

# 数字图像处理中的偏微分方程方法综述

丁 畅 尹清波 鲁明羽

(大连海事大学信息科学技术学院 大连 116026)

**摘 要** 数字图像处理中的偏微分方程(PDE)方法近年来发展非常迅速,PDE 方法旨在建立偏微分方程的数学模型,而后令图像遵循此偏微分方程变化,最终达到预想的效果。通过偏微分方程处理图像之后得到的效果是用传统方法达不到的。现结合国内外研究现状详细地阐述了图像去噪、图像复原、图像分割、图像增强这 4 类 PDE 模型,同时也分析了偏微分方程建立、偏微分方程求解和偏微分方程实现这 3 个主要的过程。

**关键词** 数字图像处理,偏微分方程,图像去噪,图像分割

中图分类号 TN911.73 文献标识码 A

## Summary of Partial Differential Equation (PDE) Method on Digital Image Processing

DING Chang YIN Qing-bo LU Ming-yu

(School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

**Abstract** The Partial Differential Equation (PDE) Method on Digital Image Processing has developed rapidly in recent years. The PDE method aims to build mathematical model of partial differential equation and makes the image change following the partial differential equation. Finally the image will achieve our goal. The image processing by the traditional method will never reach the effect using the PDE method. According to domestic and overseas studied conditions, we discuss four kinds of PDE models including image de-noising, image imprinting, image segmentation and image enhancement. We also analyze the establishment of partial differential equations, the solution of partial different equations and the implementation of partial differential equations.

**Keywords** Digital image processing, Partial differential equation, Image de-noising, Image segmentation

近年来,偏微分方程(PDE)方法在数字图像处理中的应用十分广泛。本文第 1 节主要介绍了偏微分方程的产生与发展;第 2 节主要介绍了数字图像处理中偏微分方程建立的过程,其中图像去噪模型的建立来源于物理学中的扩散现象,测地轮廓线模型的建立来源于光程最小原理,故而把这两个模型单独列为 2.1 节受自然现象启发建立的偏微分方程模型;第 3 节主要介绍了人为构造最小化某一能量泛函而建立的 PDE 模型,详细地分析了图像复原模型、图像分割模型、图像增强模型;第 4 节对全文做出了总结和展望。

## 1 偏微分方程概述<sup>[1-3]</sup>

### 1.1 偏微分方程的起源与发展

自然界中的许多物理规律通常用数学语言描述,偏微分方程反映了有关的未知变量及其关于时间变量的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系。早在 18 世纪初,人们已经将弦线振动的问题归结为弦振动方程,并探讨了它的解法,这是人们接触到的第 1 个偏微分方程。随后,人们又陆续了解了流体运动、弹性体的平衡和振动、热传导、电磁相互作用、原子核和电子的相互作用、化学反应过程等自然现象的基本规

律,并把它们写成偏微分方程的形式,偏微分方程理论也逐渐发展、完善。在图像处理领域,同样可以采用偏微分方程方法。它的基本思想是在一个偏微分方程模型中进化一幅图像,一条曲线或一个曲面,通过求解这个偏微分方程来得到期望的结果。

### 1.2 偏微分方程的形式和分类

一个偏微分方程对变量求导数的最高阶数(包括混合导数)称为偏微分方程的阶数,数字图像处理和其他工程技术中都主要用到二阶偏微分方程。一般的二阶线性偏微分方程可以写成如下的形式:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \quad (1)$$

式(1)经过变换可以令混合导项  $a_{12}$  为 0。当  $a_{12} = 0$  时,若  $a_{11}$ 、 $a_{22}$  同号,则为椭圆形偏微分方程。若  $a_{11}$ 、 $a_{22}$  异号,则为双曲型偏微分方程,若  $a_{11}$ 、 $a_{22}$  其中一个为 0,则为抛物型偏微分方程。

### 1.3 偏微分方程的边界条件和初始条件

以弦振动为例,以  $u$  表示弦的横向位移,设弦被固定在  $x = a$  和  $x = b$  两个端点处,那么有:

本文受国家自然科学基金(61073133, 61175053, 61272369),教育部留学回国人员科研启动基金,大连市科技计划项目(2010E15SF153, 2011A17GX073)资助。

丁 畅(1988—),男,硕士生,主要研究方向为数字图像处理的偏微分方程方法,E-mail:longlongclinton@163.com;尹清波(1975—),男,博士,副教授,主要研究方向为模式识别、图像处理等;鲁明羽(1963—),男,博士,教授,CCF 高级会员,主要研究方向为机器学习和数据挖掘等。

$$u(x, t)|_{x=a}=0 \quad (2(a))$$

$$u(x, t)|_{x=b}=0 \quad (2(b))$$

式(2)为边界条件,又设定在开始状态  $t=0$  时,弦的初始形态为  $f(x)$ ,那么有:

$$u(x, t)|_{t=0}=f(x) \quad (3)$$

式(3)为初始条件。

#### 1.4 有限差分法概述

有限差分法解偏微分方程的主要思想是化微分为差分,化微分方程为差分方程。

如  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ , 差分近似为  $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$ , 其中  $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$  为前向差分格式, 相应地  $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t}$  为后向差分格式,  $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\Delta t}$  为中心差分格式。

