分段式量子-单纯形进化算法及函数优化

张伟丰
(湖北汽车工业学院经济管理学院 十堰 442002)

摘 要 量子进化算法在高维复杂函数优化上存在容易陷入局部最优解、进化后期收敛速度慢的问题,为进一步提高其搜索性能,提出了一种带单纯形搜索算子的分段式量子进化算法。该方法将搜索过程分为3个阶段,首先用量子进化算法搜索到一定代数,然后将种群分为若干个子种群,每个子种群中的个体作为单纯形法的初始顶点,并行地用单纯形法进行搜索,将搜索后的子种群再合并,继续用量子进化算法进行最后的搜索。对几个典型的高维函数进行仿真的结果表明,该算法具有更快的收敛速度和更高的求解精度。

关键词 量子进化,单纯形法,优化
中图法分类号 TP391.9 **文献标识码** A

Segmented Quantum-simplex Evolutionary Algorithm and Function Optimization

ZHANG Wei-feng
(School of Economics and Management,Hubei Automotive Industries Institute,Shiyan 442002,China)

Abstract In high-dimensional complex function optimization,quantum evolutionary algorithm is easy to fall into local optimal solution and convergence speed slower in the later stage of evolution,in order to improve its search performance further,this paper proposes a segmented quantum evolutionary algorithm which introduces simplex search operator,the search process is divided into three stages,first,use quantum evolutionary algorithm to search a certain times,then divided the population into a number of sub-populations,each individual of sub-populations as the initial vertex of the simplex method and parallel search using the simplex method,merge the sub-populations after search,use quantum evolutionary algorithm continue to the last searching. The simulation results of several typical high-dimensional function show that this algorithm has faster convergence speed and higher accuracy.

Keywords Quantum evolution,Simplex method,Optimization

1 引言

量子进化算法是一种采用量子比特编码、基于量子门更新搜索实现全局优化的进化算法,具有种群规模小、收敛速度快和全局寻优能力强的特点,已成功应用于模式识别、组合优化、高维函数优化、神经网络优化等领域[1]。但是,在一些复杂问题的优化上效果仍然不理想,易出现早熟和陷入局部极值的问题。为提高量子进化算法的优化能力,许多学者对其进行了改进,近年来出现了许多具有代表性的研究成果,主要体现在①编码方式的改进,如出现了较为新颖的三倍体编码、概率实数编码、混合二倍体编码等[2];②种群结构的改进,改变了那种无序的种群结构,将个体放入各种特定的群体结构中,如网格形、树形、环形等种群结构;③进化算子的改进和创新;④与其它算法融合。上述这些改进方法均提高了收敛速度和求解精度,取得了较好的效果。

为了更好地求解高维复杂函数的优化问题,本文在参考上述研究成果的基础上,通过对量子进化算法的编码方式和进化操作方式以及单纯形法的特点进行分析,将二者融合,提出了引入单纯形搜索的分段式混合量子进化算法。该方法将量子进化算法搜索后的种群划分为几个子种群,利用单纯形法并行搜索,可以克服单纯形法对初始值依赖性强而陷入局部极值的缺点,同时利用了其计算量小、优化快速的特点来提高收敛速度,然后将搜索到的近似解合并,用量子进化算法进一步搜索,使种群继续朝着最优解的方向进化。仿真实验表明,通过这种方式进一步提高了算法的优化性能。

2 单纯形法原理及算法描述

单纯形法(Simplex Method,SM)是一种求解函数最小化问题的连续优化方法,不需要对目标函数求导,直接根据函数值就可以完成优化过程,且具有计算量小、搜索速度快、局部搜索能力强的特点。

单纯形法的原理是:首先在 n 维欧氏空间 E_n 中构造一个包含 $n+1$ 个顶点的凸多面体,求出各顶点的函数值并确定其中的最大值、次大值和最小值;然后通过反射、扩张、内缩、缩边等求出一个较好解,用之取代最差点,从而构成新的多面体,如此迭代可求得一个极小点。

单纯形法的具体步骤描述如下:

①确定初始点。

②反射操作:求出 $n+1$ 个顶点的函数值,确定其中最大值 f_G、次大值 f_H 和最小值 f_L。除去最大值点 X^G,计算剩余

张伟丰(1978—),男,硕士,讲师,主要研究领域为数据挖掘与智能计算,E-mail:zhangweifeng7708@163.com。

n 个点的形心 $\bar{X}$，然后求出 X^G 关于 $\bar{X}$ 的对称点 $X^{(n+2)}$，计算 $f(X^{(n+2)})$。若 $f(X^{(n+2)})<f_L$，则令 $X^{(n+3)}=\bar{X}+\gamma(X^{(n+2)}-\bar{X})$，其中 $\gamma>1$，取 $\gamma=2$，并计算 $f(X^{(n+3)})$，若 $f(X^{(n+3)})<f(X^{(n+2)})$，则用 $X^{(n+3)}$ 取代 X^G，转步骤⑤，否则用 $X^{(n+2)}$ 取代 X^G 转步骤⑤。

