一种求解稀疏信号重构的新算法

戚 平

(中国石油大学(华东)计算机与通信工程学院 青岛 266580)

摘 要 由于允许从少量数据中恢复原始信号的压缩感知的引入,基于 ℓ_1 范数正则化的最优化方法近来越来越受到重视。利用最小二乘问题的一种等价形式和 Bregman 迭代方法的一些技巧,本文推导出了可以用于稀疏信号重构求解的非满秩情况下的 A^+ 线性 Bregman 迭代方法的一种新的等价形式,并证明了它与原形式的等价性。

关键词 最小二乘问题,Bregman 迭代正则化,Moore-Penrose 逆

中图法分类号 TP391,TN911.72 **文献标识码** A

New Algorithm for Sparse Signals Reconstruction

QI Ping

(College of Computer and Communication Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract The class of ℓ_1 norm regularization problems has received much attention recently because of the introduction of "compressed sensing" which allows signals to be reconstructed from small amounts of data. With an equivalent form of least squares problem and some techniques of Bregman iterative methods, we induced a derivation of A^+ linear Bregman iteration method that is equivalent to the one that exits.

Keywords Least squares problem, Bregman iterative regularization, Moore-Penrose inverse

1 引言

1998年,Donoho[1]在研究信号稀疏处理问题时提出了一种新的原理——基追踪原理。设 $A\in R^{m\times n}(m<n)$,$u\in R^n$,$g\in R^m$,基追踪的目的就是寻找下面最小优化问题的解:

$$\min_{u\in R^n} J(u),\ \text{s.t.}\ Au=g \tag{1}$$

式中,$J(u)=\|u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u_k|$。

该模型通过求解带约束的 ℓ_1 范数最小优化问题来获得线性系统 $Au=g$ 的稀疏解,是求解信号稀疏问题的一种有效工具。基追踪问题本身来源于压缩感知[2,3]的应用,其在压缩图像、图像修复和丢失数据恢复、图像分解和计算机视觉任务、MRI 和 CT、多感网络和分布感知、模拟以及信息的转化、生物传感器、芯片处理[4-7]等领域有广泛的应用,因此对于式(1)的求解问题也随之引发了广泛的关注。

当 A 非满秩时,线性系统 $Au=g$ 不一定存在解,一般情况下,我们会考虑通过最小二乘解,即

$$u=\underset{u\in R^n}{argmin}\|Au-g\|^2 \tag{2}$$

来代替线性系统 $Au=g$ 的求解。除非特别说明,文中 $\|\cdot\|$ 表示 ℓ_2 范数。一般说来,式(2)的解并不唯一,$u^*:=A^+g$ 是其所有解中使得 ℓ_2 范数最小的解,但其一般并不是稀疏的。注意 A^+ 是 A 的 Moore-Penrose 逆,不一定是 $A^T(AA^T)^{-1}$,因为 $(AA^T)^{-1}$ 不一定存在。

在稀疏信号的恢复等一些实际问题中,我们希望找到式(2)的一个稀疏解,由于 ℓ_1 范数所具有的稀疏性,引发了人们对 ℓ_1 范数最小优化问题的关注,即通过求解

$$\min_{u\in R^n}\{\|u\|_1: u=\underset{u\in R^n}{\text{argmin}}\|Au-g\|^2\} \tag{3}$$

来获得式(2)的一个稀疏解。注意当 A 满秩时,式(3)等价于式(1)。

在求解方面,一般情况下,式(1)的解可以通过解一个无约束最优化问题

$$\min_{u\in R^n}\{\lambda J(u)+\frac{1}{2}\|Au-g\|^2\} \tag{4}$$

来获得,其中 $\lambda>0$ 为正则化参数。事实上,式(4)和式(1)并不等价,除非存在零解。但是与求解式(1)相比,式(4)的求解更易于实现。

到目前为止,式(4)的求解方法很多,关注最多的是不动点连续迭代方法[4]和基于 Bregman 距离[6]的一些迭代方法,如 Bregman 迭代[5]、A^+ 线性 Bregman 迭代[8]和 A^T 线性 Bregman 迭代[8],它们被认为是求解 ℓ_1 范数最优化方法问题非常有效的方法并且这些方法的适应范围也非常广泛。但对矩阵 A 非满秩情况下的研究相对较少,且还有许多问题需要进一步完善,本文主要针对这种情况加以研究,并得出了一些与满秩情况非常类似的结论。

2 基本知识

2.1 Moore-Penrose 广义逆

首先介绍矩阵 Moore-Penrose 广义逆的定义及其与本文有关的一些性质。

定义 1[9] 任意矩阵 $A\in R^{m\times n}$,矩阵 $B\in R^{n\times m}$ 称为 A 的 Moore-Penrose 逆,记为 A^+,如果 B 满足下面条件