对于二阶导数,只需把它的一阶导数当作原函数再求一阶导数即可。如  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$ 。比如一个抛物型方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (4)$$

根据上述各式,化微分方程为差分方程得:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} + f_k^n \quad (5)$$

整理得:

$$u_k^{n+1} = \frac{a\tau}{h^2} u_{k+1}^n + (1 - \frac{2a\tau}{h^2}) u_k^n + \frac{a\tau}{h^2} u_{k-1}^n + \tau f_k^n \quad (6)$$

这样再根据偏微分方程的初始条件和边界条件经过迭代,可以把每个时间层的数据都求解出来。在数字图像处理编写程序部分会用到迭代的方法求偏微分方程的数值解。

#### 1.5 应用偏微分方程处理图像的优点

应用偏微分方程处理图像的优点很多。本文突出体现了PDE在图像处理中可以达到“双重功效”的这一优点。例如应用PDE方法对图像进行去噪,在图像去噪的同时可以较好地保护图像的边缘。又如PDE增强模型,利用PDE方法可以在图像增强的同时去除噪声,而传统图像处理的做法是把图像增强和去除噪声分开进行。PDE方法处理图像的效果是传统方法处理图像的效果所达不到的。这些在后文将详细论及。

## 2 图像处理中偏微分方程建立的过程

### 2.1 受自然现象启发建立的偏微分方程模型<sup>[4-18]</sup>

#### 2.1.1 受扩散现象启发建立的去噪模型<sup>[4-17]</sup>

物理学中的扩散现象可应用到数字图像处理领域当中。扩散方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (a \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (7)$$

如果把式(7)中的  $u$  换成数字图像中的灰度值  $I$ ,便得到图像中的扩散如下式:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \quad (8)$$

在传统数字图像处理中,去除噪声的同时必然导致边缘模糊。但是,利用偏微分方程处理图像在去除噪声的同时还可以保留图像的边缘信息。Perona 和 Malik<sup>[11]</sup>于1990年提出将式(8)中的常数  $a$  换成变量  $g|\nabla I|$ ,得:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = g(|\nabla I|) (\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}) \quad (9)$$

式(9)是著名的PM方程。 $g(|\nabla I|)$ 中的  $g$  为边缘函数。函数  $g$  的特性是单调递减函数,在自变量大过一定值后,函数值为0。 $\nabla I$  为图像灰度值的梯度,对  $\nabla I$  取幅值后,得到  $|\nabla I|$ ,它描述的是图像灰度值的变化。例如图像灰度值变化越大,  $|\nabla I|$  就越大。对式(9)做行为分析可知在图像平滑的部分,  $|\nabla I|$  小,  $g(|\nabla I|)$  值大,图像扩散速度快,可以达到去除噪声的目的。在图像边界处,  $|\nabla I|$  大,  $g(|\nabla I|)$  值小,图像扩散速度变得缓慢,可以达到保留图像边缘信息的目的。这样双重功效皆可达到。

边缘函数  $g(x)$  一般取为  $g(x) = \frac{1}{1 + (x/k)^2}$ , 国内学者佟成等<sup>[12]</sup> 提出取  $g(x) = \frac{1}{\ln[e + (x/k)^2]}$  得到了对图像更好的平滑效果且算法迭代次数少。在另一种模型CLMC模型<sup>[13,14]</sup> 中的边缘函数取为  $g(x) = 1 - \exp[-\frac{3.315}{(x/\lambda)^4}]$  也得到了对图像更好的去噪效果。

在扩散去噪模型中, Michiel Schaa<sup>[15]</sup> 提出了一种新的方法,该方法的思想是令扩散后的图像与原图像按比例进行融合,生成处理后的图像,如下式:

$$I_{out} = T_p(S) I_{in} + (1 - T_p(S)) I_{ed}$$

式中,  $I_{in}$ ,  $I_{ed}$ ,  $I_{out}$  分别表示输入的原始图像、扩散后的图像、最后输出的图像。 $T_p(S)$  为比例系数。

国内学者刘桂兰<sup>[16]</sup> 基于经典的PM模型,也提出了一类带时滞非线性PDE模型在图像去噪中的应用。该模型与以往图像去噪模型不同,以2阶扩散张量代替经典的各向异性扩散系数,对经典PM模型做出了改进。