③若 $f_L\leqslant f(X^{(n+2)})\leqslant f_H$，则用 $X^{(n+2)}$ 取代 X^G，转步骤⑤。

④若 $f(X^{(n+2)})\geqslant f_H$，则需要内缩，$f(X')=\min\{f(X^{(n+2)}),f(X^H)\}$，令 $X^{(n+4)}=\bar{X}+\beta(X'-\bar{X})$，其中 $\beta=0.5$，计算 $f(X^{(n+4)})$，若 $f(X^{(n+4)})\leqslant f(X')$，则用 $X^{(n+4)}$ 取代 X^G，并转步骤⑤。若 $f(X^{(n+4)})>f(X')$，则缩边，即 $X^i=(X^i+X^L)/2, i=(1,2,\cdots,n+1)$，转步骤⑤。

⑤若 $\{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}[f(X^i)-f(\bar{X})]^2\}^{0.5}<\varepsilon$，则停止，否则转②。

其中变量定义：最大值 f_G，次大值 f_H，最小值 f_L，形心 fX，对称点 $fX2, fX3, fXp, fX4$。形心和反射点按式(1)和式(2)计算：

$$\text{形心}: \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X^i-X^G) \tag{1}$$

$$\text{反射点}: X^{(n+2)}=2\bar{X}-X^G \tag{2}$$

3 量子编码和量子变异及编码映射

3.1 量子编码和量子变异

量子进化算法中编码方式为量子比特编码，一个量子比特可以表示为 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$，其中 α 和 β 可以表示为一个复数 $\alpha+i\beta$，满足 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$，则一个量子编码长度为 n 的个体为：

$$q=\begin{bmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\end{bmatrix}$$

量子变异通过量子门变换矩阵来实现，具体变异操作为：随机产生 $[0,\Delta\theta_i]$ 的角度 θ，按式(3)变异：

$$\begin{bmatrix}\alpha_i^{t+1}\\ \beta_i^{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i^t\\ \beta_i^t\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，t 为进化代数，$i=(1,2,\cdots,n)$，量子变异旋转角 $\Delta\theta_i$ 的取值根据当前最优解 $\boldsymbol{x}_{best}$ 和需要进行变异操作的个体 $\boldsymbol{x}$ 决定，目的是使当前个体朝着最优个体的方向进化。量子变异角以表格的形式提供查询，如表 1 所列。

表 1 量子变异角调整策略

$x_i\geqslant x_{best_i}$	$x_i<x_{best_i}$	$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}_{best})$	$\Delta\theta_i$
False	True	False	-0.01π
True	False	False	0.01π
False	True	True	-0.001π
True	False	True	0.001π

3.2 编码映射

高维函数优化问题可以定义为：

$$\min_{x\in[a,b]} F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[a,b]$$

式中，$F(\boldsymbol{x})$ 为目标函数，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为解向量，$[a,b]$ 为搜索区间。在本文中同时采用量子编码和实数编码，实数编码的个体即为一个函数的一个可行解。量子变异操作完成后进行适应度的计算，以及在进行单纯形搜索时均需要将个体转换为实数编码形式，而在单纯形搜索完成后继续进行量子进化计算时，又需要将个体的编码形式从实数编码转换为量子编码。为保持个体的一致性，在算法的整个搜索过程中需要进行编码映射，编码映射操作如下：在量子编码中 $\alpha_i,\beta_i\in(0,1)$，实数编码为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，按式(4)将实数编码转为量子编码：

$$\alpha_i=\frac{x_i-a}{b-a}, \beta_i=\sqrt{1-\alpha_i^2} \tag{4}$$

式中，$i=(1,2,\cdots,n)$，a,b 为搜索区间上下限，而将量子编码转换为实数编码的方式为：

$$x_i=a+\alpha_i(b-a) \tag{5}$$

4 基于单纯形搜索的分段式量子进化算法(SM_QEA)

基于以上的讨论，SM_QEA 算法流程描述如下：

1)设置基本参数：种群规模为 P，确定算法 3 个搜索阶段的进化代数 N_1,N_2,N_3，令各阶段进化代数初值 $t_1=0, t_2=0, t_3=0$，设各代最优解为 $sBest$，当前最优解为 $gBest$。