(1)$ABA=A$

(2)$BAB=B$

(3)$(AB)^T=AB$

(4)$(BA)^T=BA$

$A\{1,3\}$表示满足上述(1)和(3)的矩阵 $B\in R^{n\times m}$ 的集合。一个矩阵 $B\in A\{1,3\}$ 称为 A 的$\{1,3\}$—逆，也可以表示为 $A^{(1,3)}$。

定理 1[9] 设 $A\in R^{m\times n}$，$r=rank(A)$，若存在两个正交阵 $P\in R^{m\times m}$ 和 $Q\in R^{n\times n}$ 使得

$$A=P\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q^{T}$$

则

$$A^{+}=Q\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times m}P^{T}$$

式中，$\Sigma=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_i>0,i=1,\cdots,r$ 为矩阵 A 的奇异值。

定理 2[9] 设 $A\in R^{m\times n}$，$u\in R^{n}$，$g\in R^{m}$，则 $u=A^{(1,3)}g$ 时，$\|Au-g\|$ 最小。对于线性系统 $Au=g$，向量 u 是一个最小二乘解当且仅当

$$Au=AA^{(1,3)}g$$

从而，广义最小二乘解是

$$u=A^{(1,3)}g+(I_n-A^{(1,3)}A)z \tag{5}$$

对任意 $z\in R^{n}$，特别地，我们可以选择 A^{+} 作为一个 $A^{(1,3)}$。

2.2 Bregman 距离和线性 Bregman 迭代

定义 2[6] 设 J 为凸函数，则 u,v 两点的关于 J 的 Bregman 距离定义为

$$D_J^p(u,v)=J(u)-J(v)-\langle p,u-v\rangle$$

式中，向量 $p\in\partial J(v)$ 为 J 在 v 处的次微分中的一个次梯度。

注意 $D_J^p(u,v)$ 并不是一般意义上的距离，因为 $D_J^p(u,v)\neq D_J^p(v,u)$，但 $D_J^p(u,v)\geq 0$ 且 $D_J^p(u,v)\geq D_J^p(w,v)$ 对位于连接 u,v 的线段上所有的点 w 都成立，可见它是对 u,v 远近程度的一种度量。

求解问题式(1)的 Bregman 迭代[5]为

$$\begin{cases}u^{k+1}\leftarrow\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\{\mu D_J^{p^k}(u,u^k)+\frac{1}{2}\|Au-g\|^2\}\\ p^{k+1}\leftarrow p^k-A^T(Au^{k+1}-g)\end{cases} \tag{6}$$

式中，$p^0=u^0=0$，μ 为参数。

针对 $J(u)=\|u\|_1$ 的情形，文献[10]给出了一种线性 Bregman 迭代

$$\begin{cases}v^{k+1}=v^k+(g-Au^k)\\ u^{k+1}=\delta T_\mu(A^Tv^{k+1})\end{cases} \tag{7}$$

式中，$u^0=v^0=0$，μ 和 δ 为参数，$T_\lambda(w):=[t_\lambda(w(1)),t_\lambda(w(2)),\cdots,t_\lambda(w(n))]^T$

$$t_\lambda(\xi)=\begin{cases}0, & \text{if } |\xi|\leq\lambda\\ \operatorname{sgn}(\xi)(|\xi|-\lambda), & \text{if } |\xi|>\lambda\end{cases} \tag{8}$$

称为软阈值算子[11]。

特别地，当 AA^T 正定时，文献[7]还给出了一种被文献[8]称为 A^{+} 线性 Bregman 迭代的修正线性 Bregman 迭代方法，其迭代公式如下

$$\begin{cases}v^{k+1}=v^k+(g-Au^k)\\ u^{k+1}=\delta T_\mu(A^{+}v^{k+1})\end{cases} \tag{9}$$

式中，$u^0=v^0=0$，μ 和 δ 为参数。但当 AA^T 不满秩时，并没有给出推导过程。

3 稀疏最小二乘问题的 Bregman 迭代方法

对于 $u=\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\|Au-g\|^2$，由定理 2 知其通解可表示为

