第44卷 第9期
2017年9月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol. 44 No. 9
Sep. 2017

不完备决策形式背景的概念构建与属性约简

祖鸿娇[1] 解 滨[2] 米据生[1]
(河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050024)[1] (河北师范大学信息技术学院 石家庄 050024)[2]

摘 要 首先定义了不完备决策形式背景,在其不完备的子条件形式背景和子决策形式背景上,提出了双子集内涵概念的构建方法及概念格的生成算法,给出了不完备决策形式背景基于双子集内涵概念的属性协调集与属性约简的判定方法。

关键词 决策形式背景,概念格,协调集,属性约简
中图法分类号 O236 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.09.017

Concept Construction and Attribute Reduction in Incomplete Decision Formal Contexts

ZU Hong-jiao[1] XIE Bin[2] MI Ju-sheng[1]
(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)[1]
(College of Information Technology, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)[2]

Abstract We defined the incomplete decision formal context, and proposed the construction method of concept with double subset intension and the generation algorithm of concept lattice in incomplete sub-condition formal context and sub-decision formal context。Further, the judgment theorems of consistent sets and attribute reduction based on the double subset intension concept were given in incomplete decision formal context.

Keywords Decision formal context, Concept lattice, Consistent sets, Attribute reduction

1 引言

形式概念分析是由Wille教授于1982年提出来的,其核心是形式背景及其概念格[1]。概念格的基本思想是基于对象与属性之间的二元关系来建立一种概念层次结构,其中每个概念都是对象与属性的统一体。通常将概念格表示为一个Hasse图,以生动并简洁地体现这些概念之间的泛化和特化关系。作为数据分析和知识处理的形式化工具,形式概念分析已经成功应用于信息检索[2]、机器学习[3]、知识发现[4-5]、软件工程[6-7]等领域。

在经典的Wille形式背景中,对象和属性之间的关系是确定的,通常用"1"或"0"来表示,称这种形式背景是完备的形式背景。然而在现实中,由于数据测量上的误差及对数据理解或获取的限制,存在部分对象与属性之间的关系是不确定的,这时称形式背景是不完备的,由此可见在形式概念分析中研究不完备形式背景是十分有意义的。在实际应用中,往往需要研究的是带决策的形式背景。决策形式背景是具有一组条件属性和一组决策属性的形式背景,由这两组属性可以分别形成两个概念格,在决策形式背景下需要研究这两个概念格之间的关系。属性约简是知识发现研究的重要课题。所谓属性约简,就是针对不同的目的要求,去除其中不相关或不重要的属性,使知识表示更加简化的同时又不丢失基本信息。目前,已有许多学者对形式背景中的属性约简开展了深入的研究,并且得到了很多重要的结果[8-13]。

本文给出了不完备决策形式背景的定义,将一个不完备决策形式背景分解为两个不完备形式背景,即子条件形式背景和子决策形式背景,给出相应的双子集内涵概念构建方法,并由此得到不完备形式背景中构造概念格的新方法及相应的改进算法;进一步提出了不完备决策形式背景协调性的概念及属性约简的定义,给出了4个协调集的判定定理及属性约简的方法。

2 预备知识

定义1[1] 称(U,A,I)为一个形式背景,其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为对象集,$x_i(i\leqslant n)$称为对象;$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为属性集,$a_j(j\leqslant m)$称为属性;I为U和A之间的二元关系,即$I\subseteq U\times A$。若$(x,a)\in I$,则称对象x具有属性a;若$(x,a)\notin I$,则称对象x不具有属性a。

对于形式背景(U,A,I),$P(U)$表示对象集U的幂集,$P(A)$表示属性集A的幂集。对于任意的$X\in P(U)$,$B\in$

到稿日期:2016-08-07 返修日期:2016-09-26 本文受国家自然科学基金(61573127,61300121,61502144,61472463),河北省自然科学基金(A2014205157),河北省高校创新团队领军人才培育计划项目(LJRC022),河北省高校自然科学基金(QN2016133),河北师范大学博士科学基金(L2015B01),河北师范大学硕士研究生创新项目资助。
祖鸿娇(1990-),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集、概念格等,E-mail:zuhongjiao5@163.com;**解 滨**(1976-),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集、模糊集、概念格等;**米据生**(1966-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、概念格、人工智能等。

