格值信息系统的粗糙熵与不确定度量

张晓燕[1,2] 桑彬彬[2] 魏 玲[1]
(西北大学数学学院 西安 710127)[1] (重庆理工大学理学院 重庆 400054)[2]

摘 要 在格值信息系统中引入知识粗糙熵、粗集粗糙熵与不确定度量的概念,得到了相应的重要性质。证明了在格值信息系统中,知识粗糙熵随着知识颗粒变大、分类变粗而单调增大,或者随着知识颗粒变小、分类变细而单调减小。进一步通过讨论它们之间的联系说明了粗集的粗糙熵可以更精确地度量粗集的粗糙程度。这些结论为格值信息系统的知识发现奠定了一定的理论基础。

关键词 格值信息系统,知识粗糙熵,不确定度量,粗糙集
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.09.018

Fuzzy Entropy and Uncertain Measurement in Lattice-valued Information Systems

ZHANG Xiao-yan[1,2] SANG Bin-bin[2] WEI Ling[1]
(School of Mathematics,Northwest University,Xi'an 710127,China)[1]
(School of Science,Chongqing University of Technology,Chongqing 400054,China)[2]

Abstract In the Lattice-valued information system,the concept of knowledge rough entropy,rough set rough entropy and uncertaint measurement is introduced,and the important properties are obtained. In this paper,it is proved that the knowledge rough entropy increases monotonically when the particle of the knowledge increases and the classification of the information system becomes rough. Further,by discussing the relation between them,the rough entropy of rough sets can be more accurate to measure the degree of rough sets. These conclusions lay a theoretical foundation for the knowledge discovery of Lattice valued information systems.

Keywords Lattice-valued information system,Knowledge rough entropy,Uncertainty measure,Rough set

1 引言

粗糙集理论[2-5]是近年发展起来的一种处理不精确性、不确定性和模糊知识[1,6]的软计算工具,已被成功地应用在人工智能、故障检测、数据挖掘、医疗诊断、股票数据分析、模式识别、智能信息处理[13,15,16]等领域,并越来越引起国际学术界的关注。经典粗糙集是以完备信息系统为研究对象,以等价关系(满足自反性、对称性、传递性)为基础,通过等价关系将论域分成互不相交的等价类,划分越细,知识越丰富,信息越充分。

然而,在实际问题中许多信息系统由于各种原因(如噪声、信息缺损等)并不是基于等价关系的,这极大地限制了粗糙集理论[5]的研究与应用,因此人们将等价关系放宽为相容关系、相似关系等。特别地,Greco,Matarazzo 和 Slowinski 于 1998 年提出了基于偏序关系的粗糙集研究方法(DRSA),其主要是利用偏序关系[12]代替经典粗糙集[14]中的等价关系建立序信息系统[17-19]来考虑现实中存在的对属性值排序的问题。而且,近年来这一研究也取得了可人的成果。粗糙集模型[11]中的知识表达是通过信息系统被认知的,相当于一个关系表,信息系统是一个反映对象与属性之间关系的数据表。实际上,信息系统就是一个三元数组(U,AT,F),其中,U 是有限非空的对象集,AT 是有限非空的属性集,F 是一个从对象到属性的映射。

在经典的信息系统中,属性值域是单一的实数域。随着粗糙集理论的发展,格值信息系统被提出。为此,本文把知识粗糙熵、不确定度量与粗糙集的粗糙熵引进到格值信息系统中,并研究了它们的重要性质,讨论了它们之间的关系。

2 格值信息系统

格值信息系统也是知识表达系统的一种,区别于经典的知识表达系统,格值信息系统的属性取值域均是格值的。下面介绍格值信息系统的相关概念。

定义 1[8] 称一个四元组 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$为格值信息系统。其中,U 是有限对象集,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$;AT 是有限属性集,$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$;$V=\bigcup_{a\in A}V_a$,$V_a$ 是条件属性 a 的值域,且为有限格,$R^{\geqslant}$ 表示 V_a 上的偏序关系;$f=U\times AT\rightarrow V$ 是一个信息函数,有 $f(x_i,a)\in V_a$,其中 $f\in F$。