#### 2.1.2 受光程最小原理启发建立的测地线轮廓(GAC)模型<sup>[17]</sup>

光学中的Fermat原理指出,光在不均匀介质中传播时,“光线”不是直线,而是按最短光程的方式确定其路径。如果介质的折射率为  $n(x, y, z)$ ,那么光线从  $A$  点传播到  $B$  点的实际路径应满足积分式

$$L_R = \int_A^B n(s) ds \quad (10)$$

$L_R$  达到最小值时的从  $A$  点到  $B$  点的路径就是光线传播的实际路径。这一想法完全可以应用到图像分割中。如测地线轮廓模型需要确定一幅图像的边缘,一幅图像中的边缘一定是  $|\nabla I|$  沿着某条封闭曲线积分取得最大值时的位置,这条封闭的曲线就是图像的边缘。具体可用数学公式表达为:

$$L = \int_l g(|\nabla I|) ds \quad (11)$$

式中,  $L$  为泛函,  $g$  为单调减函数,  $L$  最小时的  $l$  便是图像的边缘,确定  $l$  的方法是变分法,后文将做出说明。描述  $l$  的变化可用梯度下降流,如下式:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = g(C) \kappa \vec{N} - (\nabla g \cdot \vec{N}) \vec{N} \quad (12)$$

式中,  $g$  表示边缘函数,  $C$  表示当前曲线,  $\kappa$  表示曲线的曲率,  $\vec{N}$  表示曲线的单位法向量,式(12)称为梯度下降流,形象地可称之为演化方程。将一条闭合的曲线内嵌入图像当中后,通过程序调试,令曲线按照式(12)进行演化,最终曲线停止的位置将是一幅图像的轮廓线,如图1<sup>[5]</sup>所示。

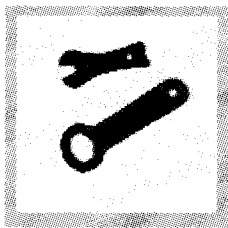


图 1

## 2.2 人为构造某一能量泛函建立的 PDE 模型<sup>[18]</sup>

人为构造某一能量泛函而后建立的模型占大多数。它的要领在于人为构造一个能量泛函,最小化这个人构造的能量泛函,可以达到实现数字图像处理的目的,如图像复原、图像分割。最小化能量泛函后利用变分法得出的偏微分方程模型即数字图像处理的核心。后文所述的 PDE 模型都是人为构造某一能量泛函建立的模型。

## 2.3 Euler 方程与梯度下降流<sup>[1,5,19,20]</sup>

由最小化能量泛函推出偏微分方程中的重要一步是应用 Euler 方程,以下说明用微扰法推出 Euler 方程,以及梯度向量流的引入。 $y$  为泛函,  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$  在  $y$  处取得极小值。现考虑对最优解做一个  $v(x)$  的微扰,  $v(x)$  满足  $v(a) = 0, v(b) = 0, v(x)$  具备任意性。那么根据 Taylor 展开,下式成立:

$$F(x, y+v, y'+v') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial y'}v' + \dots \quad (13)$$

那么  $J(y+v)$  近似等于  $J(y) + \int_a^b (v \frac{\partial F}{\partial y} + v' \frac{\partial F}{\partial y'}) dx$  利用分部积分,可进一步化为:

$$J(y+v) = J(y) + \int_a^b [v \frac{\partial F}{\partial y} - v \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})] dx \quad (14)$$

由于微扰很小,式(14)对任意的  $v, J$  值不变,有:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0 \quad (15)$$

式(15)是著名的 Euler 方程, Euler 方程的推出还有其它方法,读者可参见文献[1]中 P190-192。对于二维情况  $J(u) = \iint_n F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$ , 用类似的方法得出对应的 Euler 方程为:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x}) - \frac{d}{dy}(\frac{\partial F}{\partial u_y}) = 0 \quad (16)$$

对于式(15)采用数值解法的算法复杂性较高,于是必须采用梯度下降流方法。以一维泛函为例,梯度下降流的主要思想在于人为地增加一个时间变量  $t$ , 使  $y$  不断随时间变化,变化的结果是使  $J(y)$  不断地减小。最终  $J(y)$  趋于稳定,此时的  $J(y)$  就是极小值,就是  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$  的解。梯度下降流方法的好处在于初始的  $y$  可以取一个满足条件的任意函数。以下说明梯度下降流具体实施过程,微扰项  $v(x, t)$  可作为由  $y(x, t)$  从  $t$  到  $t + \Delta t$  所产生的改变量,即  $v = \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t$ , 代入式(14)得:

$$J(y, t + \Delta t) = J(y, t) + \Delta t \int_a^b \frac{\partial y}{\partial t} [\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})] dx \quad (17)$$

为确保  $J(y, t + \Delta t)$  不断减小,令:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})] \quad (18)$$

被积函数就会始终小于或等于 0, 达到了目的。式(18)

就是梯度下降流。当  $y$  稳定后,  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$ , 这时的  $y$

便是  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$  的解。类似地,对于二维变分问题  $u =$

$u(x, y)$ , 梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u_x}) + \frac{d}{dy}(\frac{\partial F}{\partial u_y}) - \frac{\partial F}{\partial u} \quad (19)$$

为下文 PDE 图像复原模型做准备,现讨论  $F = \rho(|\nabla u|)$

$= \rho[(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}]$  时的 Euler 方程和梯度下降流。根据式

(16), 得出 Euler 方程为:

$$\text{div}[\rho'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}] = 0 \quad (20)$$

根据式(19)得梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}[\rho'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}] \quad (21)$$