$$u=A^{+}g+(I-A^{+}A)z,\forall z\in R^{n} \tag{10}$$

引理 1 式(10)等价于

$$A^{+}Au=A^{+}g \tag{11}$$

证明：如果 $u=A^{+}g+(I-A^{+}A)z$，则

$$A^{+}Au=A^{+}A(A^{+}g+(I-A^{+}A)z)=A^{+}g$$

相反地，如果 $A^{+}Au=A^{+}g$，则

$$u=u-A^{+}Au+A^{+}g=A^{+}g+(I-A^{+}A)u$$

由引理 1 及式(11)表示的超平面可以看成是超平面 $Au=g$ 的正交投影，因此可以用下面的正交投影问题等价式(3)：

$$\min_{u\in R^n}\{\|u\|_1:A^{+}Au=A^{+}g\} \tag{12}$$

进而可将其转化为下面的无约束极小化问题：

$$\min_{u\in R^n}\{\mu\|u\|_1+\frac{1}{2}\|A^{+}Au-A^{+}g\|^2\} \tag{13}$$

根据定理 1，矩阵 $A^{+}A$ 的条件数是 $\|A^{+}A\|\cdot\|(A^{+}A)^{+}\|=1$，所以用式(13)的另一个重要原因是式(11)在某种意义上可以看成是对线性系统 $Au=g$ 的预优。文献[6]表明收敛率依赖于系数矩阵的条件数，因此当 A 的条件数比较大时可以应用这种方法。

定义 3 如果 $a\in R^{n}$，矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 是对称半正定的，则可定义如下加权半范数

$$\|a\|_P=\sqrt{a^TPa} \tag{14}$$

很容易证明其满足：(1) $\|a\|_P\geq 0$；(2) $\|\lambda a\|_P=|\lambda|\,\|a\|_P$；(3) $\|a+b\|_P\leq\|a\|_P+\|b\|_P$。

又因为 $\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\|A^{+}Au-A^{+}g\|^2$ 等价于 $\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\|u-A^{+}g\|_{A^{+}A}^2$，从而问题式(13)可以变为

$$\min_{u\in R^n}\{\mu\|u\|_1+\frac{1}{2}\|u-A^{+}g\|_{A^{+}A}^2\} \tag{15}$$

这里 $\|a\|_{A^{+}A}=\sqrt{a^TA^{+}Aa}$ 是向量 a 关于对称半正定矩阵 $A^{+}A$ 的加权半范数。

3.1 A^{+} 线性 Bregman 迭代的推导

对于非满秩矩阵 A，我们由式(15)和线性 Bregman 迭代方法来推导 A^{+} 线性 Bregman 迭代。

首先为了求解式(15)，我们对式(13)应用 Bregman 式(6)：

$$u^{k+1}\leftarrow\min_{u\in R^n}\{\mu D_J^{p^k}(u,u^k)+\frac{1}{2}\|A^{+}Au-A^{+}g\|^2\} \tag{16}$$

其中 $k=0,1,\cdots$，$u^0=0,v^0=0$。其次线性化式(16)的最后一项为 $\frac{1}{2}\|A^{+}Au-A^{+}g\|^2+\langle A^{+}(Au-g),u-u^k\rangle$ 并增加近似项 $\frac{1}{2\delta}\|u-u^k\|^2$，于是可以得到下面的迭代格式：

$$u^{k+1}\leftarrow\min_{u\in R^n}\{\mu D_J^{p^k}(u,u^k)+\langle A^{+}(Au^k-g),u\rangle+\frac{1}{2\delta}\|u-u^k\|^2\} \tag{17}$$

根据 Bregman 距离的定义及式(17)的最优性条件可得

$$p^{k+1}\leftarrow p^k-A^{+}(Au^k-g)-\frac{1}{\delta}(u^{k+1}-u^k) \tag{18}$$

式中，$p^{k+1}\in\partial\mu J(u^{k+1})$。

下面对式(18)和式(18)进行简化。

首先，由式(17)可得

$$p^{k+1}=p^k-A^{+}(Au^k-g)-\frac{1}{\delta}(u^{k+1}-u^k)=\cdots=\sum_{i=0}^{k}A^{+}(g$$

$$-Au^i)-\frac{u^{k+1}}{\delta}$$

令

$$g^k=p^{k+1}+\frac{u^{k+1}}{\delta}=p^k-A^+(Au^k-g)-\frac{u^k}{\delta}=\sum_{i=0}^{k}A^+(g-Au^i),\forall k \tag{19}$$

则式(17)可以简化为

$$u^{k+1}\leftarrow\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\{\mu J(u)-\langle p^k,u\rangle+\langle A^+(Au^k-g),u\rangle+\frac{1}{2\delta}\|u-u^k\|^2\}$$

$$\leftarrow\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\{\mu J(u)+\frac{1}{2\delta}\|u-\delta(p^k-A^+(Au^k-g)+\frac{u^k}{\delta})\|^2\}$$

$$\leftarrow\underset{u\in R^n}{\operatorname{argmin}}\{\mu J(u)+\frac{1}{2\delta}\|u-\delta g^k\|^2\} \tag{20}$$

