区间数决策矩阵规范化方法的性质分析

胡明礼[1,2] 范成贤[3] 史开泉[4]

(南京航空航天大学经济与管理学院 南京 211106)[1] (南京航空航天大学科学发展研究中心 南京 211106)[2]
(山东大学电气工程学院 济南 250061)[3] (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)[4]

摘 要 区间数决策矩阵的规范化是区间数多属性决策的基础,规范化使得不同类型的属性值之间可以进行比较和计算。分析了现有规范化公式的优缺点,提出了区间数决策矩阵规范化函数应满足的性质;鉴于现有区间数决策矩阵规范化方法的局限性,采用极差变换的思想,给出区间数属性值的规范化公式,经过规范化之后,属性值均在区间[0,1]中,且不同方案在同一属性值下的序关系保持不变。从理论上证明了新的规范化公式具有单调性、平移不变性、差异比不变性、缩放不变性和区间稳定性等性质。最后,算例的结果验证了方法的可行性和有效性。

关键词 区间数,决策矩阵,规范化,性质

中图法分类号 N94 **文献标识码** A

Character Analysis of Standardization Methods of Decision Matrix with Intervals

HU Ming-li[1,2] FAN Cheng-xian[3] SHI Kai-quan[4]

(College of Economics & Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)[1]
(Center of Scientific Development Research, Nanjing University of Aeronauties and Astronautics, Nanjing 211106, China)[2]
(School of Electrical Engineering, Shandong University, Shandong 250061, China)[3]
(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)[4]

Abstract Standardization of the decision matrix with interval numbers is the basis for interval multi-attribute decision-making. Standardization makes the different types of attribute values can be compared and calculated. The advantages and disadvantages of the existing standardization formula were analyzed. This paper presented several characters that standardization function should satisfy. According to limits of the existing method, a new formula was given based on the range transformation idea. After a standardized, the attribute values are in the range of [0,1], and the relation of different projects under the same attribute remainis unchanged. It is proven that the new formula satisfies characters of monotone, translation invariance, difference ratio invariance, scaling invariance and stability properties of interval. Finally, an example was given to verify the feasibility and effectiveness of new method.

Keywords Intervals, Decision matrix, Standardization, Character

1 引言

由于客观事物的复杂性以及人们认识事物的能力有限,在实际决策问题中,决策信息往往是不确定的。决策矩阵的属性值为区间数的一类多属性决策问题受到许多学者的关注。区间数的决策矩阵规范化方法是一项基础工作,因为通过规范化不同属性值才能进行比较和计算。目前,学者已提出并应用了一些规范化方法,但区间数决策矩阵的规范化方法的专门研究比较少,仍没有一个统一的规范化方法。从思路上看,规范化方法主要有两类,一类是将区间数矩阵转化成规范化实数矩阵来处理;另一类是利用某种规范化函数将区间数决策矩阵转化为规范化区间数矩阵。由于前者在区间数矩阵的实数化过程中会损失区间数蕴含的重要信息,因此,本文主要关注后者。

文献[1]提出了基于区间数运算的规范化方法和基于误差传递的规范化方法,文献[2,3]在构建区间数多属性决策模型时使用了该文方法,但该方法有一定的局限性,比如规范化后不能保持原始决策矩阵中方案间的序关系,规范化矩阵的属性值不在一个固定的区间内。文献[4-6]提出了基于向量标准化法的规范化公式;文献[7]提出了基于线性尺度变换法的规范化公式;文献[8-12]在处理区间数决策矩阵规范化问题时应用了该方法;文献[13-15]提出了基于极差变换法的规范化方法。但上述规范化公式的性质和适用条件的系统研究还未见到。恰当地构造和选用规范化公式是构建区间数多属

到稿日期:2012-12-18 返修日期:2013-03-19 本文受国家自然科学基金(90924022,71171112),教育部人文社科基金项目(10YJC630084),中国博士后科学基金项目(2013M531356),中央高校基本科研业务费专项科研项目(NS2011018,NN2012016,NJ20130020)资助。

胡明礼(1979-),男,博士后,讲师,主要研究方向为多属性决策、不确定系统分析,E-mail:huml@nuaa.edu.cn;范成贤(1975-),男,博士,讲师,主要研究方向为信息系统与系统分析;史开泉(1945-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用。

性决策模型的关键基础性问题,然而目前规范化公式的构造和应用大多比较随意,缺乏系统深入的研究。

本文给出区间数决策规范化公式所应具备的基本性质,分析了比较常用的规范化公式的优缺点,针对现有方法的局限性,提出一个统一的规范化方法,证明了其具有强单调性等性质,最后通过算例验证了新方法的可行性和有效性。