当  $\rho(r) = r$  时, 梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \quad (22)$$

当  $\rho(r) = r^2$  时, 忽略常数因子, 得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (23)$$

## 3 图像处理中的 PDE 模型分类概述与分析

### 3.1 图像复原的 PDE 模型

一幅图像在成像的过程中, 往往会有相对运动和成像系统的噪声使图像模糊。因此需要对图像进行复原。图像复原的 PDE 方法难点在于最小化能量泛函的确定。

#### 3.1.1 图像复原模型的建立过程

在数字图像处理的偏微分方程方法中, 图像以  $|\nabla u|$  作为故有特征, 建立 PDE 的过程总是以  $|\nabla u|$  为着手点。图像复原的主要思想在于最小化类似于  $|\nabla u|$  这种形式的函数的能量泛函, 达到对图像的复原的效果。但最小化的那个函数究竟是何种形式, 一些学者做出了很多研究工作, 大多是在  $\int |\nabla u|^2$  和  $\int |\nabla u|$  做出取舍。Rudin, Osher 和 Fatime<sup>[21]</sup> 从两个方面做出对比, 首先提出应以  $\int |\nabla u|$  作为最小化能量泛函。

以一维泛函为例, 考虑泛函  $J(u) = \int_a^b |u_x| dx$ , 函数  $u(x)$  满足边界条件  $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ , 无论  $u(x)$  这个函数是何种形态, 最终  $J(u)$  的结果都是  $|\alpha - \beta|$ 。而选择泛函  $J(u) = \int_a^b |u_x|^2 dx$  作为最小化能量泛函的标准。  $u(x)$  若有大的跳变, 将率先被平滑, 此图像的信息不能被保存下来。只有采用泛函  $J(u) = \int_a^b |u_x| dx$  图像的跳变才有可能在全变分的过程中被保存下来。另一方面, 根据 2.3 节中式(23), 最小化  $\int |\nabla u|^2$  的梯度下降流为线性扩散方程:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , 因为在  $x$  方向和  $y$  方向扩散系数相同, 所以经过数值离散化后的  $u_{i,j}$  在 4 个邻域点上具有相同的权重, 必然导致图像边缘的模糊化。再根据 2.3 节中式(22), 最小化  $\int |\nabla u|$  的梯度下降流为非线性扩散方程:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{|\nabla u|} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ 。由于  $\frac{1}{|\nabla u|}$

这一项的作用,经过数值离散化后的  $u_{i,j}$  在 4 个邻域点上具有不同的权重,可阻止边缘的弥散化。

### 3.1.2 图像复原模型<sup>[21]</sup>

由上文所述,图像复原的能量泛函可表示为:

$$J(u) = \int |\nabla u| d\Omega + \lambda \int [h_d * u - u_0]^2 d\Omega \quad (24)$$

$h_d * u = u_0$  为  $u$  的约束条件。其中  $h_d$  为成像系统的弥散函数,  $u_0$  为成像系统的输出图像。

式(24)推出的 Euler-Langrange 方程为:

$$\lambda h_d * (h_d * u - u_0) - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \quad (25)$$

式(25)在  $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  中存在  $\nabla u = 0$  的点,式(25)具有病态性质,对其进行正则化得经过修正的 Euler-Langrange 方程为:

$$\lambda h_d * (h_d * u - u_0) - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta}}\right) = 0 \quad (26)$$

式(26)的梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta}}\right) - \lambda h_d * (h_d * u - u_0) \quad (27)$$

### 3.1.3 几个图像复原的新模型<sup>[22-25]</sup>

国内学者近些年来也提出过图像复原的新模型,应用到图像复原中也取得了良好的效果。选取  $\int_{\Omega} \sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2}$  作为能量泛函,二阶导数相比一阶导数对边缘信息更敏感,对噪声的平滑速度更快,取得了更好的效果。所建立的能量泛函为:

$$J(u) = \int_{\Omega} \sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2} dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} [u(x, y) - u_0(x, y)]^2 dx dy \quad (28)$$

约束条件为

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [u(x, y) - u_0(x, y)]^2 dx dy = \sigma^2$$

式(28)推出的 Euler-Langrange 方程为:

$$\left(\frac{u_{xx}}{\sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2}}\right)_{xx} + \left(\frac{u_{yy}}{\sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2}}\right)_{yy} + \lambda(u - u_0) = 0 \quad (29)$$

国内学者王朔中<sup>[26]</sup>等人基于热传导模型建立了 PDE 修复模型。该方法采用更为简洁的数学表达,能以较低的计算复杂度实现有效的图像结构层修复。实验结果表明该方法适用于修复图像中的小块缺损和划痕,消除可见水印等叠加成分。

