一种元素最大描述下的多粒度覆盖粗糙集模型

刘财辉

(赣南师范学院数学与计算机科学学院 赣州 341000) (同济大学计算机科学与技术系 上海 201804)

摘 要 利用元素的最大描述,将传统多粒度粗糙集拓展到覆盖空间,首先提出了两种新的多粒度粗糙集模型,然后对模型的一些基本性质进行了研究,给出了不同多粒度覆盖粗糙集产生相同上、下近似的条件,最后研究了两种模型之间的关系。

关键词 粗糙集,多粒度,覆盖,约简,最大描述

中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Covering-based Multigranulation Rough Set Model Based on Maximal Description of Elements

LIU Cai-hui

(Department of Mathematics & Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China)

(Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract This paper proposed two kinds of covering-based multigranulation rough sets by employing the maximal description of elements. Firstly, some basic properties of the models were investigated. Then, the conditions for two distinct covering-based multigranulation rough sets to produce the identical lower and upper approximations were studied. Finally, the relationships between the two models were explored.

Keywords Rough sets, Multigranulation, Covering, Reduct, Maximal description

1 引言

鉴于 Pawlak 粗糙集模型在实际问题中的 3 种局限性[1,2]:(1)进行面向多源信息系统的知识发现时算法耗时过大,(2)处理具有高维特征的数据时的低效性,(3)在处理分布式信息系统和多智能 Agent 中的不适应性,Qian 等[1,2]从粒计算的角度出发,提出了多粒度粗糙集模型,并证明了多粒度粗糙集模型是经典粗糙集模型的一种拓展模型。自多粒度粗糙集模型提出以来,引起了不少学者的兴趣[3-8],例如,Yang 等利用容差关系、相似关系、限制容差关系构造了在不完备信息系统中的多粒度粗糙集模型,Xu 等通过定义个体的特征函数,提出了一种一般关系下的多粒度粗糙集,等等。然而,从已有文献来看针对覆盖条件下的多粒度粗糙集模型研究报道却不多[9,10]。在文献[9]中,提出了基于元素最小描述的多粒度覆盖粗糙集模型,然而正如 Yao 等[11]指出"覆盖粗糙集在元素最大描述下的研究同样重要",基于这一点,本文将研究基于元素最大描述下的多粒度覆盖粗糙集模型。

本文第 2 节给出一些基础知识;第 3 节首先提出两种最大描述下的多粒度粗糙集模型并对其性质进行研究;然后,基于覆盖约简的概念,给出了不同多粒度覆盖粗糙集产生相同上、下近似集的充分条件,并用反例说明了这个条件不是必要的;第 4 节研究了两种多粒度覆盖粗糙集模型之间的关系;最后,对全文进行了小结。

2 基本概念

定义 1 给定一个覆盖近似空间$\langle U,C\rangle$,其中 U 是论域,C 是 U 的一个覆盖。对任意的 $x\in U$,称 $MD(x)=\{K\in C|x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\supseteq K\Rightarrow K=S)\}$为 x 的最大描述。

定义 2 给定一个覆盖近似空间$\langle U,C\rangle$,对任意的 $X\subseteq U$,它的下、上近似集可定义为:

$$\underline{FC}(X)=\{x\in U|\bigcap MD(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{FC}(X)=\{x\in U|\bigcap MD(x)\cap X\neq\emptyset\}$$

定义 3 给定一个覆盖近似空间$\langle U,C\rangle$,对任意的 $X\subseteq U$,它的下、上近似集也可定义为:

$$\underline{SC}(X)=\{x\in U|\bigcup MD(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{SC}(X)=\{x\in U|\bigcup MD(x)\cap X\neq\emptyset\}$$

设 C 是 U 的一个覆盖,而 $K\in C$。如果 K 是 $C-\{K\}$中某些元素的并,则称 K 是 C 中可约元素,否则称 K 是 C 中不可约元素。把 C 中所有可约元素去掉剩下的部分称为 C 在 U 上的约简,记为 $reduct(C)$。

