不完备不协调序决策系统的属性约简与规则提取

韦碧鹏[1,2] 吕跃进[2] 李金海[3] 李大林[1]
(柳州职业技术学院公共基础部 柳州 545006)[1] (广西大学数学与信息科学学院 南宁 530004)[2]
(昆明理工大学理学院 昆明 650500)[3]

摘 要 针对不完备不协调序决策系统,提出了广义优势决策函数的概念,给出了基于广义优势决策函数的区分矩阵属性约简算法,并获得了提取序决策规则的方法。最后,实例说明了所提出算法的有效性。

关键词 粗糙集理论,不完备不协调序决策系统,广义优势决策函数,属性约简,规则提取
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Attribute Reduction and Rule Acquisition in Incomplete and Inconsistent Ordered Decision Systems

WEI Bi-peng[1,2] LV Yue-jin[2] LI Jin-hai[3] LI Da-lin[1]
(Public Infrastructure Department, Liuzhou Vocational & Technical College, Liuzhou 545006, China)[1]
(School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)[2]
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)[3]

Abstract The notion of a generalized dominance decision function is defined in an incomplete and inconsistent ordered decision system, and its discernibility matrix is proposed to design an attribute reduction algorithm. Then a new approach of rule acquisition is obtained in an incomplete and inconsistent ordered decision system by generalized dominance decision function. Finally, a real example is used to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords Rough set theory, Incomplete and inconsistent ordered decision system, Generalized dominance decision function, Attribute reduction, Rule acquisition

1 引言

波兰数学家 Pawlak 于 1982 年提出了粗糙集理论[1],它是一种处理模糊、不精确以及不确定信息的数学工具。目前,该理论已被广泛应用于数据挖掘、模式识别、决策分析等领域[2-4]。早期其研究主要以完备信息系统为基础,通过等价关系来描述数据。在现实生活中,由于噪声、测量数据的不完整性等原因或因素,不完备信息系统也是广泛存在的。然而,Pawlak 提出的经典粗糙集不适用于不完备信息系统。为了克服这个问题,Kryszkiewicz[5]提出了不完备信息系统的粗糙集处理方法,其处理方式是利用容差关系代替经典粗糙集中的等价关系,不难看出 Kryszkiewicz 提出的不完备粗糙集是经典粗糙集的一种扩展模型。针对不完备粗糙集的属性约简和规则提取,很多学者从不同角度对其进行了深入研究。例如,Kryszkiewicz[6]从广义决策函数的角度讨论了规则提取;黄兵等[7]基于相容矩阵和分配决策矩阵,通过矩阵间的相互比较得到了不完备信息系统的所有约简集,并实现了决策规则的提取;Leung 等[8]在不完备信息系统中提出了对象相似类的概念,据此研究了决策规则提取;Wu[9]从证据理论的角度对不完备决策信息系统进行了属性约简;Meng 等[10]通过研究对象关于属性各种划分的情况,设计了一种快速的属性约简算法。

此外,现实生活中很多信息系统的属性值域还是偏序关系类型的。类似地,经典粗糙集方法也不能有效处理此类数据。为此,Greco 等[11]提出了基于优势关系的粗糙集。为了使得基于优势关系的粗糙集能够处理缺失值数据集,Shao 等[12]给出了基于优势关系的不完备信息系统的粗糙集,并对属性约简和规则提取做了探讨,有关结果仅限于处理协调不完备序决策系统。随后,杨习贝等[13]提出了不完备序决策系统升序和降序类型的序决策规则获取方法。关于如何把可能的序决策规则转化为最可信的序决策规则,文献[13]没有对其做进一步研究。此外,Qi[14]又从决策类的上并和下并的角度对不完备序决策系统提出了分配约简算法,其也适用于不协调的序决策系统,然而文献[14]并没有提出序决策规则的获取方法。

为了进一步推进不完备不协调序决策系统的有关研究,参照 Kryszkiewicz 在文献[5,6]中提出的不完备信息系统广义决策函数及规则提取方法,本文继续将其有关结论推广到不完备不协调序决策系统中以解决最可信确定性序决策规则的提取问题。具体地,本文从决策类属性值的角度提出了广义优势决策函数以得到区分矩阵的属性约简算法,并证明该算法能够保持对象优势类的下近似不变;此外,结合对象属性

本文受广西自然科学基金项目(2013GXNSFAA019016),广西高校科学技术研究项目(2013LX095)资助。
韦碧鹏(1987—),男,硕士,主要研究方向为粗糙集理论及其应用;**吕跃进**(1958—),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为不确定决策和数据挖掘;**李金海**(1984—),男,博士,讲师,主要研究方向为粗糙集、概念格与粒计算;**李大林**(1968—),男,教授,主要研究方向为偏微分方程。