## 3.2 图像分割的 PDE 模型<sup>[26-34]</sup>

图像分割的 PDE 方法大致可分为蛇模型方法、水平集方法和近年来提出的梯度向量流(GVF)方法。

1987 年, M. Kass<sup>[26]</sup> 提出了基于能量变分的活动轮廓模型(active contour model),即蛇模型(snake model)。蛇模型可分为几何式蛇模型和参数式蛇模型两大类。几何式蛇模型是 Caselles<sup>[27]</sup> 和 Malladi<sup>[28]</sup> 提出的,该模型基于曲线演化理论,用水平集方法实现,它的演化过程是基于曲线的几何度量参数,如法向量、曲率等,如 2.1.2 节提到的 GAC 模型是经典的几何式蛇模型。参数式蛇模型是用一条参数曲线表示蛇模型的活动轮廓,通过最小化能量函数使得该曲线在图像上移动,并最终收缩到待分割的目标边界上。其优点是运算速度快,但由于模型表示是采用参数化曲线,当演化曲线的拓扑结构变化时,参数无法自适应变化。

水平集方法是由 Osher 和 Sethian<sup>[29]</sup> 于 1988 年提出的,这是一种基于几何形变的曲线演化模型。它是将轮廓曲线嵌入到一个高维函数中,用某个水平集(通常是零水平集)隐式表示,演化过程中不同拓扑结构的水平集都对对应同一个水平集函数,因此,可自动控制拓扑结构的变化。

### 3.2.1 PDE 图像分割的思想和指标

图像分割的 PDE 方法的主要思想是首先建立一个初始曲线,再设置曲线的推动力,曲线在推动力的作用下运动,最后曲线停止处就是图像的边缘。一个图像分割的 PDE 模型的 3 个主要指标是(1)曲线能否进入到图像的深陷区域;(2)初始状态下曲线位置的选取是否灵活;(3)PDE 数值解法的算法复杂性。根据这 3 个指标评价 PDE 模型,传统的 Snake 模型存在着两个严重的缺点,首先是曲线无法进入图像深陷区域,其次是初始曲线必须靠近图像轮廓边缘。对此 Xu<sup>[31]</sup> 等在 1997 年提出梯度矢量流主动轮廓模型(GVF),也是目前应用最广泛的模型,GVF 模型对于前两个指标都有很好的效果,但是算法复杂性很高。国内一些学者针对以上 3 个指标的优化也提出了一些新模型。

### 3.2.2 图像分割的 Snake 模型分析<sup>[35-39]</sup>

Snake 模型的最小化能量泛函如下:

$$E_{snake}(v(s)) = \int_0^1 E_{int}(v(s)) + E_{ext}(v(s)) ds \quad (30)$$

$$v(s) = (x(s), y(s)), s \in [0, 1]$$

$$E_{int}(v(s)) = \frac{1}{2} \alpha(s) |v'(s)|^2 + \frac{1}{2} \beta(s) |v''(s)|^2, E_{int}(v(s))$$

表示曲线的内部能量(内力)。它的第 1 项控制曲线的弧长,第 2 项控制曲线的曲率,保证曲线的光滑。 $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$  一般设置为常数。有学者认为第 2 项不必单独提出,根据曲率运动演化性质,在最小化曲线弧长的过程中,也将使曲线逐渐光滑。 $E_{ext}(v(s)) = E_{im}(v(s)) + E_{cm}(v(s))$ ,  $E_{ext}(v(s))$  表示曲线的外部能量(外力)。 $E_{im}(v(s))$  表示图像能量,  $E_{cm}(v(s))$  表示约束力,通常不考虑。

$E_{im} = \omega_{line} E_{line} + \omega_{edge} E_{edge} + \omega_{term} E_{term}$ ,  $E_{line}$  取决于图像本身灰度值,控制初始轮廓向亮的或者暗的区域移动,方向取决于  $\omega_{line}$  的符号。 $E_{edge}$  表示图像边界能量,  $E_{edge} = -|\nabla I(x, y)|^2$ , 这项在活动轮廓模型中起主要作用。一幅图像的边缘一定是在图像灰度值的梯度最大处,换言之,就是最小化  $-\|\nabla I(x, y)\|^2$ 。在实际应用中有时把  $E_{edge}$  设定成函数,如 GAC 模型,  $E_{edge} = g(|\nabla u|)$ ,  $g$  称为停止函数。 $E_{term}$  表示截止泛函,用来寻找曲线的最终收敛位置。 $\omega_{line}$ 、 $\omega_e$  和  $\omega_{term}$  分别表示各个能量项的权重。通常  $E_{ext}$  在实际应用中,只考虑  $E_{edge}$  一项。根据 Euler 方程,式(30)  $E_{snake}(v(s))$  取最小值时的  $v(s)$  是下面偏微分方程的解:

$$\alpha v''(s) - \beta v'''(s) - \nabla E_{ext} = 0 \quad (31)$$

其梯度下降流<sup>[38]</sup>为:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha C''(s) - \beta C'''(s) - \nabla E_{ext}(x, y)$$

上式前两项称为内力即  $F_{int} = \alpha C''(s) - \beta C'''(s)$ , 控制曲线自身的属性。其中,  $\alpha C''(s)$  称为弹性内力,控制曲线的连续性,  $-\beta C'''(s)$  称为刚性内力,使曲线保持平滑。第 3 项称为外力,即  $F_{ext} = -\nabla E_{ext}(x, y)$ , 它是由实验数据决定的,促使活动轮廓线像目标的边界移动。