设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$为格值信息系统,对于 $A\subseteq AT$,给

到稿日期:2016-06-09 返修日期:2016-09-02 本文受国家自然科学基金(61472463,61402064),重庆市研究生科研创新基金(CYS17281),重庆理工大学研究生创新基金(YCX2015227,YCX2016227)资助。

张晓燕(1979—),女,博士生,副教授,主要研究方向为模糊数学、概念格;**桑彬彬**(1992—),男,硕士,主要研究方向为模糊数学、粗糙集;**魏 玲**(1972—),女,博士,教授,主要研究方向为概念格、粗糙集等。

出二元关系：

$R^{\geqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times U: f(x_i,a_k)\leqslant f(x_j,a_k), \forall a_k\in AT\}$

称为关于条件属性集 AT 的偏序关系。

记 $[x_i]^{\geqslant}=\{x_j\in U:(x_i,x_j)\in R_{AT}^{\leqslant}\}$

$=\{x_j\in U: f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a), \forall a\in AT\}$

称为 x_i 关于条件属性集 AT 的偏序类。

定义 2[8]　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统。对于任意 $X\subseteq U$，定义 X 关于关系 $R^{\geqslant}$ 的下近似和上近似分别如下：

$\underline{R_{AT}^{\geqslant}}(X)=\{x_i\in U\mid [x_i]_{AT}^{\geqslant}\subseteq X\}$

$\overline{R_{AT}^{\geqslant}}(X)=\{x_i\in U\mid [x_i]_{AT}^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$

3　格值信息系统的知识粗糙熵

本节在不协调格值信息系统中引入知识粗糙熵和不确定度量的概念，并建立了其与知识粗糙性的关系。

首先，给出不协调格值信息系统的知识粗糙熵的定义。

定义 3　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。知识 $R^{\geqslant}$ 的粗糙熵定义为：

$$E_r(R^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_R^{\geqslant}|}$$

定理 1(粗糙不变性)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $|U/R^{\geqslant}|=|U/S^{\geqslant}|$，且存在一一对应 $h:U/R^{\geqslant}\rightarrow U/S^{\geqslant}$，使得 $|[x]_R^{\geqslant}|=|h([x]_R^{\geqslant})|$，则 $E_r(R^{\geqslant})=E_r(S^{\geqslant})$。

证明：由定义 3 直接得证。

推论 1　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}=S^{\geqslant}$，则 $E_r(R^{\geqslant})=E_r(S^{\geqslant})$。

定理 2(单调性)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}\preceq S^{\geqslant}$，则 $E_r(R^{\geqslant})\leqslant E_r(S^{\geqslant})$。

证明：由于 $R^{\geqslant}\preceq S^{\geqslant}$，因此对于任意的 $x\in U$，有 $[x]_R^{\geqslant}\subseteq [x]_S^{\geqslant}$，故可知 $|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant|[x]_S^{\geqslant}|$。于是有：

$$E_r(R^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_R^{\geqslant}|}\leqslant-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_S^{\geqslant}|}=E_r(S^{\geqslant})$$

即 $E_r(R^{\geqslant})\leqslant E_r(S^{\geqslant})$。

由定理 2，显然有以下推论。

推论 2　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}\prec S^{\geqslant}$，则 $E_r(R^{\geqslant})<E_r(S^{\geqslant})$。

推论 3　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}\preceq S^{\geqslant}$，且 $E_r(R^{\geqslant})=E_r(S^{\geqslant})$，则 $R^{\geqslant}=S^{\geqslant}$。

定理 2、推论 2 和推论 3 说明，在格值信息系统中，知识粗糙熵随着知识颗粒变大、分类变粗而单调增大，或者随着知识颗粒变小、分类变细而单调减小。

在格值信息系统中，知识粗糙熵的单调性的逆命题不成立，即定理 2 的逆命题不成立。下面举出一个反例来证明这一点。

记 $B'=\{a_1\}$ 和 $B''=\{a_2\}$，且有

$[x_1]_{B'}^{\geqslant}=[x_3]_{B'}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$；

$[x_2]_{B'}^{\geqslant}=[x_5]_{B'}^{\geqslant}=[x_6]_{B'}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$；