定义 4[1,2] 给定 $K=(U,\boldsymbol{R})$,其中 $\boldsymbol{R}$ 是 U 上等价关系的集合。对任意给定的 $P,Q\in\boldsymbol{R}$ 和 $X\subseteq U$,X 关于 P 和 Q 的多粒度下近似和上近似定义如下:

$$\underline{P+Q}X=\{x\in U|[x]_P\subseteq X \text{ 或 } [x]_Q\subseteq X\}$$

$$\overline{P+Q}X=\sim\underline{P+Q}(\sim X)$$

式中,$\sim X$ 表示 X 在 U 上的补集。

到稿日期:2013-05-21 返修日期:2013-07-09 本文受国家自然科学基金项目(61273304),国家自然科学基金项目(61305052),赣南师范学院校级课题(10kyz03)资助。

刘财辉(1979-),男,副教授,主要研究方向为粗糙集、粒计算、机器学习等,E-mail: liu_caihui@163.com。

定理 1[1,2] 给定 $K=(U,\boldsymbol{R})$，$P,Q\in\boldsymbol{R}$，对任意的 $X\subseteq U$，多粒度粗糙集算子满足如下性质：

(1L) $\underline{P+Q}(U)=U$，(1U) $\overline{P+Q}(U)=U$

(2L) $\underline{P+Q}(\emptyset)=\emptyset$，(2U) $\overline{P+Q}(\emptyset)=\emptyset$

(3L) $\underline{P+Q}(X)\subseteq X$，(3U) $X\subseteq\overline{P+Q}(X)$

(4L) $\underline{P+Q}(X)=\underline{P}(X)\cup\underline{Q}(X)$，

(4U) $\overline{P+Q}(X)=\overline{P}(X)\cap\overline{Q}(X)$

(5L) $\underline{P+Q}(\sim X)=\sim\overline{P+Q}(X)$，

(5U) $\overline{P+Q}(\sim X)=\sim\underline{P+Q}(X)$

(6L) $\underline{P+Q}(\underline{P+Q}(X))=\overline{P+Q}(\underline{P+Q}(X))=\underline{P+Q}(X)$，

(6U) $\overline{P+Q}(\overline{P+Q}(X))=\underline{P+Q}(\overline{P+Q}(X))=\overline{P+Q}(X)$

3 两类多粒度覆盖粗糙集模型

在这一节里，我们利用元素的最大描述概念，提出了两种类型的多粒度覆盖粗糙集模型并对两种模型的性质进行了分析和探索，指出多粒度覆盖粗糙集是多粒度粗糙集的一种有效拓展。此外，对同一个概念在不同多粒度覆盖粗糙集下衍生相同上、下近似的问题进行了研究。

定义 5 设 $\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$ 是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定的 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 及任意的 $X\subseteq U$，概念 X 关于 C_1 和 C_2 的第 I 类多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下。

$$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U\mid \bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U\mid (\bigcap MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ and} (\bigcap MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$$

如果 $\underline{FC_1+FC_2}(X)\neq\overline{FC_1+FC_2}(X)$，则称 X 是关于 C_1 和 C_2 的第 I 类多粒度覆盖粗糙集，否则称 X 是关于 C_1 和 C_2 上的可定义集。

定义 6 设 $\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$ 是一个覆盖近似空间，其中 $\boldsymbol{C}$ 是 U 的覆盖的集合。对给定 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$ 及任意的 $X\subseteq U$，则 X 关于 C_1 和 C_2 的第 II 类多粒度覆盖粗糙集的下、上近似定义如下。

$$\underline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U\mid \bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcup MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$$

$$\overline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U\mid (\bigcup MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ and } (\bigcup MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$$

如果 $\underline{SC_1+SC_2}(X)\neq\overline{SC_1+SC_2}(X)$，则称 X 是关于 C_1 和 C_2 的第 II 类多粒度覆盖粗糙集，否则称 X 是关于 C_1 和 C_2 上的可定义集。

很显然，如果定义 5 和定义 6 中的 $\boldsymbol{C}$ 是论域 U 的划分的集合，则定义 4—定义 6 是等价的。

例 1 给定 $\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，其中 $U=\{a,b,c,d\}$，$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$，$C_1=\{\{a,b\},\{b,c,d\},\{c,d\}\}$，$C_2=\{\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$。若 $X=\{a,d\}$，则根据定义 5 和定义 6，我们有