2 区间数决策矩阵的规范化方法

2.1 预备知识

为了便于讨论区间数决策矩阵的规范化问题,下面给出区间数、区间数运算及区间数比较的基本概念。

定义 1(区间数定义) 设 R 为实数域,称闭区间$[\underline{a},\bar{a}]$为区间数,用 $\tilde{a}$ 表示,其中$\underline{a},\bar{a}\in R$,且$\underline{a}\leqslant\bar{a}$。

当$\underline{a}=\bar{a}$ 时,区间数退化为实数。同样,某一实数 a 也可表示为区间数$[\underline{a},\bar{a}]$,其中$\underline{a}=\bar{a}=a$。

定义 2(区间数运算) 设 $\tilde{a}=[\underline{a},\bar{a}]$,$\tilde{b}=[\underline{b},\bar{b}]$为任意两个正区间数(即$\underline{a}>0$ 且$\underline{b}>0$),c 表示正实数,其运算法则是:

(1)$\tilde{a}+\tilde{b}=[\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}]$;

(2)$\tilde{a}\times\tilde{b}=[\underline{a}\ \underline{b},\bar{a}\bar{b}]$;

(3)$\tilde{a}/\tilde{b}=[\underline{a}/\bar{b},\bar{a}/\underline{b}]$;

(4)$c\tilde{a}=[c\underline{a},\ c\bar{a}]$;

(5)$1/\tilde{a}=[1/\bar{a},1/\underline{a}]$;

(6)$c-\tilde{a}=[c-\bar{a},c-\underline{a}]$。

定义 3(区间数的比较) 对于任意两个区间数 $\tilde{a}=[\underline{a},\bar{a}]$,$\tilde{b}=[\underline{b},\bar{b}]$,将它们之间的序关系"$>$"(优于)、"$\geq$"(不劣于)、"$\subseteq$"(包含于)分别定义为:

$$\begin{cases}\tilde{a}>\tilde{b}, & \text{iff } \underline{a}>\bar{b}\\ \tilde{a}\geq\tilde{b}, & \text{iff } \underline{a}\geqslant\bar{b}\\ \tilde{a}\subseteq\tilde{b}, & \text{iff } \underline{a}\geqslant\underline{b}\text{且}\bar{a}\leqslant\bar{b}\end{cases} \tag{1}$$

2.2 区间数决策矩阵

对于属性值均以区间数形式给出的多属性决策问题,设有 m 个方案 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 组成方案集 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$,方案的 n 个属性 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 组成方案集 $Q=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$,决策者给出方案 $S_i\in S$ 在属性 $Q_j\in Q$ 下的属性值为区间数$\tilde{a}_{ij}=[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]$,$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$,其中$\underline{a}_{ij}$表示区间数下限,$\bar{a}_{ij}$表示区间数上限,于是有决策矩阵

$$A=\begin{bmatrix}[\underline{a}_{11},\bar{a}_{11}] & [\underline{a}_{12},\bar{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{1n},\bar{a}_{1n}]\\ [\underline{a}_{21},\bar{a}_{21}] & [\underline{a}_{22},\bar{a}_{22}] & \cdots & [\underline{a}_{2n},\bar{a}_{2n}]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [\underline{a}_{m1},\bar{a}_{m1}] & [\underline{a}_{m2},\bar{a}_{m2}] & \cdots & [\underline{a}_{mn},\bar{a}_{mn}]\end{bmatrix} \tag{2}$$

假设 f 是规范化函数,$f(\tilde{a}_{ij})=\tilde{b}_{ij}=[\underline{b}_{ij},\bar{b}_{ij}]$是规范化决策矩阵的属性值,那么决策矩阵 A 经过规范化后得到决策矩阵

$$B=\begin{bmatrix}[\underline{b}_{11},\bar{b}_{11}] & [\underline{b}_{12},\bar{b}_{12}] & \cdots & [\underline{b}_{1n},\bar{b}_{1n}]\\ [\underline{b}_{21},\bar{b}_{21}] & [\underline{b}_{22},\bar{b}_{22}] & \cdots & [\underline{b}_{2n},\bar{b}_{2n}]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [\underline{b}_{m1},\bar{b}_{m1}] & [\underline{b}_{m2},\bar{b}_{m2}] & \cdots & [\underline{b}_{mn},\bar{b}_{mn}]\end{bmatrix} \tag{3}$$