$[x_4]_{B'}^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$；

及

$[x_1]_{B''}^{\geqslant}=[x_2]_{B''}^{\geqslant}=[x_6]_{B''}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$；

$[x_3]_{B''}^{\geqslant}=[x_4]_{B''}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$；

$[x_5]_{B''}^{\geqslant}=\{x_5\}$。

计算得：$E_r(R_{B'}^{\geqslant})=1.98747$，$E_r(R_{B''}^{\geqslant})=1.86165$。虽然 $E_r(R_{B''}^{\geqslant})<E_r(R_{B'}^{\geqslant})$，但是却由 $[x_2]_{B''}^{\geqslant}\not\subset[x_2]_{B'}^{\geqslant}$ 得到 $R_{B''}^{\geqslant}\preceq R_{B'}^{\geqslant}$ 不成立。

定理 3(最小值)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}=I^{\geqslant}$，则知识 $R^{\geqslant}$ 的粗糙熵达到最小值 0。

证明：由 $\frac{U}{I^{\geqslant}}=\{[x]_I^{\geqslant}=\{x\}\mid x\in U\}$，有

$$E_r(I^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_R^{\geqslant}|}=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|\{x_i\}|}=0$$

即 $E_r(I^{\geqslant})=0$。

定理 4(最大值)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R^{\geqslant}=\delta^{\geqslant}$，则知识 $R^{\geqslant}$ 的粗糙熵达到最大值 $\log_2|U|$。

证明：由 $\frac{U}{\delta^{\geqslant}}=\{[x]_\delta^{\geqslant}=U\mid x\in U\}$，有

$$E_r(\delta^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_R^{\geqslant}|}=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|U|}=\log_2|U|$$

即 $E_r(\delta^{\geqslant})=\log_2|U|$。

定理 5(有界性)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。知识 $R^{\geqslant}$ 的粗糙熵满足：

(1) $0\leqslant E_r(R^{\geqslant})\leqslant\log_2|U|$；

(2) $E_r(R^{\geqslant})=0$ 当且仅当 $R^{\geqslant}=I^{\geqslant}$；

(3) $E_r(R^{\geqslant})=\log_2|U|$ 当且仅当 $R^{\geqslant}=\delta^{\geqslant}$。

证明：由定理 1—定理 3 直接可得。

定理 6(细化性)　设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R'^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的某个知识颗粒细化成两个知识颗粒后形成的新的偏序关系，且 $U/R'^{\geqslant}$ 中其他知识颗粒与 $U/R^{\geqslant}$ 中的相同，则有 $E_r(R'^{\geqslant})\leqslant E_r(R^{\geqslant})$。

证明：设 $U/R^{\geqslant}$ 中的某个知识颗粒 $[x_i]_R^{\geqslant}$ 分解成两个知识颗粒为 $[x_i]_{R'}^{\geqslant}$ 和 $[x_j]_{R'}^{\geqslant}$（不妨设 $i<j$），其中 $[x_i]_R^{\geqslant}=[x_i]_{R'}^{\geqslant}\cup[x_j]_{R'}^{\geqslant}$，$[x_i]_{R'}^{\geqslant}\subseteq[x_i]_R^{\geqslant}$ 且 $[x_j]_{R'}^{\geqslant}\subseteq[x_j]_R^{\geqslant}$。于是

$$U/R'^{\geqslant}=\{[x_1]_R^{\geqslant},\cdots,[x_{i-1}]_R^{\geqslant},[x_i]_{R'}^{\geqslant},[x_{i+1}]_R^{\geqslant},\cdots,[x_{j-1}]_R^{\geqslant},[x_j]_{R'}^{\geqslant},[x_{j+1}]_R^{\geqslant},\cdots,[x_{|U|}]_R^{\geqslant}\}$$

因此有

$$\begin{aligned}&E_r(R^{\geqslant})\\&=-\sum_{t=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}\\&=-\sum_{t=1}^{i-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_R^{\geqslant}|}-\\&\quad\sum_{t=i+1}^{j-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_j]_R^{\geqslant}|}-\end{aligned}$$

$$\sum_{t=j+1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}$$

$$\geqslant-\sum_{t=1}^{i-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_i]_{R'}^{\geqslant}|}-$$

$$\sum_{t=i+1}^{j-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_j]_{R'}^{\geqslant}|}-$$

$$\sum_{t=j+1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}=E_r(R'^{\geqslant})$$