### 3.2.3 GVF 模型<sup>[40-46]</sup> 分析

GVF 模型的特点在于应用梯度矢量流使曲线收敛到图

像的边缘处。梯度矢量流为  $\vec{p}(x,y)=[u(x,y),v(x,y)]$ , 图像的边缘信息用  $f(x,y)$  表示,  $f(x,y)=-|\nabla(G(x,y)*I(x,y))|^2$ .  $G(x,y)$  为二维高斯函数,  $G(x,y)*I(x,y)$  为原图像经过高斯滤波器平滑后的结果, 最小化能量泛函为:

$$E=\iint\mu(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)+|\nabla f|^2|\vec{p}-\nabla f|^2dxdy \quad (32)$$

式中,  $\mu$  是调节系数, 为常数, 噪声越高时,  $\mu$  的取值越大。根据 Euler 方程,  $E$  取最小值时,  $\vec{p}(x,y)$  满足以下偏微分方程组:

$$\begin{cases} \mu\nabla^2 u-(u-f_x)(f_x^2+f_y^2)=0 \\ \mu\nabla^2 v-(v-f_y)(f_x^2+f_y^2)=0 \end{cases} \quad (33)$$

对式(32)进行分析可见当  $|\nabla f|$  较小时, 即在图像灰度值比较均匀的地方, 式(32)第 1 项起主要作用, 第 1 项很小, 表明在图像灰度值比较均匀的地方  $\vec{p}(x,y)$  变化较小。当  $|\nabla f|$  较大时, 即在图像边缘附近的地方, 式(32)第 2 项起主要作用, 此时  $\vec{p}$  接近于  $\nabla f$  的变化, 并且在图像边缘处,  $\vec{p}(x,y)$  变化比较迅速。

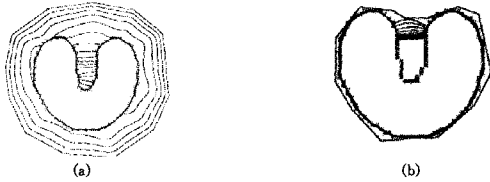


图 2

如图 2<sup>[18]</sup> 所示, 图 2(a) 为用传统方法分割图像的效果, 图 2(b) 为利用 GVF 场分割图像的效果。可见对于深度凹陷图像 GVF 方法明显好于传统方法。式(33)的第 1 项为扩散项,  $\nabla^2$  是拉普拉斯算子。国内学者王宇等人<sup>[42]</sup> 认为将扩散项改为  $div(c(|\nabla u|)\nabla u)$ ,  $c(|\nabla u|)=\exp(-\frac{|\nabla u|^2}{K^2})$  得到了更好的收敛效果。由函数性质可知, 在图像梯度大的地方, 扩散较弱; 在图像梯度较小的地方, 扩散较强。这样就可以有效解决弱边界泄露问题。

### 3.3 图像增强的 PDE 模型<sup>[47-52]</sup> 分析

对于灰度图像而言, 图像增强就是图像灰度值反差增强。传统数字图像处理方法包括累计频率求转换函数方法和分段线性拉伸的直方图均衡化方法。只从图像增强考虑, PDE 方法和累计频率求转换函数方法得到相同的结论。但是, PDE 在图像增强的同时也可实现对图像去噪。这便是 PDE 方法的优势。

图像增强的 PDE 方法需最小化以下能量泛函<sup>[47]</sup>:

$$E(I)=\frac{1}{2}\int\left[\frac{I(x,y)}{D_{\max}}-\frac{1}{2}\right]^2dxdy-\frac{1}{4}\iint|I(x,y)-I(u,v)|dxdy \quad (34)$$

最小化  $E(I)$  的目的在于最小化第 1 项和最大化第 2 项。最小化第 1 项的目的是使增强后的图像整体灰度值接近于  $\frac{D_{\max}}{2}$ , 最大化第 2 项的目的是增强后的图像与原图像相比有较大反差。这两个共同的效果就是图像增强。

根据 Euler 方程, 得出最小化式(34)能量泛函的梯度下降流为:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}=[1-\frac{I(x,y,t)}{D_{\max}}]A_{\Omega}-A(I(x,y,t)) \quad (35)$$

式中,  $A_{\Omega}$  表示图像像素点总数,  $A(I(x,y,t))$  为图像中灰度值大于  $I(x,y,t)$  的个数。稳定后, 式(35)左边为 0。得

$$I(x,y,\infty)=D_{\max}\frac{A_{\Omega}-A(I)}{A_{\Omega}}=D_{\max}(H(I)) \quad (36)$$

假定  $D_{\min}=0$ , 式(36)与传统图像增强的方法有相同的结果。但这不代表 PDE 方法无实际意义, 后文可见。

式(35)可以整理成:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}=[(D_{\max}-D_{\min})H(I(x,y,t))+D_{\min}]-I(x,y,t) \quad (37)$$

