(16): 761-769

[32] Zhu W, Wang F. A new type of covering rough set[C]. London, United kingdom: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2006