即 $E_r(R'^{\geqslant})\leqslant E_r(R^{\geqslant})$。

推论 4 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系，且 $R'^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的知识颗粒分解成新的偏序关系。若 $R'^{\geqslant}\preceq R^{\geqslant}$，则 $E_r(R'^{\geqslant})\leqslant E_r(R^{\geqslant})$。

定理 7(粗化性) 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R''^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的某两个知识颗粒粗化成一个知识颗粒后形成的新的偏序关系，且 $U/R''^{\geqslant}$ 中其他知识颗粒与 $U/R^{\geqslant}$ 中的相同，则有 $E_r(R^{\geqslant})\leqslant E_r(R''^{\geqslant})$。

证明：设 $U/R^{\geqslant}$ 中的某两个知识颗粒 $[x_i]_R^{\geqslant}$ 和 $[x_j]_R^{\geqslant}$ 合并成一个知识颗粒 $[x_k]_{R''}^{\geqslant}$(不妨设 $i,j<k$)，其中 $[x_k]_{R''}^{\geqslant}=[x_i]_R^{\geqslant}\cup[x_j]_R^{\geqslant}$，且 $[x_k]_R^{\geqslant}\subseteq[x_k]_{R''}^{\geqslant}$。于是

$$U/R''^{\geqslant}=\{[x_1]_R^{\geqslant},[x_2]_R^{\geqslant},\cdots,[x_i]_R^{\geqslant},\cdots,[x_j]_R^{\geqslant},\cdots,[x_{k-1}]_R^{\geqslant},[x_k]_{R''}^{\geqslant},[x_{k+1}]_R^{\geqslant},\cdots,[x_{|U|}]_R^{\geqslant}\}$$

因此有

$$E_r(R^{\geqslant})$$

$$=-\sum_{t=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}$$

$$=-\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_k]_R^{\geqslant}|}-\sum_{t=k+1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}$$

$$\leqslant-\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_k]_{R''}^{\geqslant}|}-\sum_{t=k+1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}-\sum_{t=j+1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{1}{|[x_t]_R^{\geqslant}|}$$

$$=E_r(R''^{\geqslant})$$

即 $E_r(R^{\geqslant})\leqslant E_r(R''^{\geqslant})$。

推论 5 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。若 $R''^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的知识颗粒合并形成的新的偏序关系，若 $R^{\geqslant}\preceq R''^{\geqslant}$，则有 $E_r(R^{\geqslant})\leqslant E_r(R''^{\geqslant})$。

例 1 表 1 列出一个格值信息系统，要求计算该格值信息系统中知识 $R_A^{\geqslant}$ 和 $R_B^{\geqslant}$ 的粗糙熵。

表 1 给定某格值信息系统

U	a_1	a_2	a_3
x_1	1	{0,1}	[0.1,0.3]
x_2	3	{0,1}	[0.3,0.7]
x_3	1	{0}	[0.3,0.7]
x_4	2	{0}	[0.4,0.9]
x_5	3	{0,1,2}	[0.3,0.7]
x_6	3	{0,1}	[0.4,0.9]

表 1 中，$U=\{x_i\mid i=1,2,\cdots,6\}$ 是对象集，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是属性集，并且该格值信息系统是基于偏序关系 $R^{\geqslant}$ 的，其中：

$R_{a_2}^{\geqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times U:f(x_i,a_2)\subseteq f(x_j,a_2),a_2\in A\}$

$R_{a_3}^{\geqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times U:a_3^L(x_i)\leqslant a_3^L(x_j),a_3^U(x_i)\leqslant a_3^U(x_j),a_3\in A\}$

故有

$[x_1]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$；$[x_2]_A^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$；

$[x_3]_A^{\geqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$；$[x_4]_A^{\geqslant}=\{x_4,x_6\}$；