$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{a\}$，$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{a,c,d\}$

$\underline{SC_1+SC_2}(X)=\emptyset$，$\overline{SC_1+SC_2}(X)=\{a,b,c,d\}$

很显然，定义 3 和定义 4 给定的覆盖多粒度粗糙算子也满足定理 1 所列的各个性质，如表 1 所列，其中 $\underline{F}$，$\overline{F}$ 代表第 I 类覆盖多粒度粗糙下、上算子，$\underline{S}$，$\overline{S}$ 代表第 II 类覆盖多粒度粗糙下、上算子，“√”表示满足性质。

表 1 覆盖多粒度粗糙算子的基本性质

	$\underline{F}$	$\underline{S}$		$\overline{F}$	$\overline{S}$
(1L)	√	√	(1U)	√	√
(2L)	√	√	(2U)	√	√
(3L)	√	√	(3U)	√	√
(4L)	√	√	(4U)	√	√
(5L)	√	√	(5U)	√	√
(6L)	√	√	(6U)	√	√

在后面的讨论中，如果没有特别说明，我们约定符号 T 代表符号 FC 或 SC。

注记 1 $\underline{T_1+T_2}(\underline{T_1+T_2}(\sim X))=\sim\underline{T_1+T_2}(X)$ 和 $\overline{T_1+T_2}(\overline{T_1+T_2}(\sim X))=\sim\overline{T_1+T_2}(X)$ 不一定成立。

例 2（续例 1） 显然 $\sim X=\{b,c\}$。根据定义 5 和定义 6，我们有

$\underline{FC_1+FC_2}(\underline{FC_1+FC_2}(\sim X))\neq\sim\underline{FC_1+FC_2}(X)$

$\overline{FC_1+FC_2}(\overline{FC_1+FC_2}(\sim X))\neq\sim\overline{FC_1+FC_2}(X)$

$\underline{SC_1+SC_2}(\underline{SC_1+SC_2}(\sim X))\neq\sim\underline{SC_1+SC_2}(X)$

$\overline{SC_1+SC_2}(\overline{SC_1+SC_2}(\sim X))\neq\sim\overline{SC_1+SC_2}(X)$

定理 2 给定一个覆盖近似空间 $\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，其中 $C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$。则对任意的 $X,Y\subseteq U$，以下命题成立。

(1) $\underline{T_1+T_2}(X\cap Y)=(\underline{T_1}(X)\cap\underline{T_1}(Y))\cup(\underline{T_2}(X)\cap\underline{T_2}(Y))$

(2) $\overline{T_1+T_2}(X\cup Y)=(\overline{T_1}(X)\cup\overline{T_1}(Y))\cap(\overline{T_2}(X)\cup\overline{T_2}(Y))$

(3) $\underline{T_1+T_2}(X\cap Y)\subseteq\underline{T_1+T_2}(X)\cap\underline{T_1+T_2}(Y)$

(4) $\overline{T_1+T_2}(X\cup Y)\supseteq\overline{T_1+T_2}(X)\cup\overline{T_1+T_2}(Y)$

(5) 若 $X\subseteq Y$，则有 $\underline{T_1+T_2}(X)\subseteq\underline{T_1+T_2}(Y)$

(6) 若 $X\subseteq Y$，则有 $\overline{T_1+T_2}(X)\subseteq\overline{T_1+T_2}(Y)$

(7) $\underline{T_1+T_2}(X\cup Y)\supseteq\underline{T_1+T_2}(X)\cup\underline{T_1+T_2}(Y)$

(8) $\overline{T_1+T_2}(X\cap Y)\subseteq\overline{T_1+T_2}(X)\cap\overline{T_1+T_2}(Y)$

证明：因为(3)，(4)，(7)和(8)可以用(5)和(6)进行证明，因此只需证明(1)，(2)，(5)和(6)。

(1)根据定理 1 中的性质(4L)，我们有 $\underline{T_1+T_2}(X\cap Y)=\underline{T_1}(X\cap Y)\cup\underline{T_2}(X\cap Y)$。