2)初始化种群 $Q(0)=\{Q_1^0,Q_2^0,\cdots,Q_P^0\}$，$Q_j^0=\{q_{j1}^0,q_{j2}^0,\cdots,q_{ji}^0,\cdots,q_{jn}^0\}(j=(1,2,\cdots,P), i=(1,2,\cdots,n))$ 为 $\alpha_i=rand(0,1)$，$\beta_i=\sqrt{1-\alpha_i^2}$ 的初始群体，其中 $rand(0,1)$ 为(0,1)间的随机数，开始第一阶段量子进化计算。

3)对种群 $Q(t_1)$ 中每个个体按式(5)进行编码映射，得到一组实数编码的群体状态 $C(t_1)=\{C_1^{t_1},C_2^{t_1},\cdots,C_j^{t_1},\cdots,C_P^{t_1}\}$，评价每个个体的适应度 $f(C_j^{t_1})$，记录最佳状态的个体 $sBest$，并将 $Q(t_1)$ 中对应的最佳个体保存到 $Q_{best}(t_1)$，如果 $sBest>gBest$，令 $gBest=sBest$。

4)对种群 $Q(t_1)$ 中的每个个体，以种群中最优个体 $Q_{best}(t_1)$ 为参照，由表 1 确定量子变异角，按式(3)进行变异操作，用变异后的个体更新 $Q(t_1)$。

5)令 $t_1=t_1+1$，如果 $t_1<N_1$，转步骤 3)，否则转步骤 6)。

6)将第一阶段进化后的种群映射为实数编码的 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_j,\cdots,C_p\}$，将其划分为 M 个子种群，每个子种群的规模为 $p=\frac{P}{M}$，将其作为单纯形的初始顶点，构成 M 个单纯形。

7)分别对这 M 个单纯形调用 SM 算法进行寻优计算，迭代次数达到 N_2 后，将各单纯形输出顶点合并，构成新种群，新种群大小仍为 $P=pM$。

8)从新种群中选择最优个体 $sBest$，如果 $sBest>gBest$，令 $gBest=sBest$。

9)第 3 阶段进化过程同第 1 阶段，将当前实数编码的种群按式(4)映射回量子编码群体 $Q(t_3)$，完成迭代次数为 N_3 的进化搜索过程，将搜索到的最优解保存到 $gBest$。

5 实验仿真研究

为验证 SM_QEA 算法性能，用几个比较典型的标准测试函数进行了仿真实验，测试函数如下所示：

1)Rosenbrock 函数

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n-1}[100(x_{i+1}-x_i^2)^2+(1-x_i^2)^2]$$

$$x\in[-5,10], \min(f_1)=0 \tag{6}$$

2)Ackley 函数

$$f_2(x)=-20\exp(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2})-\exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos$$

$(2\pi x_i))+20+e$

$$x\in[-32,32],\min(f_2)=0 \tag{7}$$

3)Rastrigrin 函数

$$f_3(x)=\sum_{i=1}^{n}[x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10]$$

$$x\in[-5.12,5.12],\min(f_3)=0 \tag{8}$$

4)Griewank 函数

$$f_4(x)=\frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\prod_{i=1}^{n}\cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}})+1$$

$$x\in[-600,600],\min(f_4)=0 \tag{9}$$

上述函数均很难优化,常用来测试算法的性能,全局极小值均为 $\min(f)=0$,其中 f_1 为单峰函数,全局最优解为 $x=(1,1,\cdots,1)$,其它为多峰函数,在定义域内有多个局部极值,全局最优解为 $x=(0,0,\cdots,0)$,函数三维图像如图 1 所示。

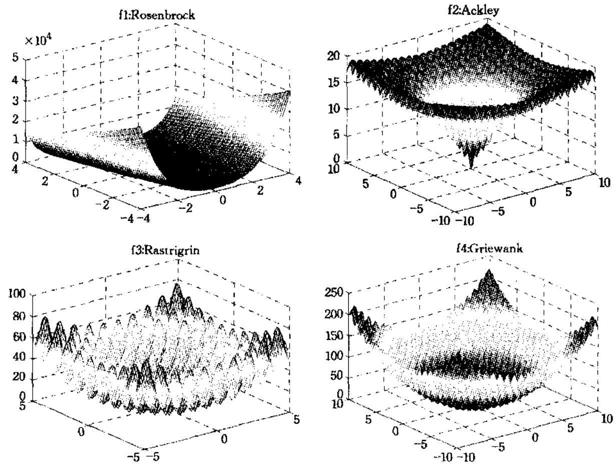

图 1 测试函数三维图像

仿真实验中参数设置如下:种群规模为 $P=40$,单纯形搜索子种群数量 $M=5$,子种群规模为 $p=8$,迭代次数 2000 次,算法各搜索阶段迭代次数根据情况分配,对上述 4 个函数维数分别取 $n=10,20,30$。对每个测试函数分别进行 10 次优化计算后取运行结果的平均值,并与优化性能良好的分区交叉差分进化算法(SCDE)和采用灰色码观测的量子进化算法(QEA_GC)进行性能对比,实验结果如表 2 所列。