$[x_5]_A^{\geqslant}=\{x_5\}$；$[x_6]_A^{\geqslant}=\{x_6\}$。

记 $B=\{a_1,a_2\}$，进而得

$[x_1]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$；$[x_2]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$；

$[x_3]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_4]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$；

$[x_5]_B^{\geqslant}=\{x_5\}$；$[x_6]_A^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$。

下面计算该格值信息系统中知识 $R_A^{\geqslant}$ 和 $R_B^{\geqslant}$ 的粗糙熵。

$$E_r(R_A^{\geqslant})=\frac{1}{6}\cdot\log_2 4+\frac{1}{6}\cdot\log_2 3+\frac{1}{6}\cdot\log_2 5+\frac{1}{6}\cdot\log_2 2+\frac{1}{6}\cdot\log_2 1+\frac{1}{6}\cdot\log_2 1=1.15115$$

$$E_r(R_B^{\geqslant})=\frac{1}{6}\cdot\log_2 4+\frac{1}{6}\cdot\log_2 3+\frac{1}{6}\cdot\log_2 6+\frac{1}{6}\cdot\log_2 4+\frac{1}{6}\cdot\log_2 1+\frac{1}{6}\cdot\log_2 3=1.62581$$

显然，$E_r(R_A^{\geqslant})\leqslant E_r(R_B^{\geqslant})$。

4 格值信息系统的不确定度量

定义 4 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。记

$$G(R^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{|[x_i]_R^{\geqslant}|}{U}$$

称 $G(R^{\geqslant})$ 为知识 $R^{\geqslant}$ 的不确定度量。

定理 8 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。$R^{\geqslant}$ 的粗糙熵 $E_r(R^{\geqslant})$ 与不确定度量 $G(R^{\geqslant})$ 之间的关系为

$$E_r(R^{\geqslant})+G(R^{\geqslant})=\log_2|U|$$

证明：$R^{\geqslant}$ 是偏序关系，粒度分类为 $U/R^{\geqslant}=\{[x]_R^{\geqslant}\mid x\in U\}$，故由定义 4 可得

$$G(R^{\geqslant})=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{|[x_i]_R^{\geqslant}|}{U}$$

$$=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot(\log_2|[x_i]_R^{\geqslant}|-\log_2|U|)$$

$$=(-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\cdot\log_2\frac{U}{|[x_i]_R^{\geqslant}|})+\log_2|U|\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}$$

$$=E_r(R^{\geqslant})+\log_2|U|$$

即 $E_r(R^{\geqslant})+G(R^{\geqslant})=\log_2|U|$。

推论 6 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$R^{\geqslant}$ 和 $S^{\geqslant}$ 为 $I^{\geqslant}$ 的偏序关系。$R^{\geqslant}$，$S^{\geqslant}$ 的不确定度量满足：

(1)(粗糙不变性)若 $|U/R^{\geqslant}|=|U/S^{\geqslant}|$，且存在一一对应 $h:U/R^{\geqslant}\to U/S^{\geqslant}$ 使得 $|[x]_R^{\geqslant}|=|h([x]_R^{\geqslant})|$，则 $G(R^{\geqslant})=G(S^{\geqslant})$。

(2)(单调性)若 $R^{\geqslant}\preceq S^{\geqslant}$，则 $G(R^{\geqslant})\geqslant G(S^{\geqslant})$。

(3)(有界性和最值性)不确定性 $G(R^{\geqslant})$ 满足 $0\leqslant G(R^{\geqslant})\leqslant\log_2|U|$；

$G(R^{\geqslant})=\log_2|U|$ 当且仅当 $R^{\geqslant}=I^{\geqslant}$；$G(R^{\geqslant})=0$ 当且仅当 $R^{\geqslant}=\delta^{\geqslant}$。

(4)(细化性)若 $R'^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的某个知识颗粒细化成两个知识颗粒后形成的新的偏序关系，且 $U/R'^{\geqslant}$ 中其他知识颗粒与 $U/R^{\geqslant}$ 中的相同，则有 $G(R'^{\geqslant})\geqslant G(R^{\geqslant})$。