式中,  $[(D_{\max}-D_{\min})H(I(x,y,t))+D_{\min}]$  为采用累积频率求转换函数方法得到增强后的图像。式(37)可以归结为下式:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}=f(I(x,y,t))-I(x,y,t) \quad (38)$$

式中,  $f(I(x,y,t))$  表示用户指定的任何灰度变换函数, 对式(38)做简单的行为分析表明, 当  $f(\cdot)$  大于  $I(x,y,t)$  时,  $I(x,y,t)$  将增大, 当  $f(\cdot)$  小于  $I(x,y,t)$  时,  $I(x,y,t)$  将减小。可见,  $I(x,y,t)$  将“跟随”  $f(I(x,y,t))$ , 最终将等于  $f(I(x,y,t))$ 。

人们建立 PDE 模型时基于以上常常再添加一个去除噪声项, 所以 PDE 方法的最大优点在于图像增强的同时可以去除噪声。如以下模型:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}=div(\frac{\nabla I}{|\nabla I|})+\alpha[f(I(x,y,t))-I(x,y,t)] \quad (39)$$

式(39)的梯度下降流可以同时实现对图像的增强和去噪, 参数  $\alpha$  的选取用以平衡图像去噪和图像增强的比重。传统图像增强的方法是先增强后去噪或者先去噪后增强。先增强后去噪的做法会使噪声大大增强, 后续的去噪难以奏效。先去噪后增强难以保护弱的边缘, 原有的弱边缘不能得到有效的增强。这两种传统的图像增强方法都不可能达到 PDE 方法的效果。这里又一次地见到了 PDE 方法的优势。

**结束语** 现已详细论述了数字图像处理中 PDE 方法的思想, PDE 模型建立的过程以及 PDE 模型分析。PDE 模型建立的过程大致可分为如下几步: 第 1 步, 建立最小化能量泛函。第 2 步, 根据 Euler 方程求出梯度下降流。第 3 步, 对某些参数进行确定和对梯度下降流进行修正(如病态方程需正则化)。第 4 步, 利用有限差分法解偏微分方程并编程实现。第 5 步, 观察图像处理的结果, 分析 PDE 模型的优缺点。我们认为在图像扩散中, 边缘函数的选取将决定扩散后的图像的质量, 对于边缘函数的具体形式为何种可以继续深入研究。同时, 根据具体的一幅图像和特定的处理要求, 提出具体的 PDE 模型这一项也值得深入研究, 并且很有研究价值和研究意义。PDE 方法的最大好处就是可以在数字图像处理中达到双重功效。例如在图像去噪的模型中可以较好地保护图像边缘信息, 在图像增强的模型中可以去除噪声。这些效果在传统数字图像处理中是达不到的。同时, 在数学上, 利用有限差分法和有限元方法都可以解偏微分方程, 这为图像处理创造了条件。

### 参考文献

- [1] 乔宝明. 偏微分方程及数值解[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2009
- [2] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程[M]. 北京: 高等教育