$P(A)$，映射*和$'$：$P(U)\to P(A)$定义如下：

$X^*=\{a\in A:\forall x\in X,(x,a)\in I\}$

$X'=\{a\in A:\forall x\in X,(x,a)\notin I\}$

映射*和$'$：$P(A)\to P(U)$定义如下：

$B^*=\{x\in U:\forall a\in B,(x,a)\in I\}$

$B'=\{x\in U:\forall a\in B,(x,a)\notin I\}$

X^*表示X中所有对象共同具有的属性集合，X'表示X中任意对象都不具有的属性集合；B^*表示具有B中所有属性的对象集合，B'表示不具有B中任意属性的对象集合。为表示方便，$\forall x\in U$，$\{x\}^*$记为x^*，$\{x\}'$记为x'；$\forall a\in A$，$\{a\}^*$记为a^*，$\{a\}'$记为a'。

定义 2[1] 对于形式背景(U,A,I)，如果一个二元组(X,B)满足$X^*=B$且$B^*=X$，则称(X,B)是一个形式概念，简称为概念。其中X称为概念(X,B)的外延，B称为概念(X,B)的内涵。

定理 1[14] 设(U,A,I)是形式背景，$\forall X,X_1,X_2\in P(U)$，$\forall B,B_1,B_2\in P(A)$，则

(1)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^*\subseteq X_1^*$，$B_1\subseteq B_2\Rightarrow B_2^*\subseteq B_1^*$；

(2)$X\subseteq X^{**}$，$B\subseteq B^{**}$；

(3)$X=X^{***}$，$B=B^{***}$；

(4)$(X_1\cup X_2)^*=X_1^*\cap X_2^*$，$(B_1\cup B_2)^*=B_1^*\cap B_2^*$；

(5)$X\subseteq B^*\Leftrightarrow B\subseteq X^*$。

定义 3[1] 形式背景(U,A,I)的全体概念记为$L(U,A,I)$，它构成完备格，称为概念格，其中$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(\Leftrightarrow B_1\supseteq B_2)$，$(X_1,B_1)\wedge(X_2,B_2)=(X_1\cap X_2,(B_1\cup B_2)^{**})$，$(X_1,B_1)\vee(X_2,B_2)=((X_1\cup X_2)^{**},B_1\cap B_2)$。

定义 4[12] 令$L(U,A_1,I_1)$和$L(U,A_2,I_2)$是两个概念格，若$\forall(X_2,B_2)\in L(U,A_2,I_2)$，总存在$(X_1,B_1)\in L(U,A_1,I_1)$，使得$X_1=X_2$，则称$L(U,A_1,I_1)$细于$L(U,A_2,I_2)$，记作$L(U,A_1,I_1)\leqslant L(U,A_2,I_2)$。

定义 5[12] 称(U,A,I,T,J)为一个决策形式背景，其中(U,A,I)与(U,T,J)是两个形式背景，U为非空有限对象集，A为条件属性集，T为决策属性集。若$L(U,A,I)\leqslant L(U,T,J)$，则称该决策形式背景是协调的，否则称其是不协调的。

定义 6[15] 一个不完备形式背景是一个四元组$(U,A,I,\{1,?,0\})$，这里U为非空有限对象集，A为属性集，$\{1,?,0\}$为值集合，映射$I:U\times A\to\{1,?,0\}$表示对象x具有属性a的情况，其中$I(x,a)=1$表示对象x具有属性a，$I(x,a)=0$表示对象x不具有属性a，$I(x,a)=?$表示对象x是否具有属性a未知。

定义1给出的形式背景也称为完备的形式背景。下面主要针对不完备决策形式背景进行讨论。

3 不完备决策形式背景中概念的构建

定义 7 称$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为一个不完备的决策形式背景，其中$(U,A,I,\{1,?,0\})$与$(U,T,J,\{1,?,0\})$是两个不完备形式背景，分别称为不完备子条件形式背景和不完备子决策形式背景。

例1 $(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为一个不完备决策形式背景，这里$U=\{1,2,3\}$，$A=\{a,b,c,d,e\}$，$T=\{g,h,k\}$，如表1所列。

表1 不完备决策形式背景

U/A	a	b	c	d	e	g	h	k
1	1	?	0	1	0	1	0	?
2	0	1	1	?	0	0	1	1
3	1	0	?	1	0	1	?	0

定义 8 对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$，在不完备子条件形式背景$(U,A,I,\{1,?,0\})$上，$\forall X\in P(U)$，$\forall B,C\in P(A)$，定义两个算子如下：