再根据

$\underline{T_1}(X\cap Y)=\underline{T_1}(X)\cap\underline{T_1}(Y)$

$\underline{T_2}(X\cap Y)=\underline{T_2}(X)\cap\underline{T_2}(Y)$

则有

$\underline{T_1+T_2}(X\cap Y)=(\underline{T_1}(X)\cap\underline{T_1}(Y))\cup(\underline{T_2}(X)\cap\underline{T_2}(Y))$

(2)根据定理 1 中的性质(4H)，我们有 $\overline{T_1+T_2}(X\cup Y)=\overline{T_1}(X\cup Y)\cap\overline{T_2}(X\cup Y)$。

再根据

$\overline{T_1}(X\cup Y)=\overline{T_1}(X)\cup\overline{T_1}(Y)$

$\overline{T_2}(X\cup Y)=\overline{T_2}(X)\cup\overline{T_2}(Y)$

则有

$\overline{T_1+T_2}(X\cup Y)=(\overline{T_1}(X)\cup\overline{T_1}(Y))\cap(\overline{T_2}(X)\cup\overline{T_2}(Y))$

(5)根据定义 5，我们有 $\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U\mid\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$。若 $X\subseteq Y$，则有 $\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X\subseteq Y$ 或 $\bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq X\subseteq Y$。

因而，$\underline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq\underline{FC_1+FC_2}(Y)$。

根据定义 6，我们有 $\underline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U\mid\bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcup MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$。若 $X\subseteq Y$，则有 $\bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X\subseteq$

Y 或 $\bigcup MD_{C_2}(x)\subseteq X\subseteq Y$。

因而，$\underline{SC_1+SC_2}(X)\subseteq\underline{SC_1+SC_2}(Y)$。

(6)根据定义 5，我们有 $\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U\mid(\bigcap MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ and } (\bigcap MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$。若 $X\subseteq Y$，则有 $(\bigcap MD_{C_1}(x))\cap Y\neq\emptyset$ and $(\bigcap MD_{C_2}(x))\cap Y\neq\emptyset$。因而，$\overline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq\overline{FC_1+FC_2}(Y)$。

根据定义 6，我们有 $\overline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U\mid(\bigcup MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset \text{ and } (\bigcup MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$。若 $X\subseteq Y$，则有 $(\bigcup MD_{C_1}(x))\cap Y\neq\emptyset$ and $(\bigcup MD_{C_2}(x))\cap Y\neq\emptyset$。因而，$\overline{SC_1+SC_2}(X)\subseteq\overline{SC_1+SC_2}(Y)$。

例 3(续例 1)　设 $Y=\{a,b\}$，则有 $X\cap Y=\{a\}$，$X\cup Y=\{a,b,d\}$。根据定义，我们有

(1)$\underline{FC_1+FC_2}(X\cap Y)=\{a\}=(\underline{FC_1}(X)\cap\underline{FC_1}(Y))\cup(\underline{FC_2}(X)\cap\underline{FC_2}(Y))$

$\overline{FC_1+FC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}=(\overline{FC_1}(X)\cup\overline{FC_1}(Y))\cap(\overline{FC_2}(X)\cup\overline{FC_2}(Y))$

$\underline{FC_1+FC_2}(X\cap Y)=\{a\}\subseteq\underline{FC_1+FC_2}(X)\cap\underline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a\}$

$\overline{FC_1+FC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}\supseteq\overline{FC_1+FC_2}(X)\cup\overline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a,b,c,d\}$

$\underline{SC_1+SC_2}(X\cap Y)=\emptyset=(\underline{SC_1}(X)\cap\underline{SC_1}(Y))\cup(\underline{SC_2}(X)\cap\underline{SC_2}(Y))$

$\overline{SC_1+SC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}=(\overline{SC_1}(X)\cup\overline{SC_1}(Y))\cap(\overline{SC_2}(X)\cup\overline{SC_2}(Y))$

$\underline{SC_1+SC_2}(X\cap Y)=\emptyset\subseteq\underline{SC_1+SC_2}(X)\cap\underline{SC_1+SC_2}(Y)=\emptyset$

$\overline{SC_1+SC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}\supseteq\overline{SC_1+SC_2}(X)\cup\overline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a,b,c,d\}$

(2)根据 $Y=\{a,b\}\subset X\cup Y=\{a,b,d\}$，我们有

$\underline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a,b\}\subset\underline{FC_1+FC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}$