值的偏序特性给出了把可能性序决策规则转化为最可信确定性序决策规则的方法。

2 基本概念

一个四元组 $DS=(U,AT\cup\{d\},V,f)$，其中 U 是非空有限的对象集合，$AT\cup\{d\}$ 是非空有限的属性集合，AT 为条件属性集，d 为决策属性集，且 $AT\cap\{d\}=\varnothing$，$V=\bigcup_{a\in AT\cup\{d\}}V_a$，并且 V_a 是属性 a 的值域，满足 $f_a:U\times a\to V_a(x\in U,a\in AT\cup\{d\})$，称四元组 DS 为决策系统。

若存在一个属性 $a\in AT$ 使得 V_a 为空值（记作：$f(x,a)=*$），则称决策系统是不完备的系统，记作：IDS；否则称为完备的系统。

定义 1[5] 设 $IDS=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是一个不完备决策系统，$\forall B\subseteq AT$，则 IDS 的相似关系为：

$SIM(B)=\{(x,y)\in U\times U\mid \forall a\in B,a(x)=a(y)\vee a(x)=*\vee a(y)=*\}$

记 $S_B(x)=\{y\in U\mid (x,y)\in SIM(B)\}$，则 $S_B(x)$ 看作是在属性集 B 中，与 x 可能不可区分的最大对象的集合。

定义 2[12] 设 $IDS=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是一个不完备决策系统，$\forall B\subseteq AT$，有：

$$R_B^{*\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U\mid \forall a_k\in B,f(x,a_k)\geqslant f(y,a_k)\ or\ f(x,a_k)=*\ or\ f(y,a_k)=*\}$$

$$R_d^{*\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U\mid f(x,d_l)\geqslant f(y,d_l),\forall d_l\in d\}$$

称 $R_B^{*\geqslant}$，$R_D^{*\geqslant}$ 为决策系统上的优势关系，则满足这种关系的不完备决策系统 IDS 称之为不完备的序决策系统，记作：$IODS$。

记 $[x]_B^{*\geqslant}=\{y\in U\mid (y,x)\in R_B^{*\geqslant}\}$，则 $[x]_B^{*\geqslant}$ 可以看作是在属性集 B 中，可能优于对象 x 的最大对象的集合，简称为 x 的优势类。由于 $U/R_B^{*\geqslant}$ 表示与优势关系族 $R_B^{*\geqslant}$ 相关的知识，记 $U/R_B^{*\geqslant}=\{[x]_B^{*\geqslant}\mid x\in U\}$，则 $U/R_B^{*\geqslant}$ 中所有的优势类不是构成 U 的划分，而是构成 U 中的覆盖。从定义 2 中可以看出，$R_B^{*\geqslant}$ 满足自反性，但是不满足对称性和传递性。当 $B\subseteq AT$ 时，有 $R_B^{*\geqslant}\supseteq R_{AT}^{*\geqslant}$；当 $y\in[x]_B^{*\geqslant}$ 时，有 $[x]_B^{*\geqslant}\supseteq[y]_B^{*\geqslant}$。

定义 3[7] 设两个 $1\times n$ 向量为分别 $V_1=(V_{11},V_{12},V_{13},\cdots V_{1n})$ 和 $V_2=(V_{21},V_{22},V_{23},\cdots V_{2n})$，则 $V_1\leqslant V_2$，当且仅当 $V_{1i}\leqslant V_{2i}$，$1\leqslant i\leqslant n$。

定义 4[14] 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall B\subseteq AT$，$\forall x\in U$，如果 $\underline{R_B^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})=\underline{R_{AT}^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})$，并且 $\forall C\subset B$，$\underline{R_B^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})\neq\underline{R_C^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})$，则属性集 B 是该不完备序决策系统的一个优势下近似约简。

3 广义优势决策函数的属性约简与规则提取

3.1 广义优势决策函数

定义 5 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，对于属性集 $\forall B\subseteq AT$，定义函数 $\partial_B^{\geqslant}:U\to V_d$ 为：

$$\partial_B^{\geqslant}(x)=\min_{y\in[x]_B^{*\geqslant}}f(y,d)$$

称 $\partial_B^{\geqslant}$ 为不完备序决策系统的广义优势决策函数。

因此，广义优势决策函数是用对象 x 的优势类在决策属性中的最小值来描述对象 x。记：若 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 $\partial_B^{\geqslant}=\{\partial_B^{\geqslant}(x_1),\partial_B^{\geqslant}(x_2),\cdots,\partial_B^{\geqslant}(x_n)\}$。当不完备序决策系统中的偏序关系转化成为无序关系时，广义优势决策函数就转化为 Kryszkiewicz M 教授在文献[5]中提出的不完备决策系统的广义决策函数。