$\prec:P(U)\to P(A)\times P(A)$，$X^{\prec}=(X^*,X')$

$\succ:P(A)\times P(A)\to P(U)$，$(B,C)^{\succ}=B^*\cap C'$

在不完备子决策形式背景$(U,T,J,\{1,?,0\})$中，$\forall X\in P(U)$，$\forall B,C\in P(T)$，定义两个算子如下：

$\lhd:P(U)\to P(T)\times P(T)$，$X^{\lhd}=(X^*,X')$

$\rhd:P(T)\times P(T)\to P(U)$，$(B,C)^{\rhd}=B^*\cap C'$

令S是非空有限集，对于任意$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in P(S)\times P(S)$，运算$\cup$，$\cap$和$\sqsubseteq$定义如下：

$(X_1,Y_1)\cup(X_2,Y_2)=(X_1\cup X_2,Y_1\cup Y_2)$

$(X_1,Y_1)\cap(X_2,Y_2)=(X_1\cap X_2,Y_1\cap Y_2)$

$(X_1,Y_1)\sqsubseteq(X_2,Y_2)$当且仅当$X_1\subseteq X_2$且$Y_1\subseteq Y_2$。

定理 2 对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$，在不完备子条件形式背景$(U,A,I,\{1,?,0\})$中，$\forall X,X_1,X_2\in P(U)$，$\forall(B,C),(B_1,C_1),(B_2,C_2)\in P(A)\times P(A)$，则

(1)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^{\prec}\sqsubseteq X_1^{\prec}$

$(B_1,C_1)\sqsubseteq(B_2,C_2)\Rightarrow(B_2,C_2)^{\succ}\subseteq(B_1,C_1)^{\succ}$；

(2)$X\subseteq X^{\prec\succ}$，$(B,C)\sqsubseteq(B,C)^{\succ\prec}$；

(3)$X=X^{\prec\succ\prec}$，$(B,C)=(B,C)^{\succ\prec\succ}$；

(4)$(X_1\cup X_2)^{\prec}=X_1^{\prec}\cap X_2^{\prec}$

$((B_1,C_1)\cup(B_2,C_2))^{\succ}=(B_1,C_1)^{\succ}\cap(B_2,C_2)^{\succ}$；

(5)$X\subseteq(B,C)^{\succ}\Leftrightarrow(B,C)\sqsubseteq X^{\prec}$。

证明：以上5条性质由定理1及定义8可直接证得。

类似地，在不完备子决策形式背景$(U,T,J,\{1,?,0\})$上定义的$\lhd$和$\rhd$算子也满足上述5条性质，这里不再详细列出。

定义 9 对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$，$X\subseteq U$，$(B,C)\in P(A)\times P(A)$，称$(X,(B,C))$为一个条件概念，如果有$X^{\prec}=(B,C)$且$(B,C)^{\succ}=X$，其中称X为条件概念$(X,(B,C))$的外延，(B,C)为条件概念$(X,(B,C))$的内涵。对$(B,C)\in P(T)\times P(T)$，称$(X,(B,C))$为一个决策概念，如果有$X^{\lhd}=(B,C)$且$(B,C)^{\rhd}=X$，其中称X为决策概念$(X,(B,C))$的外延，(B,C)为决策概念$(X,(B,C))$的内涵。

对于不完备的决策形式背景，如果延用经典概念的构造方法，则会丢失或误判很多信息，同时也会忽略背景的不完备性。定义9给出了基于双子集内涵概念的定义，即概念的内涵由两个属性子集构成的序对进行表示，既考虑到概念构建的全面性、合理性，又避免了不完备信息的出现。接下来将研究不完备决策形式背景中双子集内涵概念格的属性约简。

定义 10 对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$中的不完备子条件形式背景，$(U,A,I,\{1,?,0\})$的全体概念记为$CL(U,A,I,\{1,?,0\})$，它构成完备格，称为条件概念

格，其中$(X_1,(B_1,C_1))\leqslant(X_2,(B_2,C_2))\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(\Leftrightarrow(B_1,C_1)\supseteq(B_2,C_2))$，$(X_1,(B_1,C_1))\wedge(X_2,(B_2,C_2))=(X_1\cap X_2,((B_1,C_1)\cup(B_2,C_2))^{><})$，$(X_1,(B_1,C_1))\vee(X_2,(B_2,C_2))=((X_1\cup X_2)^{<>},(B_1,C_1)\cap(B_2,C_2))$。