$\overline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a,b,c,d\}\subseteq\overline{FC_1+FC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}$

$\underline{FC_1+FC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}\supset\underline{FC_1+FC_2}(X)\cup\underline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a,b\}$

$\overline{FC_1+FC_2}(X\cap Y)=\{a\}\subset\overline{FC_1+FC_2}(X)\cap\overline{FC_1+FC_2}(Y)=\{a,c,d\}$

$\underline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a\}\subset\underline{SC_1+SC_2}(X\cup Y)=\{a,b,d\}$

$\overline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a,b,c,d\}\subseteq\overline{SC_1+SC_2}(X\cup Y)=\{a,b,c,d\}$

$\underline{SC_1+SC_2}(X\cup Y)=\{a,b,d\}\supset\underline{SC_1+SC_2}(X)\cup\underline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a\}$

$\overline{SC_1+SC_2}(X\cap Y)=\{a,b\}\subset\overline{SC_1+SC_2}(X)\cap\overline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a,b,c,d\}$

定义 7　给定一个覆盖近似空间 $\langle U,\mathbf{C}\rangle$，如果 $C_1,C_2\in\mathbf{C}$，则有 $reduct(C_1)=\{C_{11},C_{12},\cdots,C_{1p}\}$ 和 $reduct(C_2)=\{C_{21},C_{22},\cdots,C_{2q}\}$。如果对任意 $x\in U(x\in C_{1i}(1\leqslant i\leqslant p),x\in C_{2j}(1\leqslant j\leqslant q))$，都有 $C_{1i}\subseteq C_{2j}$ 成立，也即 $reduct(C_1)\subseteq reduct(C_2)$，则我们说 C_1 优于 C_2，记为 $C_1\preceq C_2$。

定理 3　给定一个覆盖近似空间 $\langle U,\mathbf{C}\rangle$，$C_1,C_2\in\mathbf{C}$，对任意的 $X\subseteq U$，我们有

(1)若 $C_1\preceq C_2$，则 $\underline{T_1+T_2}(X)=\underline{T_1}(X)$ 成立。

(2)若 $C_1\preceq C_2$，则 $\overline{T_1+T_2}(X)=\overline{T_1}(X)$ 成立。

证明：(1)对任意的 $X\subseteq U$，如果 $C_1\preceq C_2$，则根据定义 5 和定义 7，我们有

$$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{x\in U\mid\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq X\}=\{x\in U\mid\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X\}=\underline{FC_1}(X)$$

对任意的 $X\subseteq U$，如果 $C_1\preceq C_2$，根据定义 6 和定义 7，我们有

$$\underline{SC_1+SC_2}(X)=\{x\in U\mid\bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcup MD_{C_2}(x)\subseteq X\}=\{x\in U\mid\bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X\}=\overline{SC_1}(X)$$

(2)可以类似(1)进行证明。

定义 8[12]　设 C 是 U 的一个覆盖，K 是 C 中的一个元素。若在 C 中存在另外一个元素 K' 使得 $K\subset K'$，则我们称 K 是 C 的一个内元(immured element)。

定义 9[12]　设 C 是 U 的一个覆盖。如果删除 C 中所有内元后，剩下的集合仍然是 U 的一个覆盖，则我们称这个新覆盖为 C 的非内元子集(exclusion)，记为 $exclusion(C)$。

定理 4　给定一个覆盖近似空间 $\langle U,\mathbf{C}\rangle$，$C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbf{C}$，其中 $reduct(C_1)$，$reduct(C_2)$，$reduct(C_3)$ 和 $reduct(C_4)$ 是 C_1,C_2,C_3,C_4 相应的约简。只要满足以下 4 个条件之一，则 T_1+T_2 和 T_3+T_4 产生相同的多粒度覆盖粗糙集下近似算子。