下面对广义优势决策函数的性质和定理展开描述：

性质 1 (1) 当 $B\subseteq AT$ 时，$\forall x\in U$，$\partial_B^{\geqslant}(x)\leqslant\partial_{AT}^{\geqslant}(x)$；

(2) 当 $B\subseteq AT$ 时，$\partial_B^{\geqslant}\leqslant\partial_{AT}^{\geqslant}$；

(3) $\forall x\in U$，A、$B\subseteq AT$，当 $[x]_A^{*\geqslant}\subseteq[x]_B^{*\geqslant}$ 时，$\partial_B^{\geqslant}(x)\leqslant\partial_A^{\geqslant}(x)$。

定理 1 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，属性集 $\forall B\subseteq AT$，$\forall x\in U$，若 $\partial_B^{\geqslant}(x)=f(x,d)$，则不完备序决策系统是协调的，否则是不协调的。

证明：(1) 在不完备序决策系统中，$\forall B\subseteq AT$，由于 $\partial_B^{\geqslant}(x)=\min_{y\in[x]_B^{*\geqslant}}f(y,d)$，然而 $\forall x\in U$，有 $\partial_B^{\geqslant}(x)=f(x,d)$，即 $\forall y\in[x]_B^{*\geqslant}$，有 $f(x,d)\leqslant f(y,d)$。因此，$[x]_B^{*\geqslant}\subseteq[x]_d^{*\geqslant}$，即 $R_B^{*\geqslant}\subseteq R_d^{*\geqslant}$，即不完备序决策系统是协调的。

(2) 由于 $y\in[x]_B^{*\geqslant}$，$\exists x\in U$，有 $\partial_B^{\geqslant}(x)=f(y,d)$，则 $f(x,d)\geqslant f(y,d)$，即 $y\notin[x]_d^{*\geqslant}$。因此，$[x]_B^{*\geqslant}\not\subset[x]_d^{*\geqslant}$，则不完备序决策系统是不协调的。证毕。

定理 2 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 不完备序决策系统，则 $U/R_d^{*\geqslant}=U/R_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$ 不一定成立。

证明：(1) 当不完备序决策系统是协调的系统时，即 $\forall x\in U$，有 $\partial_{AT}^{\geqslant}(x)=f(x,d)$，因此 $\forall y\in[x]_{AT}^{*\geqslant}$，有 $f(x,d)\leqslant f(y,d)$，由于 $[x]_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}=\{y\in U\mid \partial_{AT}^{\geqslant}(y)\geqslant\partial_{AT}^{\geqslant}(x),x\in U\}$，因此，$\forall x\in U$，$[x]_d^{*\geqslant}=[x]_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$，即 $U/R_d^{*\geqslant}=U/R_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$。

(2) 当不完备序决策系统是不协调的系统时，即 $\exists x\in U$，有 $\partial_B^{\geqslant}(x)=f(y,d)$，因此，有 $f(x,d)\geqslant f(y,d)$，从而可以得出 $y\notin[x]_d^{*\geqslant}$；另一方面，当 $\partial_B^{\geqslant}(y)=f(y,d)$ 时，$\partial_B^{\geqslant}(x)=f(y,d)\Rightarrow y\in[x]_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$，即 $[x]_d^{*\geqslant}\neq[x]_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$，即 $U/R_d^{*\geqslant}\neq U/R_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$。

因此，在不完备序决策系统中，$U/R_d^{*\geqslant}=U/R_{\partial_{AT}}^{*\geqslant}$ 是不一定成立的。证毕。

通过定理 2 可以知道，在不完备序决策系统中，与直接运用决策属性对对象进行分类相比，运用广义优势决策函数进行分类所得到的决策类更适合于提取不完备序决策系统中的规则，并且所获得的序决策规则更加精确。但是，为了能够提取出更加简洁的序决策规则，需要对不完备序决策系统的条件属性进行约简，以便可以找出简洁而精确的序决策规则。

定理 3 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，属性集 $\forall B\subseteq AT$，若 $\partial_B^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$，且 $\forall C\subset B$，$\partial_C^{\geqslant}\neq\partial_{AT}^{\geqslant}$，则属性集 B 是不完备序决策系统 $IODS$ 的一个约简，记作 $Red(AT)$。