(5)(粗化性)若 $R''^{\geqslant}$ 是将 $U/R^{\geqslant}$ 中的某两个知识颗粒粗化成两个知识颗粒后形成的新的偏序关系，且 $U/R''^{\geqslant}$ 中其他知识颗粒与 $U/R^{\geqslant}$ 中的相同，则有 $G(R^{\geqslant})\geqslant G(R''^{\geqslant})$。

例 2 例 1 已经计算了表 1 中的格值信息系统中知识 $R_A^{\geqslant}$，$R_B^{\geqslant}$ 的粗糙熵，分别为 $E_r(R_A^{\geqslant})=1.15115$，$E_r(R_A^{\geqslant})=1.62581$，且得 $\log_2|U|=2.58496$。其不确定度量的计算如下：

$$G(R_A^{\geqslant})=-\frac{1}{6}\log_2\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{3}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}=1.43381$$

$$G(R_B^{\geqslant})=-\frac{1}{6}\log_2\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{3}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\log_2\frac{3}{6}=0.95915$$

显然：$E_r(R_A^{\geqslant})+G(R_A^{\geqslant})=\log_2|U|$，$E_r(R_B^{\geqslant})+G(R_B^{\geqslant})=\log_2|U|$；$R_A^{\geqslant}\leq R_B^{\geqslant}$，$G(R_A^{\geqslant})\geqslant G(R_B^{\geqslant})$。

5 格值信息系统中粗糙集的粗糙熵

在经典粗糙集理论中，粗糙集的粗糙性由粗糙度来度量，因此在格值信息系统中引入粗糙度的定义来度量粗糙集。

定义 5 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统。$A\subseteq AT$，$X\subseteq U$ 关于知识 $R_A^{\geqslant}$ 的粗糙度定义为：

$$\rho_A(X)=1-\frac{|\underline{R_A^{\geqslant}}(X)|}{|\overline{R_A^{\geqslant}}(X)|}$$

由定义 5 可以看出概念的粗糙度在 0 到 1 之间，从而易得到如下定理。

定理 9 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$A_1,A_2\subseteq AT$，$X\subseteq U$。若 $U/R_{A_1}^{\geqslant}\leq U/R_{A_2}^{\geqslant}$，则 $\rho_{A_1}(X)\leqslant\rho_{A_2}(X)$。

定义 6 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$A\subseteq AT$，粗糙集 $X\subseteq U$ 关于知识 $R_A^{\geqslant}$ 的粗糙熵定义为：

$$E_A(X)=\rho_A(X)E_r(R_A^{\geqslant})$$

由定义 6 可以看出，粗糙集的粗糙熵不仅与粗糙度有关，还与知识的粗糙熵有关。

定理 10 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$A_1,A_2\subseteq AT$，$X\subseteq U$。若 $U/R_{A_1}^{\geqslant}<U/R_{A_2}^{\geqslant}$，则 $E_{A_1}(X)<E_{A_2}(X)$。

证明：由定理 2 和定理 9 可证。

推论 7 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$ 为格值信息系统，$A_1,A_2\subseteq AT$，$X\subseteq U$。若 $A_2\subseteq A_1$，则 $E_{A_1}(X)\leqslant E_{A_2}(X)$。

以上性质说明，粗糙集的粗糙熵随着知识分辨能力的增强而单调下降。

结束语 由于在生产生活中存在各种因素，导致许多信息系统是基于偏序关系的格值而建立的。梁吉业等成功地建立了经典粗糙集下信息系统的熵理论。在此基础上，本文把粗糙熵和不确定度量的概念引入到格值信息系统中，并研究了它们的重要性质，讨论了它们之间的关系。证明了知识粒度和粗糙熵随着知识确定程度的增强而单调下降的结论，并基于此给出了格值信息系统的信息解释。本文通过论证粗糙熵与不确定度量的关系说明粗集的粗糙熵可以更精确地度量粗集的粗糙程度。本文所研究的内容在实际中有非常广泛的应用，例如格值信息系统的粗糙熵可以作为中学教学评教的计算方法，可以合理且有效地进行评教工作。本文所得到的研究结论同样进一步丰富了格值信息系统的知识发现理论。

参 考 文 献

[1] VLACHOS L K, SERGIADIS G D. Intuitionistic fuzzy information: Applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 180-210.