2.3 规范化函数应满足的性质

文献[16]分析了线性无量纲化方法的性质,本文将其自然推广到区间数的情况,给出区间数决策矩阵规范化方法应具备的基本性质。

性质 1(单调性) 规范化后的区间数保留原有区间数之间的序关系。

假设效益型属性值 Q_j 中的任意两个属性值记为$\tilde{a}_{1j},\tilde{a}_{2j}$,其规范化后的标准数据为 $\tilde{b}_{1j},\tilde{b}_{2j},\tilde{b}_{ij}=f(\tilde{a}_{ij})(i=1,2)$,$f$ 为规范化函数。

(1)当 $\tilde{a}_{1j}=\tilde{a}_{2j}$时,$\tilde{b}_{1j}=\tilde{b}_{2j}$;当 $\tilde{a}_{1j}>\tilde{a}_{2j}$时,$\tilde{b}_{1j}\geq\tilde{b}_{2j}$,此时称 f 为弱单调性的。

(2)当 $\tilde{a}_{1j}=\tilde{a}_{2j}$时,$\tilde{b}_{1j}=\tilde{b}_{2j}$;当 $\tilde{a}_{1j}>\tilde{a}_{2j}$时,$\tilde{b}_{1j}>\tilde{b}_{2j}$,此时称 f 为强单调性的。

性质 2(平移不变性) 对原始数据进行"平移"变换不会影响规范化后的结果,即有 $f(\tilde{a}_{ij}+c)=f(\tilde{a}_{ij})$($c$ 为任意一常数)成立。

性质 3(差异比不变性) 规范化后的属性值保留原有数据之间对于某个标准量的比较关系,即有

$$\frac{\tilde{a}_{1j}-\tilde{a}_j^*}{\tilde{a}_{2j}-\tilde{a}_j^*}=\frac{f(\tilde{a}_{1j})-f(\tilde{a}_j^*)}{f(\tilde{a}_{2j})-f(\tilde{a}_j^*)} \tag{4}$$

式中,区间数 $\tilde{a}_{1j},\tilde{a}_{2j}$是属性$Q_j$ 下任意两个属性值,区间数 $\tilde{a}_j^*$是 Q_j 下某个特定属性值,f 是规范化函数。

性质 4(缩放无关性) 对原始数据进行"缩小"或"放大"变换不会影响规范化后的结果,即有 $f(c_4\tilde{a}_{ij})=f(\tilde{a}_{ij})$($c_4$ 为任意一非零常数)成立。

性质 5(区间稳定性) 对任意一属性原始数据的规范化结果都处在一个确定的取值范围内,即有 $f(\tilde{a}_{ij})\in[\underline{c}_5,\bar{c}_5]$成立,其中$\underline{c}_5=\min\limits_i\{f(\underline{a}_{ij})\}$,$\bar{c}_5=\max\limits_i\{f(\bar{a}_{ij})\}$ 。

2.4 几种常见的规范化公式

(1)基于区间数运算的规范化公式

$$\text{当 } Q_j \text{ 是效益型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\underline{a}_{ij}/\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{a}_{ij}\\ \bar{b}_{ij}=\bar{a}_{ij}/\sum\limits_{i=1}^{m}\underline{a}_{ij}\end{cases} \tag{5}$$

$$\text{当 } Q_j \text{ 是成本型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\dfrac{1}{\bar{a}_{ij}}/\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{\underline{a}_{ij}}\\ \bar{b}_{ij}=\dfrac{1}{\underline{a}_{ij}}/\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{\bar{a}_{ij}}\end{cases} \tag{6}$$

规范化式(5)、式(6)不满足单调性的要求,也不满足性质2,3和5。

(2)基于向量标准化的规范化公式

$$\text{当 } Q_j \text{ 是效益型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\underline{a}_{ij}/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}^2}\\ \bar{b}_{ij}=\bar{a}_{ij}/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^2}\end{cases} \tag{7}$$

$$\text{当 } Q_j \text{ 是成本型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\dfrac{1}{\bar{a}_{ij}}/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(\dfrac{1}{\underline{a}_{ij}})^2}\\ \bar{b}_{ij}=\dfrac{1}{\underline{a}_{ij}}/\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(\dfrac{1}{\bar{a}_{ij}})^2}\end{cases} \tag{8}$$

规范化式(7)、式(8)不满足单调性的要求,也不满足性质2,3和5。

(3)基于线性尺度变换法的规范化公式

$$\text{当 } Q_j \text{ 是效益型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\underline{a}_{ij}/\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}\\ \bar{b}_{ij}=\bar{a}_{ij}/\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}\end{cases} \tag{9}$$

$$\text{当 } Q_j \text{ 是成本型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}/\bar{a}_{ij}\\ \bar{b}_{ij}=\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}/\underline{a}_{ij}\end{cases} \tag{10}$$