证明：从定义 5 中，可以知道 $\partial_B^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$，即 $\forall x\in U$，$\partial_B^{\geqslant}(x)=\partial_{AT}^{\geqslant}(x)$，有 $\exists y\in U$，$[x]_B^{*\geqslant}\subseteq[y]_d^{*\geqslant}\Leftrightarrow[x]_{AT}^{*\geqslant}\subseteq[y]_d^{*\geqslant}$，即 $\underline{R_B^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})=\underline{R_{AT}^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})$；若 $\forall C\subset B$，$\partial_C^{\geqslant}\neq\partial_{AT}^{\geqslant}$，即同理可得 $\underline{R_C^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})\neq\underline{R_{AT}^{*\geqslant}}([x]_d^{*\geqslant})$。因此，在不完备序决策系统中，保持广义优势决策函数不变相当于保持决策类的下近似不变。证毕。

定义 6 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall B\subseteq AT$，若存在属性 $b\in B$，满足 $\partial_B^{\geqslant}=\partial_{B-\{b\}}^{\geqslant}$，则称属性 b 在属性集 B 中为不必要的属性，否则称作必要的属性。AT 中所有必要的属性所形成的集合，称之为属性集 AT 的核，记为 $Core(AT)$。

性质 2 $Core(AT)=\bigcap Red(AT)$，核是全部约简的交。

3.2 广义优势决策函数的区分矩阵与区分函数

定义 7 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall x,y\in U$，记 $GD^{*}=\{(y,x)\mid f(y,d)\geqslant\partial_{AT}^{\geqslant}(x)\}$，定义广义优势决策区分函数：

$$GD_{AT}^{*}(x,y)=\begin{cases}\{a\in AT\mid y\notin[x]_{a}^{*\geqslant}\}, & (y,x)\notin GD^{*}\\ \varnothing, & (y,x)\in GD^{*}\end{cases}$$

其中，$GD_{AT}^{*}(x,y)$ 是能够确定对象 y 是否优于对象 x 的属性集。称 $GD_{AT}^{*}=\{GD_{AT}^{*}(x,y)\mid x,y\in U\}$ 为不完备序决策系统 $IODS$ 的区分矩阵。

定理 4 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$B\subseteq AT$，$GD_{AT}^{*}(x,y)$ 是广义优势决策函数的区分函数，则 $\forall x,y\in U$，$B\cap GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing(GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing)$，当且仅当 $\partial_{B}^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$。

证明：(⇒)对于 $\forall x,y\in U$，根据性质 1，由于 $B\subseteq AT$，则 $\partial_{B}^{\geqslant}\leqslant\partial_{AT}^{\geqslant}$。要证明 $\partial_{B}^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$，只要证明 $\partial_{AT}^{\geqslant}\leqslant\partial_{B}^{\geqslant}$ 成立即可。又由于 $B\cap GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing(GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing)$，即存在 $a\in B$，$a\in GD_{AT}^{*}(x,y)$，当 $f(y,d)<\partial_{AT}^{\geqslant}(x)$ 时，有 $y\notin[x]_{a}^{*\geqslant}$，从而可得 $y\notin[x]_{B}^{*\geqslant}$。由 $B\subseteq AT$，可得 $y\notin[x]_{AT}^{*\geqslant}$，故 $[x]_{B}^{*\geqslant}\subseteq[x]_{AT}^{*\geqslant}$。因此，$\partial_{AT}^{\geqslant}(x)\leqslant\partial_{B}^{\geqslant}(x)$，由 x 的任意性可得 $\partial_{AT}^{\geqslant}\leqslant\partial_{B}^{\geqslant}$。

(⇐)由于 $\partial_{B}^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$，则 $\forall x\in U$，$[x]_{B}^{*\geqslant}=[x]_{AT}^{*\geqslant}$。因此，存在 $a\in B$，当 $f(y,d)<\partial_{AT}^{\geqslant}(x)$ 时，$y\notin[x]_{a}^{*\geqslant}$。又因为 $a\in GD_{AT}^{*}(x,y)$，因此，当 $GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing$ 时，$B\cap GD_{AT}^{*}(x,y)\neq\varnothing$。证毕。

令 $\Delta^{*\geqslant}=\bigwedge_{(x,y)\in U\times U}\bigvee GD_{AT}^{*}(x,y)$，称 $\Delta^{*\geqslant}$ 是不完备序决策系统 $IODS$ 的区分函数，则根据 $\Delta^{*\geqslant}$ 的析取、合取运算得到标准析取范式，即可得到不完备序决策系统 $IODS$ 中的全部约简。