[2] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. A new rough set approach to multicriteria and multiattribute classificatioin[C]// Polkowsik L, Skowron A, eds. International Conference on Rough sets and current trends in computing (RSCTC'98). 1998: 50-70.

[3] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough approximation of a preference relation by dominance relation[J]. Europe Journal of Operation Research, 1999, 117(1): 63-83.

[4] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough set theory for multicriteria decision analysis[J]. Europe Journal of Operation Research, 2001, 129(1): 1-47.

[5] PAWLAK Z. Rough Sets[J]. Communication of the ACM, 1995, 38(1): 89-95.

[6] VLACHOS L K, SERGIADIS G D. Intuitionistic fuzzy information: Applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 180-210.

[7] ZHANG X Y, WEI L, WU W H. Attributes reduction and rules acquisition in an lattice-valued information system with fuzzy decision[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 135-148.

[8] XU W H, WANG Q R, ZHANG X T. Approximation Reduction of Inconsistent Lattice-value Target Information System[J]. Computer Engineering, 2011, 37(23): 69-71. (in Chinese)
徐伟华，王巧荣，张先韬. 不协调格值目标信息系统的近似约简[J]. 计算机工程，2011，37(23)：69-71.

[9] ZHANG X Y, XU W H. Entropy of knowledge and rough set in ordered information system [J]. Comper Engineering and Applications, 2007, 43(27): 62-65. (in Chinese)
张晓燕，徐伟华. 序信息系统的知识粗糙熵与粗集粗糙熵[J]. 计算机工程与应用，2007，43(27)：62-65.

[10] XU W H, ZHANG X Y. Uncertainty Measures Based on Rough Entropy in Ordered Information Systems[J]. Engineering Mathematics, 2009, 26(2): 283-289. (in Chinese)
徐伟华，张晓燕. 序信息系统中基于粗糙熵的不确定性度量[J]. 工程数学学报，2009，26(2)：283-289.

[11] 王国胤. Rough 集理论与知识获取[M]. 西安：西安交通大学出版社，2001.

[12] XU W H, ZHANG W X. Distribution Reduction in Inconsistent Information Systems Based on Dominance Relations[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(4): 124-131. (in Chinese)
徐伟华，张文修. 基于偏序关系下不协调目标信息系统的分布约简[J]. 模糊系统与数学，2007，21(4)：124-131.

[13] MI J S, WU W Z, ZHANG W X. Comparative Studies of Knowledge Reductions in Inconsistent Systems[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2003, 17(3): 54-60. (in Chinese)
米据生，吴伟志，张文修. 不协调目标信息系统知识约简的比较研究[J]. 模糊系统与数学，2003，17(3)：54-60.

[14] WANG Y, MIAO D Q, ZHOU Y J. Rough set Theory and its Application: a Survey[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1996, 9(4): 337-344. (in Chinese)

王珏,苗夺谦,周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述[J]. 模式识别与人工智能,1996,9(4):337-344.

[15] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社,2003.

[16] ZHANG W X,MI J S,WU W Z. Knowledge Reductions in Inconsistent Information Systems[J]. Computers,2003,26(1):12-18. (in Chinese)
张文修,米据生,吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报,2003,26(1):12-18.

[17] XU W H,ZHANG X Y,SU Y J,et al. Consistent Approximation Spaces Based on Dominance Relations (II) [J]. Computer Science,2007,34(3):148-150. (in Chinese)
徐伟华,张晓燕,苏雅娟,等. 基于偏序关系下的协调近似空间(续)[J]. 计算机科学,2007,34(3):148-150.

[18] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京:科学出版社,2013.

[19] XU W H,ZHANG W X. Knowledge Reductions in Inconsistent Information Systems Based on Dominance Relations[J]. Computer Science,2006,33(2):182-184. (in Chinese)
徐伟华,张文修. 基于偏序关系下不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机科学,2006,33(2):182-184.