规范化式(9)、式(10)满足单调性的要求,但不满足性质2,3 和 5。

(4)基于极差变换法的规范化公式

$$\text{当 } Q_j \text{ 是效益型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\dfrac{\underline{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\\ \bar{b}_{ij}=\dfrac{\bar{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\end{cases} \tag{11}$$

$$\text{当 } Q_j \text{ 是成本型属性,}\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\dfrac{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\bar{a}_{ij}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\\ \bar{b}_{ij}=\dfrac{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\underline{a}_{ij}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\end{cases} \tag{12}$$

规范化式(11)、式(12)满足上述性质 1—5。

综上所述,表 1 给出了几种规范化公式的性质比较。

表 1 几种规范化公式的性质分析

公式编号	相关文献	单调性	平移不变性	差异比不变性	缩放无关性	区间稳定性	备注
式(5),式(6)	[1-3]	×	×	×	√	×	√表示有该性质;×表示没有该性质
式(7),式(8)	[4-6]	×	×	×	√	×	
式(9),式(10)	[7-12]	√	×	×	√	×	
式(11),式(12)	[13-15]	√	√	√	√	√	

3 新的区间数决策矩阵的规范化方法

属性值规范化的目的在于获得可比的尺度。主要包括两个方面:1)消除属性值量纲的影响(即无量纲化);2)将不同类型的属性值转化成同一类型(即类型一致化)。基本做法是将效益型、成本型等不同类型的属性值转化成同一类型(比如效益型),同时将不同标度转化成同一标度(比如规范化后的属性值最大为 1,最小为 0)。

定义 4(类型一致化定义) 若属性 Q_j 是成本型属性,有

$$\begin{cases}\underline{a}_{ij}'=\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\bar{a}_{ij}\\ \bar{a}_{ij}'=\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\underline{a}_{ij}\end{cases} \tag{13}$$

则属性值 $\tilde{a}_{ij}'=[\underline{a}_{ij}',\bar{a}_{ij}']$是效益型属性值。

注:式(13)可以将成本型属性值转化成效益型属性值。

定义 5(无量纲化定义) 对于一般的区间数 $\tilde{a}_{ij}=[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]$,不妨设 $0\leqslant\underline{a}_{ij}\leqslant\bar{a}_{ij}$。若属性 Q_j 是效益型属性,则区间数 $\tilde{b}_{ij}=[\underline{b}_{ij},\bar{b}_{ij}]$是规范化矩阵 B 中的元素,其中

$$\begin{cases}\underline{b}_{ij}=\dfrac{\underline{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\\ \bar{b}_{ij}=\dfrac{\bar{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\end{cases} \tag{14}$$

注:式(14)可以将效益型区间数决策矩阵转化为规范化矩阵。

区间数决策矩阵的规范化过程如图 1 所示。

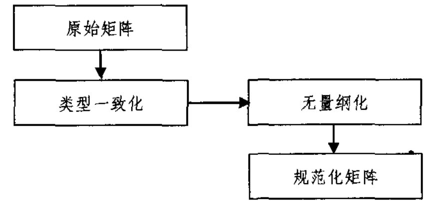

图 1 区间数决策矩阵规范化过程示意图

根据上述规范化思路,下面给出一个新的区间数决策矩阵的规范化方法,该方法同时满足上述性质 1—5。其算法步骤如下:

第 1 步 先判断属性的类型,如果 $Q_j(j=1,2,\cdots,n)$是效益型属性,不做处理,$j=j+1$;如果 Q_j 是成本型属性值,应用式(13)转换为效益型属性值,$j=j+1$,直到 $j=n+1$,转下一步;

第 2 步 对每个属性下的属性值集,应用式(14),将所有属性值转换到规范化属性值;

第 3 步 检验规范化矩阵是否满足性质 1—5,若满足则转下一步;

第 4 步 得到最终的规范化区间数决策矩阵;

第 5 步 结束。

4 新的规范化方法的性质分析

第 3 节提出的规范化方法的核心是类型一致化式(13)和无量纲化式(14),下面从理论上证明无量纲化式(14)的性质。

定理 1 规范化式(14)满足强单调性。

证明:(1)当 $\tilde{a}_{1j}=\tilde{a}_{2j}$时,$\underline{a}_{1j}=\underline{a}_{2j}$且$\bar{a}_{1j}=\bar{a}_{2j}$,同一属性 Q_j 下,$\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}$和$\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}$是不变的,因此

$$\underline{b}_{1j}=\frac{\underline{a}_{1j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\frac{\underline{a}_{2j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\underline{b}_{2j}$$