(1)$reduct(C_1)=reduct(C_3)$ 且 $exclusion(C_1)=exclusion(C_3)$；

(2)$reduct(C_1)=reduct(C_4)$ 且 $exclusion(C_1)=exclusion(C_4)$；

(3)$reduct(C_2)=reduct(C_3)$ 且 $exclusion(C_2)=exclusion(C_3)$；

(4)$reduct(C_2)=reduct(C_4)$ 且 $exclusion(C_2)=exclusion(C_4)$。

证明：根据定义 8 和定义 9，定理显然成立。

注记 2　定理 5 中的 4 个条件只是充分条件，而不是必要条件，也就是说 T_1+T_2 和 T_3+T_4 有相同的多粒度覆盖粗糙集下近似算子，但相应覆盖的约简或非内元子集不一定相等。

定理 5　给定一个覆盖近似空间 $\langle U,\mathbf{C}\rangle$，$C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbf{C}$，其中 $reduct(C_1)$，$reduct(C_2)$，$reduct(C_3)$ 和 $reduct(C_4)$ 是 C_1,C_2,C_3,C_4 相应的约简。只要满足以下条件之一，则 T_1+T_2 和 T_3+T_4 产生相同的多粒度覆盖粗糙集。

(1)$reduct(C_1)=reduct(C_3)$ 且 $reduct(C_2)=reduct(C_4)$；

(2)$reduct(C_1)=reduct(C_4)$ 且 $reduct(C_2)=reduct(C_3)$。

证明：这里我们只证明情况(1)。情况(2)可类似证明。对任意的 $x\in U$，C 和 $reduct(C)$ 有相同的 $MD(x)$。如果 $reduct(C_1)=reduct(C_3)$ 和 $reduct(C_2)=reduct(C_4)$ 成立，则 C_1 和 C_3 有相同的 $MD(x)$，且 C_2 和 C_4 也有相同的 $MD'(x)$。根据定义，则 T_1+T_2 和 T_3+T_4 产生相同的多粒度覆盖粗糙集。

注记 3　定理 5 中的两个条件只是充分条件，而不是必要条件，也就是说 T_1+T_2 和 T_3+T_4 可能产生相同的多粒度覆盖粗糙集，但相应覆盖的约简不一定相等。

例 4 给定一个覆盖近似空间$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$，$C_1,C_2,C_3,C_4\in\boldsymbol{C}$。其中$U=\{a,b,c\}$，$C_1=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$C_2=\{\{a,b\}\{a,b,c\},\{a,c\}\}$，$C_3=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，$C_4=\{\{a,c\},\{a,b,c\}\}$，则$reduct(C_1)=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$reduct(C_2)=\{\{a,b\},\{a,c\}\}$，$reduct(C_3)=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，$reduct(C_4)=\{\{a,c\}\}$。因而有

$reduct(C_1)\neq reduct(C_3)$

$reduct(C_1)\neq reduct(C_4)$

$reduct(C_2)\neq reduct(C_3)$

$reduct(C_2)\neq reduct(C_4)$

但，对给定$X=\{a,c\}$和$Y=\{a,b,c\}$，根据定义 5 和定义 6，我们有

$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{a,c\}=\underline{FC_3+FC_4}(X)$

$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{a,b,c\}=\overline{FC_3+FC_4}(X)$

$\underline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a,b,c\}=\underline{SC_3+SC_4}(Y)$

$\overline{SC_1+SC_2}(Y)=\{a,b,c\}=\overline{SC_3+SC_4}(Y)$

4 两类多粒度覆盖粗糙集的关系

这一节，我们将讨论在上一节中给出的两种多粒度覆盖粗糙集的关系。

定理 6 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$。则对任意的$X\subseteq U$，我们有

$\underline{SC_1+SC_2}(X)\subseteq\underline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq X\subseteq\overline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq\overline{SC_1+SC_2}(X)$

证明：对任意的$x\in U$，显然有$\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq\bigcup MD_{C_1}(x)$和$\bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq\bigcup MD_{C_2}(x)$。则

$\{x\in U\mid\bigcup MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcup MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$

$\subseteq\{x\in U\mid\bigcap MD_{C_1}(x)\subseteq X \text{ or } \bigcap MD_{C_2}(x)\subseteq X\}$

和

$\{x\in U\mid(\bigcap MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset\}\subseteq\{x\in U\mid(\bigcup MD_{C_1}(x))\cap X\neq\emptyset\}$

且

$\{x\in U\mid(\bigcap MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}\subseteq\{x\in U\mid(\bigcup MD_{C_2}(x))\cap X\neq\emptyset\}$