(上接第 69 页)

从实验结果中可以得到以下结论:

(1)相对于原始数据,通过 Glocal 约简后可以得到更多的 P 规则数,而相应的 B 规则和 N 规则的数目有可能增加也有可能减少。主要是由于 Glocal 约简要求在约去属性后能获得更大的上、下近似。

(2)相对于 Glocal 约简,Local 约简可以获得更多的 P 规则数,B 规则和 N 规则的数目则有小幅度减少。主要原因在于约简时考虑单个决策类而不是所有的决策类,相当于放宽了条件,使 P 规则数增多。

(3)相对于原始数据,在乐观条件下其 P 规则更多,N 规则的数目减少,B 规则数目可能增加也有可能减少。主要原因在于乐观条件下采用的阈值更小,使得满足条件的 P 规则数目更多,N 规则的数目更少。

(4)相对于原始数据,在悲观条件下其 P 规则更少,N 规则的数目增多,B 规则数目可能增加也有可能减少。主要原因在于悲观条件下采用的阈值更大,使得满足条件的 P 规则数目更少,N 规则的数目更多。

结束语 传统的决策粗糙集中的代价矩阵只有一个,未考虑到多代价的情况。本文介绍了多代价决策粗糙集下乐观的风险决策规则和悲观的风险决策规则的定义,采用了多个代价矩阵来生成阈值,并将其用于属性约简中。在属性约简中,从单独的决策类出发而不是基于全部的决策类提出了启发式的 Local 属性约简方法,且在相关实验结果中可以得到,基于单独的决策类的 Local 属性约简,相对于基于全部的决策类的属性约简,乐观条件下可以获得更多的 P 规则和更少的 N 规则,悲观条件下可以获得更多的 N 规则和更少的 P 规则。

在本文研究工作的基础上,下一步的研究可从以下两方面展开:

1)尝试寻找产生更好阈值对的算法,好的阈值对能够使实验效果更好。

2)文中的约简方法采用的是启发式算法,可尝试寻找其他更好的算法。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[2] WOJCIECH Z. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer & System Sciences,1993,46(1):39-59.

[3] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences,2010,180(3):341-353.

[4] YAO Y Y. Probabilistic rough set approximations[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2008,49(2):255-271.

[5] YAO Y Y. Three-way decision:an interpretation of rules in rough set theory [C]// The 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology(RSKT 2009). Gold Coast,Australia,2009:14-16.

[6] DOU H L,YANG X B,SONG X N,et al. Decision-theoretic rough set:A multicost strategy[J]. Knowledge-Based Systems,2016,91:71-83.

[7] ZHOU B. Multi-class decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):211-224.

[8] LIU D,LI T R,LI H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets [J]. Fundament Informaticae,2012,115(2/3):173-188.

[9] QIAN Y H,ZHANG H,SANG Y L,et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):225-237.

[10] YANG X B,QI Y S,SONG X N,et al. Test cost sensitive multigranulation rough set:Model and minimal cost selection [J]. Information Sciences,2013,250(11):184-199.

[11] JIA X Y,LIAO W H,TANG Z M,et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. 2013,219(1):151-167.

[12] LI H,ZHOU X,ZHAO J,et al. Attribute reduction in decision-theoretic rough set model:a further investigation[M]// Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg,2011:466-475.

[13] MA J M,LEUNG Y,ZHANG W X. Attribute reductions in object-oriented concept lattice[J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics,2014,5(5):789-813.

[14] JU H R,YANG X B,QI Y,et al. Approach to Monotonicity Attribute Reduction in Quantitative Rough Set [J]. Computer Science,2015,42(8):36-39. (in Chinese)
鞠恒荣,杨习贝,戚湧,等. 量化粗糙集的单调性属性约简方法[J]. 计算机科学,2015,42(8):36-39.

[15] YAO Y Y,ZHAO Y. Discernibility matrix simplication for constructing attribute reducts [J]. Information Sciences,2009,179(7):867-882.

[16] JIA X Y,SHANG L. A Simulated Annealing Algorithm for Learning Thresholds in Three-way Decision-theoretic Rough Set Model[J]. Journal of Chinese Computer Systems,2013,34(11):2603-2606. (in Chinese)
贾修一,商琳. 一种求三支决策阈值的模拟退火算法[J]. 小型微型计算机系统,2013,34(11):2603-2606.