不完备子决策形式背景$(U,T,J,\{1,?,0\})$的全体概念记为$DL(U,T,J,\{1,?,0\})$，也构成完备格，称为决策概念格，其中的局部序关系及上下确界的定义与条件概念格中的定义方式类似，这里不再详细给出。

在不引起混淆的情况下，下文将条件概念格$CL(U,A,I,\{1,?,0\})$简记为CL，将决策概念格$DL(U,T,J,\{1,?,0\})$简记为DL。

因为不完备决策形式背景形成的条件概念格和决策概念格都遵循经典概念格的理论框架，所以可以将构建经典概念格的算法应用于构建条件概念格和决策概念格。下文以构建条件概念格为例，给出改进后的算法。

算法 1

输入：一个不完备子条件形式背景(U,A,I,{1,?,0})

输出：条件概念格 CL

1. 初始化 CL=∅；
2. 对于每一个 x∈U，执行算法 2ADD(x)；
3. 如果有$\bigcap_{(X,(B,C))\in CL}X=\emptyset$，那么令 CL=CL∪{(∅,(A,A))}；
4. 输出 CL。

算法 2　ADD(x)

输入：对象 x∈U

输出：条件概念格 CL

1. Temp=CL
2. 对于每一个(X,(B,C))∈Temp，如果(B,C)⊆$x^{<}$，那么令 X=X∪{x}，否则令(F,H)=(B,C)∩$x^{<}$，如果{y:y∈U−X & y 已执行 ADD &(F,H)⊆$y^{<}$}=∅，那么令 CL=CL∪{(X∪{x},(F,H))}；
3. 如果{y:y∈U&y 已执行 ADD &$y^{<}\subseteq x^{<}$}=∅，那么 CL=CL∪{({x},$x^{<}$)}。

例 2　以例 1 所给的不完备决策形式背景为例，应用上述算法构建条件概念格的过程如下：

步骤 1　$CL=\emptyset$；

步骤 2　ADD(1)

步骤 2.1　由于 $temp=\emptyset$，因此执行算法 2 的步骤 3，生成概念$\Omega_1=(1,(ad,ce))$，$CL=\{\Omega_1\}$；

步骤 3　ADD(2)

步骤 3.1　对于概念Ω_1，由于$(ad,ce)\not\subset 2^{<}$，则$(ad,ce)\cap 2^{<}=(ad,ce)\cap(bc,ae)=(\emptyset,e)$，此时除了对象 1 没有其他对象执行 ADD，因此生成概念$\Omega_2=(12,(\emptyset,e))$，$CL=CL\cup\{\Omega_2\}$；

步骤 3.2　生成概念$\Omega_3=(2,(bc,ae))$，$CL=CL\cup\{\Omega_3\}$；

步骤 4　ADD(3)

步骤 4.1　对于概念Ω_1，由于$(ad,ce)\not\subset 3^{<}$，那么$(ad,ce)\cap 3^{<}=(ad,ce)\cap(ad,be)=(ad,e)$，此时除了对象 1，对象 2 已执行 ADD，但是$(ad,e)\not\subset 2^{<}$，因此生成概念$\Omega_4=(13,(ad,e))$，$CL=CL\cup\{\Omega_4\}$；

步骤 4.2　对于概念Ω_2，$(\emptyset,e)\subseteq 3^{<}$，因此更新概念$\Omega_2=(123,(\emptyset,e))$；

步骤 4.3　对于概念Ω_3，由于$(bc,ae)\not\subset 3^{<}$，则$(bc,ae)\cap 3^{<}=(bc,ae)\cap(ad,be)=(\emptyset,e)$，此时除了对象 2，对象 1 已执行 ADD，且有$(\emptyset,e)\subseteq 1^{<}$，因此$\Omega_3$不做任何变化；

步骤 4.4　生成概念$\Omega_5=(3,(ad,be))$，$CL=CL\cup\{\Omega_5\}$；

步骤 5　生成概念$\Omega_6=(\emptyset,(A,A))$，$CL=CL\cup\{\Omega_6\}$。

例 2 中利用算法 1 和算法 2 生成的所有条件概念和决策概念如表 2 和表 3 所列，相应的概念格用 Hasse 图表示，如图 1 和图 2 所示。

表 2　例 2 的所有条件概念

Ω_1	$(1,(ad,ce))$	Ω_4	$(13,(ad,e))$
Ω_2	$(123,(\emptyset,e))$	Ω_5	$(3,(ad,be))$
Ω_3	$(2,(bc,ae))$	Ω_6	$(\emptyset,(A,A))$