表 2 f_1-f_4 函数的仿真结果

函数	维数	函数最优解	QEA_GC	SCDE	SM_QEA
Rosenbrock	n=10	0	3.51E−10	4.59E−8	3.84E−12
	n=20	0	8.72E−5	2.68E−6	5.19E−10
	n=30	0	4.12E−2	2.72E−5	9.36E−7
Ackley	n=10	0	4.01E−14	3.19E−18	2.17E−22
	n=20	0	6.11E−8	1.26E−11	1.97E−10
	n=30	0	2.14E−3	2.78E−9	9.46E−9
Rastrigrin	n=10	0	2.63E−4	2.65E−7	2.89E−9
	n=20	0	5.83E−3	4.45E−5	5.68E−7
	n=30	0	0.7895	1.8268E−3	1.8861E−4
Griewank	n=10	0	0.0254	0.0312	1.61E−3
	n=20	0	0.4178	0.1482	0.0491
	n=30	0	1.68	1.56	1.89E−2

注:QEA_GC-灰色码观测的量子进化算法[1],SCDE-分区交叉差分进化算法[9],SM_QEA-单纯形搜索的分段式量子进化算法。

$n=20$ 时上述 4 个函数某一次优化计算的收敛曲线如图 2 所示。

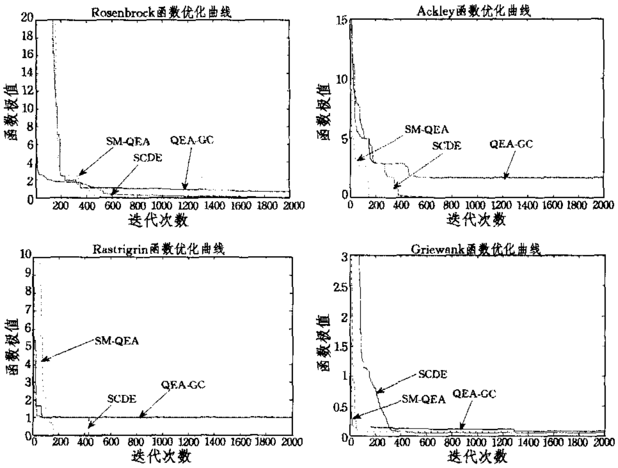

图 2 20 维函数收敛曲线对比图

从对这些高维复杂函数优化的实验结果可以看出,算法求解精度和收敛速度均有较大提高,能很好地跳出局部最优解,避免出现早熟收敛现象,达到全局优化和快速收敛的目的。

结束语 尽管单纯形搜索有对初始值敏感、只能搜索到局部极值、优化性能随着函数维数的增加而下降的缺点,但是也具有一些优良特性,如收敛速度较快、每迭代一次都能获得比前一代更好的解。本文将单纯形法融合在量子进化计算过程中,在这种算法模式下,可以扬长避短,即将种群划分为多个子种群作为初始解同时搜索,可以降低单纯形法的初始值敏感性,减小了因初始值不佳而陷入局部极值的可能性,同时充分利用单纯形法快速收敛的优点来提高收敛速度。SM_QEA 算法结合了二者各自的优点,使其全局搜索能力和搜索速度有了进一步提高,对高维函数优化的仿真实验也证明了本算法的有效性。

参考文献

[1] 郑建国,钱洁.采用灰色码观测的量子进化算法[J].信息与控制,2012,41(3):350-355

[2] 钱洁,郑建国,等.量子进化算法研究现状综述[J].控制与决策,2011,26(3):321-326

[3] 申晓宁.一种新型的多目标优化混合量子进化算法[J].计算机应用研究,2012,29(12):4441-4447

[4] 任子武,熊蓉,褚建.混合量子差分进化算法及应用[J].控制理论与应用,2011,28(10):1349-1355

[5] 钱洁,郑建国.采用群体统计学习的量子进化算法[J].西安交通大学学报,2012,46(2):353-360

[6] 魏娜,黄学宇,刘守东.量子进化算法原理及改进策略研究[J].计算机工程,2011,37(20):223-226

[7] 刘勇,马良,宁爱兵.函数优化的量子竞争决策算法[J].计算机工程与应用,2010,46(21):21-24

[8] 解平,李斌,庄镇泉.一种新的混合量子进化算法[J].计算机科学,2008,35(2):166-170

[9] 刘荣辉,郑建国.分区交叉差分进化算法及其约束优化[J].计算机科学,2012,39(2):283-287