3.3 广义优势决策函数的规则提取

定义 8[12] 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$B\subseteq AT$，对于两个公式 $\phi\in M(B)$ 和 $\varphi\in M(d)$，其中，$M(B)=\bigwedge_{a\in B}m(a)$，$m(a)$ 是一个关于属性 a 的原子公式，即 $m(a)=(a,\geqslant,v)=\{x\in U\mid f(x,a)\geqslant v\}$，$M(d)=m(d)$。一个序决策规则记作 $\phi\rightarrow\varphi$ 的形式，其中 ϕ 称为序决策规则的前鉴，而 φ 为序决策规则的后鉴。

通过引入广义优势决策函数的概念，可以得出两种序决策规则的类型，如下：

令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\varnothing\neq B\subseteq AT$，$x\in U$

(1)若 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)=f(x,d)$，则 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$ 是一条确定性的序决策规则。

(2)若 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)<f(x,d)$，则 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$ 是一条可能性的序决策规则。

当 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)=f(x,d)$ 时，则表明了 $[x]_{B}^{*\geqslant}\subseteq[x]_{d}^{*\geqslant}$，也就是说在条件属性集 B 下，x 属于 x 的优势决策类的下近似。另外，当 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)<f(x,d)$ 时，则表明了 $\exists y\in[x]_{B}^{*\geqslant}$，然而 $f(y,d)<f(x,d)$，即 $x\in[y]_{d}^{*\geqslant}$，可得出 $[x]_{B}^{*\geqslant}\cap[x]_{d}^{*\geqslant}\neq\varnothing$，也就是说在条件属性 B 下，x 属于 x 的优势决策类的上近似。

因此，当 $IODS$ 是协调的不完备序决策系统时，根据两种序决策规则的形式提取出来的序决策规则全都是确定性的；当 $IODS$ 是不协调的不完备序决策系统时，根据两种序决策规则的形式提取出来的序决策规则有可能存在可能性的序决策规则。然而，现实生活中，特别是在基于优势关系的系统下，协调的不完备序决策系统是比较难存在的，且提取确定性的序决策规则又是必然需要的。因此，下面将讨论如何把可能性的序决策规则转变成确定性的序决策规则。

推论 1 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall B\subseteq AT$，$\exists x,y,z\in U$，当 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)<f(x,d)$ 时，令 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)=f(y,d)$，则 $\bigwedge_{a\in B}(f(z,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(z,d)\geqslant f(y,d)$ 是一条确定性的序决策规则。

证明：因为 $\forall B\subseteq AT$，当 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)<f(x,d)$ 时，令 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)=f(y,d)$，可以得出 $[x]_{B}^{*\geqslant}\subseteq[y]_{d}^{*\geqslant}$，又由于 $\forall a\in B$，$f(z,a)\geqslant f(x,a)$，即 $z\in[x]_{B}^{*\geqslant}$，所以 $x\in\underline{R}_{B}^{*\geqslant}([y]_{d}^{*\geqslant})$。即，

$$\bigwedge_{a\in B}(f(z,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(z,d)\geqslant f(y,d)$$

是一条确定性的序决策规则。证毕。

从推论 1 可以知道，当不完备序决策系统 $IODS$ 的任何对象都是不协调的情况时，也可以找出不完备序决策系统 $IODS$ 的一些确定性的序决策规则。运用推论 1，可以把序决策规则提取出来的可能性序决策规则转变为确定性的序决策规则。

由于所有的条件属性在信息系统中并不都是同样重要的，因此，在规则提取过程中，从规则前鉴里面删除一些不必要的属性，对优化决策规则是很有效的。下面结合约简的概念，给出不完备序决策系统优化的序决策规则。

定理 5 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall B\subseteq AT$，$\exists x,y\in U$，若属性集 B 是不完备序决策系统 $IODS$ 的一个约简，则序决策规则：

$$\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)\Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{a\in AT}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$$

即在不完备序决策系统中，提取出来的序决策规则 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$ 是序决策规则 $\bigwedge_{a\in AT}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$ 的优化形式。

证明：由于属性集 B 是 $IODS$ 的一个约简，根据定理 3，可得 $\partial_{B}^{\geqslant}=\partial_{AT}^{\geqslant}$，即 $\forall x\in U$，$\partial_{B}^{\geqslant}(x)=\partial_{AT}^{\geqslant}(x)$，有 $\exists y\in U$，$[x]_{B}^{*\geqslant}\subseteq[y]_{d}^{*\geqslant}\Leftrightarrow[x]_{AT}^{*\geqslant}\subseteq[y]_{d}^{*\geqslant}$，即 $\underline{R}_{B}^{*\geqslant}([x]_{d}^{*\geqslant})=\underline{R}_{AT}^{*\geqslant}([x]_{d}^{*\geqslant})$，因此，可以得出：$\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)\Leftrightarrow\bigwedge_{a\in AT}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$。证毕。