表 3　例 2 的所有决策概念

Ω_1	$(1,(g,h))$	Ω_4	$(13,(g,\emptyset))$
Ω_2	$(123,(\emptyset,\emptyset))$	Ω_5	$(3,(g,k))$
Ω_3	$(2,(hk,g))$	Ω_6	$(\emptyset,(T,T))$

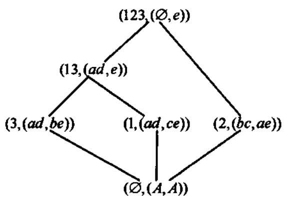

图 1　条件概念格

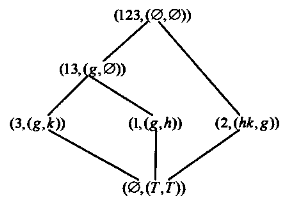

图 2　决策概念格

4　不完备协调决策形式背景的属性约简

本节将研究不完备协调决策形式背景的约简，主要从协调集的角度给出属性约简的方法。

定义 11　对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$，$(U,A,I,\{1,?,0\})$和$(U,T,J,\{1,?,0\})$分别称为不完备子条件形式背景和不完备子决策形式背景，CL和DL分别为条件概念格和决策概念格。如果有$CL\leqslant DL$，那么称该不完备决策形式背景是协调的，否则称其为不协调的。

由定义 11 可以判断例 1 中的不完备决策形式背景是协调的。

定义 12　对于不完备决策形式背景$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$，如果存在条件属性集$D\subseteq A$，使得不完备决策形式背景$(U,D,I_D,T,J,\{1,?,0\})$也是协调的，其中$I_D=I\cap(U\times D)$，则称D是协调集；进一步，$\forall d\in D$，不完备决策形式背景$(U,D-\{d\},I_{D-\{d\}},T,J,\{1,?,0\})$不是协调的，则称$D$为约简。

根据约简的定义及不完备协调决策形式背景中条件属性的有限性，容易得到以下定理。

定理 3　不完备协调决策形式背景的属性约简总是存在的。

但是一般来说，约简不一定是唯一的。

例 3(续例 2)　条件属性子集$\{a,b,c\}$形成的条件概念格如图 3 所示，条件属性子集$\{b,c,d\}$形成的条件概念格如图 4 所示。显然$\{a,b,c\}$和$\{b,c,d\}$是协调集，进一步可以验证它们都是约简。经检验，不存在其他的条件属性A的子集是约简。

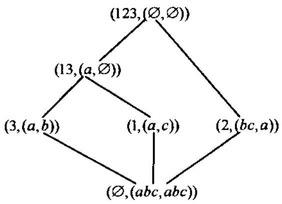

图3 $\{a,b,c\}$形成的条件概念格

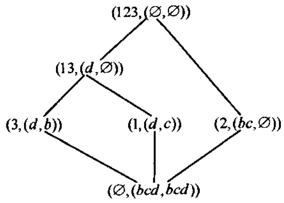

图4 $\{b,c,d\}$形成的条件概念格

由定义11和定义12可知，在判定一个集合$D\subseteq A$是否为约简时，关键是判断$D\subseteq A$以及$\forall d\in D, D-\{d\}$是否为协调集，因此需要知道如何判定一个集合是否为协调集。下面给出几个协调集的判定定理。

定理4(协调集判定定理1) 设$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为不完备协调的决策形式背景，$D\subset A$且$D\neq\emptyset$，则D是协调集$\Leftrightarrow\forall(F,H)\subseteq(T,T),(F,H)\neq(\emptyset,\emptyset),((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$。

证明：(必要性)因为D是协调集，所以有$CL(U,D,I_D,\{1,?,0\})\leqslant DL(U,T,J,\{1,?,0\})$，$\forall(F,H)\subseteq(T,T)$，$(F,H)\neq(\emptyset,\emptyset)$，一定有$((F,H)^{\rhd},(F,H)^{\rhd\lhd})\in DL(U,T,J,\{1,?,0\})$，则必存在$(B,C)\subseteq(D,D)$，满足$((F,H)^{\rhd},(B,C))\in CL(U,D,I_D,\{1,?,0\})$，因此有$(B,C)^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$。故有$(B,C)=(F,H)^{\rhd\prec_D}=(F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D)$，即有$((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(B,C)^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$。