- [3] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006
- [4] 冈萨雷斯. 数字图像处理(第二版)[M]. 阮秋琦, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2003
- [5] 王大凯, 侯榆青, 彭进业. 图像处理的偏微分方程方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008
- [6] 张喜, 陈刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京: 高等教育出版社
- [7] 阮秋琦, 作冀颖. 数字图像处理中的偏微分方程方法[J]. 信号处理, 2012, 28(3)
- [8] 高鑫, 刘来福. 基于 PDE 模型的图像处理方法[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(2)
- [9] 林青, 秦志远. 图像处理中的 PDE 及其数值解算方法[J]. 测绘科学技术学报, 2011, 28(5): 360-364
- [10] 刘晓娜, 冯培娟, 沈小凤. 基于偏微分方程(PDE)的图像去噪方法综述[J]. 科技创新导报, 2011, 20: 110-111
- [11] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE IP, 1996, 5(11): 1539-1553
- [12] 佟成, 王士同, 满丽红. 一种改进的 PDE 图像去噪方法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(15): 176, 177
- [13] 刘晨华, 颜兵. 基于小波变换和偏微分方程的图像去噪方法[J]. 山东理工大学学报: 自然科学版, 2007, 21(3): 95-100
- [14] 王俊臣, 王思明, 张吉斌. 改进 CLMC 模型应用于医学图像滤波的研究[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(4): 921-925
- [15] 董婷. 基于偏微分方程的 CT 图像去噪[J]. 科学技术与工程, 2009, 9(19): 5100-5102
- [16] 刘桂兰. 一类带时滞 PDE 模型在图像去噪中的理论研究[J]. 盐城工学院学报: 自然科学版, 2007, 20(3): 51-56
- [17] Casells V, Morel J M, Sapiro G. Geodesic active contours[J]. Int. J. Comput. Vision, 1997, 22: 61-79
- [18] Sumengen B, Manjunath B S. Edge-flow-driven variational image segmentation: theory and performance evolution[J]. IEEE, PAMI, 2005
- [19] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 北京: 知识出版社, 1985
- [20] 房少梅, 黄端山, 陈志. 图像处理中的数学问题[J]. 韶关学院学报: 自然科学版, 2005, 26(9): 1-4
- [21] Rudin L, Osher S, Fatime E. Nonlinear total variation bases noise removal algorithm[J]. Physica D, 1992, 60: 259-268
- [22] 蒋伟, 胡学刚. 一种基于偏微分方程的图像复原新模型[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(14): 187-189
- [23] 惠卫华, 黄晓俊, 杨亚让. 四种经典的 PDE 模型在图像复原方面的应用研究[J]. 喀什师范学院报, 2012, 33(6): 41-44
- [24] You Yu-li, Kaveh M. Fourth-Order Partial Differential Equations for Noise Removal [J]. IEEE Trans action on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1729
- [25] 王朔中, 克达尔, 秦川, 等. 应用热传导模型的偏微分方程图像修复[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2007, 13(4): 331-336
- [26] Kass M, Witkin A, Terzopolos D. Snakes; active contour models [J]. Int. J. Comput. Vis. , 1988, (1): 321-331
- [27] Caselles V, Catte F, Coll T, et al. A geometric model for active contours in image processing[J]. Numerische Mthematik, 1993, 66(1): 1-31
- [28] Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. Shape modeling with front propagation; a level set approach[J]. IEEE Trans-action on pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2): 158-175
- [29] Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed; algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation[J]. Journal of Computational physics, 1988, 79(1): 12-49
- [30] Xu Chen-yang, Jerry L. Prince. A New External Force for Snakes IEEE
- [31] Xu C, Prince J. Snakes, shapes, and gradient vector flow[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 1988, 7(3): 359-369
- [32] 袁建军. 基于偏微分方程图像分割技术的研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2012
- [33] 刘玉霞. 基于 PDE、图割的图像分割模型及算法[D]. 开封: 河南大学, 2007
- [34] Xu Chen-yang, Yezzi, Prince J L. A Summary of Geometric Level-Set Analogues for a General Class of Parametric Active Contour and Surface Models[C]// IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision. 2001: 104-111
- [35] 周林, 平西建, 董莉. 一种改进的自适应距离保持水平集演化方法[J]. 应用科学学报, 2011, 29(3): 274-280
- [36] 董春利, 董育宁, 王利. 活动轮廓模型目标跟踪算法综述[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(34): 208-212
- [37] 吕正冬, 刘润华, 吕新荣. 主动轮廓模型的一种初始轮廓设定方法[J]. CT 理论与应用研究, 2012, 21(4): 605-614
- [38] 常先堂. 基于 PDE 的变分水平集图像分割方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2009
- [39] 朱才志. 基于偏微分方程的数字图像处理的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007
- [40] 方挺, 杨忠, 沈春林. 一种基于主动轮廓模型的运动目标跟踪方法[J]. 信息与控制, 2008, 37(1)
- [41] 柴振华, 罗宏文, 苗闯, 等. 一种保持拓扑结构的隐式活动轮廓图像分割方法[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47(5): 981-986
- [42] 王宇, 张建伟, 陈允杰, 等. 一种新的基于各向异性扩散的 GVF 模型[J]. 计算机工程, 2010, 36(4): 215-217
- [43] Xu Chen-yang, Prince J L. Generalized gradient vector flow external forces for active contours[J]. Signal Processing, 1998, 71: 131-139
- [44] Xu Chen-yang, Prince J L. Global Optimality of Gradient Vector Flow[C]// Conference on Information Sciences and Systems. 2000
- [45] Xu Chen-yang, Pham D L, Rettmann M E. Reconstruction of the Human Cerebral Cortex from Magnetic Resonance Images[J]. IEEE transactions on medical imaging, 1999, 18(6): 467-480
- [46] 王帆, 杨英宝, 陈超. 基于水平集的曲线演化在图像分割中的应用[J]. 地理空间信息, 2012, 10(5): 136-138
- [47] Caselles V, et al. Shape-preserving local contrast enhancement [J]. IEEE, IP, 1999, 8: 220-230
- [48] Sapiro G. Geometric partial differential equations and image analysis[M]. Cambridge University Press, 2001
- [49] 陈颖, 彭进业, 王大凯, 等. 基于 PDE 的图像去噪和反差增强的同步算法[J]. 计算机工程, 2009, 35(23): 224-226
- [50] 克兢, 侯榆青, 王大凯, 等. 一种改进的保持形状的图像对比度增强算法[J]. 光子学报
- [51] 荆萍, 刘丽, 陈伟. 基于 PDE 的图像增强改进方法研究[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(4): 752-755
- [52] 赵建. 基于偏微分方程的非线性图像增强方法[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(6): 358-362
- [53] Maragos P. A representation theory for morphological image and signal processing[J]. IEEE PAMI, 1989, 6: 586-599
- [54] 范子静. 偏微分方程在数字图像处理中的应用[J]. 中国科技创新导刊, 2012, 26: 94
- [55] 马洁. 一种基于线性代数的图像处理算法研究[J]. 计算机科学, 2012, 39(11): 286-288