因而根据定义 5 和定义 6，定理 6 成立。

例 5(续例 1 和例 2) $U=\{a,b,c,d\}$，$X=\{a,d\}$，$C_1=\{\{a,b\},\{b,c,d\},\{c,d\}\}$，$C_2=\{\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$。则我们有

$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\{a\}$，$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\{a,c,d\}$

$\underline{SC_1+SC_2}(X)=\emptyset$，$\overline{SC_1+SC_2}(X)=\{a,b,c,d\}$

显然，

$\underline{SC_1+SC_2}(X)\subseteq\underline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq X\subseteq\overline{FC_1+FC_2}(X)\subseteq\overline{SC_1+SC_2}(X)$

定义 10[12] 设C是U的一个覆盖。如果对任意的$x\in U$，有$|MD(x)|=1$成立，其中$|\cdot|$是集合的基，则称C是一元的(unary)。

定理 7 设$\langle U,\boldsymbol{C}\rangle$是一个覆盖近似空间，$C_1,C_2\in\boldsymbol{C}$。对任意的$X\subseteq U$，如果$C_1$和$C_2$都是一元的，则我们有

(1)$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\underline{SC_1+SC_2}(X)$

(2)$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\overline{SC_1+SC_2}(X)$

证明：若C_1和C_2都是一元的，则对任意的$x\in U$，有$|MD_{C_1}(x)|=1$和$|MD_{C_2}(x)|=1$。因而有$\bigcap MD_{C_1}(x)=\bigcup MD_{C_1}(x)$和$\bigcap MD_{C_2}(x)=\bigcup MD_{C_2}(x)$成立。

根据定义，显然有

$\underline{FC_1+FC_2}(X)=\underline{SC_1+SC_2}(X)$

$\overline{FC_1+FC_2}(X)=\overline{SC_1+SC_2}(X)$

结束语 多粒度粗糙集模型是 Qian 等从粒计算角度出发提出的一种新的粗糙集模型，本文在覆盖近似空间下，利用元素最大描述，提出了两种多粒度覆盖粗糙集模型，这两个模型是 Qian 模型在覆盖上的有效扩展，本文的工作对深入开展多粒度粗糙集模型的研究有一定的推动作用。

参 考 文 献

[1] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye. Rough set method based on multi-granulations[C]//Proceeding of the Fifth IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Beijing, China, July 2006: 297-304

[2] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye, Yao Yi-yu, et al. MGRS: A multi-granulation rough set [J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970

[3] Yang Xi-bei, Song Xiao-ning, Chen Ze-hua, et al. On multigranulation rough sets in incomplete information system [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2012, 3(3): 223-232

[4] Yang Xi-bei, Song Xiao-ning, Dou Hong-li, et al. Multi-granulation rough set: from crisp to fuzzy case [J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2011, 1(1): 55-70

[5] Xu Wei-hua, Zhang Xian-tao, Wang Qiao-rong. A Generalized Multi-granulation Rough Set Approach[C]//Huang D S, et al., eds. ICIC 2011, LNBI 6840, 2012: 681-689

[6] 张明，谭振民，徐维艳，等. 可变粒度粗糙集[J]. 计算机科学，2011, 38(10): 220-222

[7] 翟永健，张宏. 不完备系统中的变精度多粒度粗糙集[J]. 南京航空航天大学学报，2011, 43(6): 781-785

[8] 翟永健，张宏. 不完备系统中的优势关系多粒度粗糙集[J]. 南京理工大学学报，2012, 36(1): 66-72

[9] Liu Cai-hui, Miao Duo-qian. Covering rough set model based on multi-granulations[C]//Proceedings of the Thirteenth International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, LNCS (LNAI) 6743. 2011: 87-90

[10] Lin Guo-pin, Li Jin-jin. A Covering-based pessimistic multigranulation rough set[C]//Proceedings of the Seventh International Conference on Intelligent Computing. LNBI 6840, 2012: 673-680

[11] Yao Yi-yu, Yao Bin-xue. Covering based rough set approximations [J]. Information Sciences, 2012, 200: 91-107

[12] Zhu W. Generalized rough sets based on relations [J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4997-5011