(充分性)D是协调集$\Leftrightarrow CL(U,D,I_D,\{1,?,0\})\leqslant DL(U,T,J,\{1,?,0\})\Leftrightarrow(X,(F,H))\in DL(U,T,J,\{1,?,0\})\in DL(U,T,J,\{1,?,0\}),(X,X^{\prec_D})\in CL(U,D,I_D,\{1,?,0\})\Leftrightarrow X=X^{\prec_D\succ}$。因为$(X,(F,H))\in DL(U,T,J,\{1,?,0\})$，所以$X=(F,H)^{\rhd}=((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(X^{\prec}\cap(D,D))^{\succ}=X^{\prec_D\succ}$。

定理5(协调集判定定理2) 设$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为不完备协调的决策形式背景，$D\subset A$且$D\neq\emptyset$，则D是协调集$\Leftrightarrow\forall(F,H)\subseteq(T,T),(F,H)\neq(\emptyset,\emptyset),\exists(M,N)\subseteq(D,D),(M,N)\neq(\emptyset,\emptyset)$，使得$(M,N)^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$。

证明：(必要性)由定理4可证。

(充分性)由$(M,N)\subseteq(M,N)^{\succ\prec}=(F,H)^{\rhd\prec}$和$(M,N)\subseteq(D,D)$，有$(M,N)\subseteq(F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D)$，可得$((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}\subseteq(M,N)^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$，另一方面$((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}\supseteq(F,H)^{\rhd}\cup(D,D)^{\succ}\supseteq(F,H)^{\rhd}$，因此有$((F,H)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(F,H)^{\rhd}$。由定理4可知，$D$是协调集。

定理6(协调集判定定理3) 设$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为不完备协调的决策形式背景，$D\subset A$且$D\neq\emptyset$，则D是协调集$\Leftrightarrow\forall e\in T,\exists(M_i,N_i)\subseteq(D,D),(M_i,N_i)\neq(\emptyset,\emptyset)(i=1,2)$，使得$(M_1,N_1)^{\succ}=(e,\emptyset)^{\rhd}$且$(M_2,N_2)^{\succ}=(\emptyset,e)^{\rhd}$。

证明：(必要性)由定理5直接可证。

(充分性)$\forall(F,H)\subseteq(T,T),(F,H)\neq(\emptyset,\emptyset),(F,H)^{\rhd}=(F,\emptyset)^{\rhd}\cap(\emptyset,H)^{\rhd}=(\bigcap_{f\in F}(f,\emptyset)^{\rhd})\cap(\bigcap_{h\in H}(\emptyset,h)^{\rhd})$。由已知，$\forall f\in F\subseteq T,\exists(M_f,N_f)\subseteq(D,D)$，使得$(f,\emptyset)^{\rhd}=(M_f,N_f)^{\succ}$，$\forall h\in H\subseteq T,\exists(M_h,N_h)\subseteq(D,D)$，使得$(\emptyset,h)^{\rhd}=(M_h,N_h)^{\succ}$，因此$(F,H)^{\rhd}=(\bigcap_{f\in F}(M_f,N_f)^{\succ})\cap(\bigcap_{h\in H}(M_h,N_h)^{\succ})=((\bigcup_{f\in F}(M_f,N_f))\cup(\bigcup_{h\in H}(M_h,N_h)))^{\succ}=(M,N)^{\succ}$，其中$M=(\bigcup_{f\in F}M_f)\cup(\bigcup_{h\in H}M_h)$，$N=(\bigcup_{f\in F}N_f)\cup(\bigcup_{h\in H}N_h)$，由定理5得证。

定理7(协调集判定定理4) 设$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为不完备协调的决策形式背景，$D\subset A$且$D\neq\emptyset$，则D是协调集$\Leftrightarrow\forall e\in T$，使得$((e,\emptyset)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(e,\emptyset)^{\rhd}$，$((\emptyset,e)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(\emptyset,e)^{\rhd}$。