推论 2 令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，$\forall B\subseteq AT$，$\exists x,y,z\in U$，若属性集 B 是不完备序决策系统 $IODS$ 的一个约简。当 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)<f(x,d)$ 时，令 $\partial_{B}^{\geqslant}(x)=f(y,d)$，则序决策规则 $\bigwedge_{a\in B}(f(z,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(z,d)\geqslant f(y,d)$ 是序决策规则 $\bigwedge_{a\in AT}(f(z,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(z,d)\geqslant f(y,d)$ 的优化形式。

下面我们给出优化且简化的序决策规则：

(1)若 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geqslant f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$ 是一条优化的序决策规则，当存在 $f(x,a)=*$ 时，则可以从规则前鉴中删除 $f(x,a)=*$ 的部分，即得到一条优化且简化的序决策规则为 $\bigwedge_{b\in B'}(f(y,b)\geqslant f(x,b))\Rightarrow f(y,d)\geqslant f(x,d)$，其中 B'

$\subseteq B, a\in B-B', \forall b\in B', f(x,b)\neq *$。

(2)若 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geq f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geq f(x,d)$ 是一条优化的序决策规则，当 $f(x,a)=\min_{\forall z\in U,a\in B'} f(z,a)$ 时，则可以从规则前鉴中删除 $f(x,a)=\min_{\forall z\in U,a\in B'} f(z,a)$ 的部分，即可以得到一条优化且简化的序决策规则为 $\bigwedge_{b\in B'}(f(y,b)\geq f(x,b))\Rightarrow f(y,d)\geq f(x,d)$，其中 $B'\subseteq B, a\in B-B', \forall b\in B', f(x,a)\neq \min_{\forall z\in U,b\in B'} f(z,b)$。

(3)若 $\bigwedge_{a\in B}(f(y,a)\geq f(x,a))\Rightarrow f(y,d)\geq f(x,d)$ 是一条优化的序决策规则，当 $f(x,d)=\min_{\forall z\in U} f(z,d)$ 时，则删除该序决策规则。

3.4 属性约简算法的时间复杂度

令 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 是一个不完备序决策系统，运用其区分函数的标准析取范式可以求得所有约简，具体的时间复杂度可以依据如下 4 个步骤来分析：

(1)首先计算每个对象在条件属性集 AT 下的优势类，其时间复杂度为 $O(|U|^2|AT|)$。

(2)其次计算每个对象的广义优势决策函数值，其时间复杂度为 $O(|U|^2)$。

(3)然后构造广义优势决策函数的区分矩阵 GD_{AT}^{*}，其时间复杂度为 $O(|U|^3|AT|)$。

(4)最后计算区分函数 $\Delta^{*\geqslant}$ 的标准析取范式，其时间复杂度为 $O(2^{|AT|})$。

综上可知，求解一个不完备序决策系统 $IODS=(U,AT\cup\{d\})$ 的所有约简的时间复杂度为 $O(|U|^3|AT|)+O(2^{|AT|})$。

4 实例分析

例 1 根据表 1 给出的不完备不协调序决策系统，计算其所有约简并提取序决策规则，其中 $U=\{1,2,\cdots,8\}$，$AT=\{M,P,L\}$ 为条件属性集，$d=\{GE\}$ 为决策属性集。

表 1 不完备序决策系统

U	M	P	L	GE
1	中	差	差	差
2	好	中	*	优秀
3	中	*	差	差
4	中	中	中	中
5	*	好	差	差
6	好	*	好	优秀
7	好	中	差	优秀
8	差	中	中	中

(1)计算表 1 中全体对象在条件属性集下的优势类：

$[1]_{AT}^{*\geqslant}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$[2]_{AT}^{*\geqslant}=\{2,5,6,7\}$，

$[3]_{AT}^{*\geqslant}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$[4]_{AT}^{*\geqslant}=\{2,4,6\}$，