针对 $J(u)=\|u\|_1$，式(20)的解为 $\delta T_\mu(g^k)$，因此由式(19)和式(20)可以获得下面的迭代公式即 A^+ 线性 Bregman 迭代

$$\begin{cases}u^{k+1}\leftarrow\delta T_\mu(g^k)\\ g^{k+1}\leftarrow g^k+A^+(g-Au^{k+1})\end{cases} \tag{21}$$

3.2 两种 A^+ 线性 Bregman 迭代的等价性

定理 3 对任意矩阵 A，求解问题式(3)的迭代式(9)等价于迭代式(21)。

证明：首先由式(21)及 $u^0=g^0=0$，我们有 $g^1=g^0+A^+(g-Au^0)=A^+g$，$u^1=\delta T_\mu(g^1)$；$g^2=g^1+A^+(g-Au^1)=A^+(2g-Au^1)$，$u^2=\delta T_\mu(g^2)$；$g^3=g^2+A^+(g-Au^2)=A^+(3g-Au^1-Au^2)$，$u^3=\delta T_\mu(g^3)$；…；$g^{k+1}=g^k+A^+(g-Au^k)=A^+[(k+1)g-\sum_{i=1}^{k}Au^i]$，$u^{k+1}=\delta T_\mu(g^{k+1})$；…。

令 $v^{k+1}=(k+1)g-\sum_{i=1}^{k}Au^i$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $g^{k+1}=A^+v^{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots$，因此 $v^{k+1}=(kg-\sum_{i=1}^{k-1}Au^i)+(g-Au^k)=v^k+(g-Au^k)$

$u^{k+1}=\delta T_\mu(A^+v^{k+1})$，即为式(9)。

另一方面，在式(9)第一式的两端同乘以 A^+ 得到

$A^+v^{k+1}=A^+v^k+A^+(g-Au^k)$

令 $A^+v^{k+1}=g^{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots$即可得到式(21)。

结束语 本文提出一种求解非满秩稀疏最小二乘问题的新 Bregman 迭代正则化方法，它可以用于非满秩稀疏信号重构问题的求解。它由于仅仅需要矩阵向量乘积和压缩算子的计算，使得新的算法很容易实现。同时文中还给出了新方法与 A^+ 线性 Bregman 迭代的等价定理。

参考文献

[1] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM J. Sci. Comput, 1998, 20: 33-61

[2] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 489-509

[3] Donoho D L. Compressed Sensing[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 1289-1306

[4] Hale E, Yin W, Zhang Y. A Fixed-Point Continuation Method for L1-Regularization with Application to Compressed Sensing [R]. CAAM Technical Report tr07-07. Rice University, Houston, TX, 2007

[5] Yin W, Osher S, Goldfarb D, et al. Bregman iterative algorithms for ℓ_1-Regularization with Application to Compressed Sensing [J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2008, 1: 143-168

[6] Cai J F, Chan R H, Shen Z. Linearizad Bregman iterations for compresses sensing[J]. Math. Comp., 2009, 78(267): 1515-1536

[7] Cai J F, Osher S, Shen S W. Linearized Bregman Iteration for Frame-Based Image Deblurring[J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2009, 2(1): 226-252

[8] 张慧，成礼智. A^-线性 Bregman 迭代算法[J]. 计算数学，2010，32(1): 97-104

[9] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: Theory and Applications(2nd ed)[M]. New York, NY: Springer, 2003: 35-130

[10] Osher S, Mao Y, Dong B, et al. Fast Linearized Bregman Iteration for Compressed Sensing and Sparse Denoising[R]. Report 08-37, UCLA. CAM, 2008: 1-18

[11] Donoho D L. Denoising by softthresholding[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 3: 613-627

(上接第 66 页)

[4] Srinivas N, Deb K. Multiobjective Function optimization using nondominated sorting genetic algorithm[J]. Evolutionary Computation, 1995, 2(2): 221-248

[5] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 1-24

[6] Hajela P, Lin C Y. Genetic search strategies in multicriterion optimal design[J]. Structure Optimization, 1992, 4: 99-107

[7] Deb K. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-Ⅱ[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197

[8] Deb K. Multi-objective genetic algorithms : Problem difficulties and construction of test problems[J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230

[9] Leung Y W, Wang Y P. A quality measure for multi-objective programming[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Human, 2003, 33(2): 337-343

[10] Van Veldhuizen D A. Multiobjective evolutionary algorithms: classification, analysis, and new innovations[M]. Doctoral Dissertation, Graduate School of Engineering of the Air Force Institute of Technology, WPAFB, OH, USA, August 1999: 22-24

[11] 王宇平，焦永昌，张福顺. 解多目标优化的均匀正交遗传算法[J]. 系统工程学报，2003，18(6): 481-486

[12] Deb K. Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems[J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230

[13] Leung Y W, Wang Y P. A quality measure for multi-objective programming[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part A: System and Human, 2003, 33(2): 337-343