证明：(必要性)由定理4直接可证。

(充分性)$\forall e\in T,((e,\emptyset)^{\rhd\prec}\cap(D,D))^{\succ}=(e,\emptyset)^{\rhd}$，令$(M_1,N_1)=(e,\emptyset)^{\rhd\prec}\cap(D,D)$，那么有$(M_1,N_1)\subseteq(D,D)$，$(M_1,N_1)\neq(\emptyset,\emptyset)$，且$(M_1,N_1)^{\succ}=(e,\emptyset)^{\rhd}$，同理，有$(M_2,N_2)\subseteq(D,D)$，$(M_2,N_2)\neq(\emptyset,\emptyset)$且$(M_2,N_2)^{\succ}=(\emptyset,e)^{\rhd}$，由定理6可知$D$是协调集。

定理8(约简判定定理) 设$(U,A,I,T,J,\{1,?,0\})$为不完备协调的决策形式背景，$D\subset A$且$D\neq\emptyset$，则D是约简$\Leftrightarrow D$是协调集，且$\forall e\in T,\forall D_0\subset D,((e,\emptyset)^{\rhd\prec}\cap(D_0,D_0))^{\succ}\neq(e,\emptyset)^{\rhd}$或$((\emptyset,e)^{\rhd\prec}\cap(D_0,D_0))^{\succ}\neq(\emptyset,e)^{\rhd}$。

证明：根据定义12和定理7得证。

结束语 本文在经典概念格的基础上给出了不完备决策形式背景的定义，将一个不完备决策形式背景看作两个不完备形式背景，通过改进已有的概念格构造方法，得到不完备子条件概念格和子决策概念格。对于这两个概念格，给出了不完备协调决策形式背景基于双子集内涵概念的4种协调集的判定定理和严格的证明。最后，基于协调集的判定方法给出了属性约简的判定定理。为处理实际应用中出现的不完备协调决策形式背景问题，提供了更具有针对性的理论和算法基础，进一步推动了概念格理论的应用。

对于本文提出的不完备协调决策形式背景的属性约简，可以从辨识矩阵和不可约元的角度给出约简方法，这是未来的研究内容。

参考文献

[1] WILLE R. Restructuring Lattice theory: An approach based on hierarchies of concept[M]// Rival I, ed. Ordered Sets. Reidel, 1982: 415-470.

[2] CARPINETO C, ROMANO G. Exploiting the Potential of Concept Lattices for Information Retrieval with CREDO[J]. Journal of Universal Computer Science, 2004, 10(8): 985-1013.

[3] KUZNETSOV S O. Machine Learning on the basis of formal concept analysis[J]. Automation and Remote Control, 2001, 62(10): 1543-1564.

[4] WILLE R. Why can concept lattices support knowledge discovery in databases[J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2/3): 81-92.

[5] QUAN T T, NGO L N, HUI S C. An effective clustering-based approach for conceptual association rules mining[C]// International Conference on Computing and Communication Technologies (RIVF'09). IEEE, 2009: 1-7.

[6] SNELTING G. Reengineering of configurations based on mathe

matical concept analysis[J]. ACM Transaction on Software Engineering and Methodology,1996,5(2):146-189.

[7] SAMPATH S,SPRENKLE S,GIBSON E,et al. Applying concept analysis to user-session-based testing of web applications [J]. IEEE Transactions on Software Engineering,2007,33(10):643-658.

[8] 张文修,仇国芳.基于粗糙集的不确定决策[M].北京:清华大学出版社,2005.

[9] ZHANG W X,WEI L,QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science China Series F-Information Science,2005,48(6):713-726.

[10] WANG J H,LIANG J Y,QIAN Y H. A heuristic method to attribute reduction for concept lattice[C]// Proceedings of the Ninth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Qingdao,2010:483-487.

[11] WEI L,QI J J,ZHANG W X. Attribute reduction ofconcept lattice in the form of decision making [J]. Science China Series F-Information Science,2008,38(2):195-208. (in Chinese)
魏玲,祁建军,张文修.决策形式背景的概念格属性约简[J].中国科学(E辑):信息科学,2008,38(2):195-208.

[12] LI J H,MEI C L,LV Y J. A heuristic knowledge-reduction method for decision formal contexts[J]. Computers and Mathematics with Applications,2011,61(4):1096-1106.

[13] LI J H,LV Y J. Attribute reduction and rule extraction in decision form based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory,2009,39(7):182-188. (in Chinese)
李金海,吕跃进.基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J].数学的实践与认识,2009,39(7):182-188.