$[5]_{AT}^{*\geqslant}=\{3,5,6\}$，$[6]_{AT}^{*\geqslant}=\{2,6\}$，

$[7]_{AT}^{*\geqslant}=\{2,5,6,7\}$，$[8]_{AT}^{*\geqslant}=\{2,4,6,8\}$。

(2)计算每个对象的广义优势决策函数值：

$\partial_{AT}^{\geqslant}(1)=\partial_{AT}^{\geqslant}(2)=\partial_{AT}^{\geqslant}(3)=\partial_{AT}^{\geqslant}(5)=\partial_{AT}^{\geqslant}(7)=$差，

$\partial_{AT}^{\geqslant}(4)=\partial_{AT}^{\geqslant}(8)=$中，$\partial_{AT}^{\geqslant}(6)=$优秀。

(3)通过定义 7 求表 1 中不完备不协调序决策系统的全部约简。

首先，根据定义 7 建立不完备不协调序决策系统的区分矩阵，具体结果参见表 2。

表 2 广义优势决策函数的区分矩阵

U	1	2	3	4	5	6	7	8
1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
2	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
3	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
4	P,L	Ø	L	Ø	L	Ø	Ø	Ø
5	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
6	M,L	Ø	M,L	M,L	L	Ø	Ø	M,L
7	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
8	P,L	Ø	L	Ø	L	Ø	Ø	Ø

因此，可得 $\Delta^{*\geqslant}=(P\vee L)\wedge L\wedge(M\vee L)=L$，即属性集 $\{L\}$ 是不完备不协调序决策系统的约简。

(4)提取序决策规则

1)根据广义优势决策函数的概念，得到两种序决策规则的类型。

确定性序决策规则的提取：

r_1: $f(x,M)\geq$中 $\wedge f(x,P)\geq$差 $\wedge f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差(对象 1 支持)

r_2: $f(x,M)=$好 $\wedge f(x,P)\geq$中 $\wedge f(x,L)\geq * \Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 2 支持)

r_3: $f(x,M)\geq$中 $\wedge f(x,P)\geq * \wedge f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差(对象 3 支持)

r_4: $f(x,M)\geq$中 $\wedge f(x,P)\geq$中 $\wedge f(x,L)\geq$中 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$中(对象 4 支持)

r_5: $f(x,M)\geq * \wedge f(x,P)=$好 $\wedge f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差(对象 5 支持)

r_6: $f(x,M)=$好 $\wedge f(x,P)\geq * \wedge f(x,L)=$好 $\Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 6 支持)

r_7: $f(x,M)\geq$差 $\wedge f(x,P)\geq$中 $\wedge f(x,L)\geq$中 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$中(对象 8 支持)

可能性序决策规则的提取：

r_8: $f(x,M)=$好 $\wedge f(x,P)\geq$中 $\wedge f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 7 支持)

运用推论 1，把可能性的序决策规则转化为确定性的序决策规则：

r_8': $f(x,M)=$好 $\wedge f(x,P)\geq$中 $\wedge f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

2)优化序决策规则

由于表 1 中不完备不协调序决策系统的约简为 $\{L\}$，则采取定理 5 和推论 2 的形式提取出确定性序决策规则，并进行优化，可得：

r_1'': $f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

r_2'': $f(x,L)\geq * \Rightarrow f(x,GE)=$优秀

r_3'': $f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

r_4'': $f(x,L)\geq$中 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$中

r_5'': $f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

r_6'': $f(x,L)=$好 $\Rightarrow f(x,GE)=$优秀

r_7'': $f(x,L)\geq$中 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$中

r_8'': $f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

把上述规则合并可得：

l_1: $f(x,L)\geq$差 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$差

l_2: $f(x,L)\geq * \Rightarrow f(x,GE)=$优秀

l_3: $f(x,L)\geq$中 $\Rightarrow f(x,GE)\geq$中

$l_4: f(x,L)=$好$\Rightarrow f(x,GE)=$优秀

从中提取出简化的序决策规则：

$l_1': f(x,L) \geq * \Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 2、6、7 支持)

$l_2': f(x,L) \geq$中$\Rightarrow f(x,GE) \geq$中(对象 2、4、6、8 支持)

$l_3': f(x,L)=$好$\Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 6 支持)

又因为 * 表示的是缺失值，这里表示的含义是可以与任何属性值都进行比较，所以序决策规则的简化形式如下：

$l_1'': f(x,L)=$好$\Rightarrow f(x,GE)=$优秀(对象 6 支持)

$l_2'': f(x,L) \geq$中$\Rightarrow f(x,GE) \geq$中(对象 2、4、6、8 支持)