[14] GANTER B,WILLE R. Formal concept analysis,mathematical foundations[M]. New York:Springer,1999.

[15] BURMEISTER P,HOLZER R. On the treatment of incomplete knowledge in formalconcept analysis[C]// Conceptual Structures:Logical,Linguistic,and Computational Issues. Berlin,Heidelberg:Springer-Verlag,2000:385-398.

(上接第73页)

立在相似关系上的,相似关系构成了对论域的划分,如果相似关系过小,可能会出现过分类的现象,这样的划分是没有任何意义的,因此较大的相似程度对模糊分类有一定益处;而且,由定义12得知,当相似关系增大时,模糊集合的下近似程度会降低,使得分划的泛化能力增强,也即基于相似关系训练的分划方法对新样本的输入会有合理的响应能力。

综合(1)、(2)的实验结果,新定义的核函数的效果在一定程度上优于特殊的核函数,具有一定的实用性。

结束语　本文从数据表的相似矩阵出发构造了一种新的核函数,建立了基于此核函数的核模糊粗糙集;同时尝试将新提出的核函数用于两个数据集中对象间的相似性度量实验,并与常用方法进行比较分析,结果表明,新定义的核函数在刻画对象的相近程度和属性对对象的描述能力方面具有更好的效果,有一定的推广性。由于篇幅有限,将在以后的文章中探索新的核函数在基于模糊粗糙集的粒化、属性约简和变精度模糊粗糙集等方面的应用。

参考文献

[1] DUBOIS D,PRADE H. Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets[J]. International Journal of General Systems,1990,17(2/3):191-209.

[2] 张文修,梁怡,吴伟志.信息系统与知识发现[M].北京:科学出版社,2003.

[3] WU W Z,ZHANG W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences,2004,159(3/4):233-254.

[4] WU W Z,LEUNG Y,MI J S. On characterizations of (I,T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems,2005,154(1):76-102.

[5] WU W I,MI J S,ZHANG W X. Generalized fuzzy rough sets [J]. Information Sciences,2003,151(3):263-282.

[6] YEUNG D S,CHEN D G,TSANG E C C,et al. On the generalization of fuzzy rough sets[J]. IEEE Transactins on Fuzzy Systems,2005,13(3):343-361.

[7] WU W Z. On some mathematical structures of T-fuzzy rough set algebras in infinite universes of discourse[J]. Fundamenta Informaticae,2011,108(3/4):337-369.

[8] MI J S,LEUNG Y,ZHAO H Y,et al. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm [J]. Information Sciences,2008,178(16):3203-3213.

[9] HU Q H,YU D,WITOLD P,et al. Kernelized fuzzy rough sets and their applications [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2011,23(11):1649-1667.

[10] CHEN D G,YANG Y P,WANG H. Granular computing based on fuzzy similarity relations[J]. Soft Computing,2011,15(6):1161-1172.

[11] 陈德刚.模糊粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社,2013.

[12] CORINNA C,VLADIMIR V. Support-Vector Networks[J]. Machine Learning,1995,20(2):273-297.

[13] MOSER B. On representing and generating kernels by fuzzy equivalence relations [J]. Journal of Machine Learning Research,2006,7(6):2603-2620.

[14] MOSER B. On the T-transitivity of kernels[J]. Fuzzy Sets and Systems,2006,157(13):1787-1796.

[15] GENTON M G. Class of kernels for machine learning:A statistics prospective [J]. Journal of Machine Learning Research,2001,2(2):299-312.

[16] VALVERDE L. On the structure of F-indistinguishability operators[J]. Fuzzy Sets and Systems,1985,17(3):313-328.

[17] PINKUS A,FITZGERALD C H,MICCHELLI C A. Functions that preserve families of positive semidefinite metrics [J]. Linear algebra and Application,1995,221(93):83-102.

[18] ZHANG H Y,ZHANG W X,DONG M G. Representations of interval-valued fuzzy T-equivalence relations [J]. Information-An International Interdisciplinary Journal,2011,14(1):51-63.

[19] BELOHLAVEK R. Fuzzy Relational Systems:Foundations and Principles [M]. Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA,2002.

[20] MI J S,ZHANG W X. An Axiomatic Characterization of a Fuzzy Generalization of Rough Sets[J]. Information Sciences,2004,160(1):235-249.