因此，从表 1 的不完备不协调序决策系统中提取出优化且简化后的确定性序决策规则为：

$l_1'': f(x,L)=$好$\Rightarrow f(x,GE)=$优秀

$l_2'': f(x,L) \geq$中$\Rightarrow f(x,GE) \geq$中

结束语 属性约简和规则提取一直是粗糙集理论中的热点研究问题。对于不完备信息系统，这两个方面的研究已趋于成熟。然而，对于属性值域具有偏序关系的不完备信息系统，其有关结果仍有待完善或深入，特别是确定性序决策规则的获取方面。本文在不完备不协调序决策系统中提出了广义优势决策函数的概念，在此基础上给出了区分矩阵的属性约简算法，进而得到了获取优化、简化的确定性序决策规则的有效方法。有关结论对不完备不协调序决策系统的决策分析研究具有一定的参考价值。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[2] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001

[3] 李金海，吕跃进. 决策系统的快速属性约简算法[J]. 电子科技大学学，2007，36(6)：1237-1240

[4] 覃丽珍，姚炳学，李金海. 基于信息量的完备覆盖约简算法[J]. 计算机科学，2012，39(10)：235-239

[5] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39-49

[6] Kryszkiewicz M. Rules in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1999, 113: 271-292

[7] 黄兵，周献中. 不完备信息系统分配约简与规则提取的矩阵算法[J]. 计算机工程，2005，31(17)：20-22

[8] Leung Y, Wu Wei-zhi, Zhang Wen-xiu. Knowledge acquisition in incomplete information systems: A rough set approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 164-180

[9] Wu Wei-zhi. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems[J]. Information Sciences, 2008: 1355-1371

[10] Meng Zu-qiang, Shi Zhong-zhi. A fast to attribute reduction in incomplete decision systems with tolerance relation-based rough sets[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2774-2793

[11] Greco S, Matarazzo B, Slowingski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 1-47

[12] Shao Ming-wen, Zhang Wen-xiu. Dominance Relation and Rules in an Incomplete Ordered Information Systems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20: 13-27

[13] 杨习贝，杨静宇，吴小俊，等. 不完备系统中基于优势关系的最优可信规则获取[J]. 小型微型计算机系统，2009，30(3)：518-523

[14] Qi Y S, Sun H J, Yang X B, et al. Approach to approximate distribution reduct in incomplete ordered decision system[J]. Journal of Information and Computing Science, 2008, 3(3): 189-198

(上接第 156 页)

参 考 文 献

[1] 黄柯棣，邱晓刚，等. 建模与仿真技术[M]. 长沙：国防科技大学出版社，2011

[2] 胡晓峰，罗批，司光亚，等. 战争复杂系统建模与仿真[M]. 北京：国防大学出版社，2005

[3] 胡晓峰，杨镜宇，司光亚，等. 战争复杂系统仿真分析与实验[M]. 北京：国防大学出版社，2008

[4] 黄柯棣，赵鑫业，杨山亮，等. 军事分析仿真评估系统关键技术综述[J]. 系统仿真学报，2012，24(12)：2439-2447

[5] Alberts D S, Hayes R E. Understanding command and control [M]. Washington D C: CCRP, 2006: 167-177

[6] David J B. Modernizing our Cognitive Model[C]// The 2004 9th Command and Control Research and Technology Symposium. 2004

[7] Lukasiewicz T, Straccia U. Managing uncertainty and vagueness in description logics for the semantic Web[J]. Journal of Web Semantics, 2008(6): 291-308

[8] Bobillo F, Straccia U. On qualified cardinality restrictions in fuzzy description logics under Lukasiewicz semantics[C]// 12th International Conference of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU 2008). 2008: 1008-1015

[9] 黄福卷，熊平，张冲，等. 防空 C3 I 系统作战效能的模糊综合量化评估[J]. 火力与指挥控制，2005：174-176

[10] Guizzardi G, Wagner G. Towards an ontological foundation of agent-based simulation [C] // Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference. 2011

[11] Chan W K V, Son Y-J, Macal C M. Agent-Based Simulation Tutorial-Simulation of Emergent Behavior and Differences Between Agent-Based Simulation and Discrete-Event Simulation[C]// Johansson B, Jain S, Montoya-Torres J, et al., eds. Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference, Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, 2010: 135-150

[12] Livet P, Müller J-P, Phan D, et al. Ontology, a Mediator for Agent-Based Modeling in Social Science[J]. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2010

[13] 曹文君. 知识库系统原理及其应用[M]. 上海：复旦大学出版社，1995

[14] Tolk A, Diallo S Y. Model-based data engineering for Web services[J]. Internet Computing, IEEE, 2005, 9(4): 65-70

[15] 李敏勇，张建昌. 新指挥控制系统原理[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术，2004(2)