而且

$$\bar{b}_{1j}=\frac{\bar{a}_{1j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\frac{\bar{a}_{2j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\bar{b}_{2j}$$

所以 $\tilde{b}_{1j}=\tilde{b}_{2j}$;

(2)当 $\tilde{a}_{1j}>\tilde{a}_{2j}$时,$\underline{a}_{1j}>\bar{a}_{2j}$,由于

$$\underline{b}_{1j}=\frac{\underline{a}_{1j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}>\frac{\bar{a}_{2j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\bar{b}_{2j}$$

因此 $\tilde{b}_{1j}>\tilde{b}_{2j}$,此时称 f 为强单调性的。

证毕!

定理 2 规范化式(14)满足平移不变性。

证明:若对属性 Q_j 下所有属性值"平移"一个常数 c,c 为实数,平移后的属性值记为 $\tilde{a}_{ij}^c=[\underline{a}_{ij}+c,\bar{a}_{ij}+c]$,根据规范化式(14)可得 $\tilde{b}_{ij}^c=[\underline{b}_{ij}^c,\bar{b}_{ij}^c]$,其中

$$\underline{b}_{ij}^c=\frac{\underline{a}_{ij}+c-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}+c\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}+c\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}+c\}}$$
$$=\frac{\underline{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\underline{b}_{ij}$$

$$\bar{b}^{c}_{ij}=\frac{\bar{a}_{ij}+c-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}+c\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}+c\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}+c\}}=\frac{\bar{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\bar{b}_{ij}$$

因此 $\tilde{b}^{c}_{ij}=\tilde{b}_{ij}$。即规范化式(14)满足平移不变性。

证毕!

定理 3 规范化式(14)满足差异比不变性。

证明:

$f(\tilde{a}_{ij})=\tilde{b}_{ij}=[\underline{b}_{ij},\bar{b}_{ij}],i=1,2,f(\tilde{a}_j^*)=\tilde{b}_j^*=[\underline{b}_j^*,\bar{b}_j^*]$

根据区间数运算规则,等式左边

$$\frac{\tilde{a}_{1j}-\tilde{a}_j^*}{\tilde{a}_{2j}-\tilde{a}_j^*}=\frac{[\underline{a}_{1j}-\bar{a}_j^*,\bar{a}_{1j}-\underline{a}_j^*]}{[\underline{a}_{2j}-\bar{a}_j^*,\bar{a}_{2j}-\underline{a}_j^*]}$$

由定义知,等式右边

$$\frac{f(\tilde{a}_{1j})-f(\tilde{a}_j^*)}{f(\tilde{a}_{2j})-f(\tilde{a}_j^*)}=\frac{\tilde{b}_{1j}-\tilde{b}_j^*}{\tilde{b}_{2j}-\tilde{b}_j^*}=\frac{[\underline{b}_{1j}-\bar{b}_j^*,\bar{b}_{1j}-\underline{b}_j^*]}{[\underline{b}_{2j}-\bar{b}_j^*,\bar{b}_{2j}-\underline{b}_j^*]}$$

又

$$\underline{b}_{1j}-\bar{b}_j^*=\frac{\underline{a}_{1j}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}-\frac{\bar{a}_j^*-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=\frac{\underline{a}_{1j}-\bar{a}_j^*}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}$$

因此,等式右边=

$$\frac{\left[\frac{\underline{a}_{1j}-\bar{a}_j^*}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}},\frac{\bar{a}_{1j}-\underline{a}_j^*}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\right]}{\left[\frac{\underline{a}_{2j}-\bar{a}_j^*}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}},\frac{\bar{a}_{2j}-\underline{a}_j^*}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}\right]}=\frac{[\underline{a}_{1j}-\bar{a}_j^*,\bar{a}_{1j}-\underline{a}_j^*]}{[\underline{a}_{2j}-\bar{a}_j^*,\bar{a}_{2j}-\underline{a}_j^*]}$$

所以,等式左边=等式右边。

证毕!

定理 4 规范化式(14)满足缩放无关性。

证明:根据区间数运算规则,$c_4\tilde{a}_{ij}=[c_4\underline{a}_{ij},c_4\bar{a}_{ij}]$

$$f(c_4\underline{a}_{ij})=\frac{c_4\underline{a}_{ij}-\min\limits_i\{c_4\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{c_4\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{c_4\underline{a}_{ij}\}}=\frac{\underline{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=f(\underline{a}_{ij})$$

而且

$$f(c_4\bar{a}_{ij})=\frac{c_4\bar{a}_{ij}-\min\limits_i\{c_4\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{c_4\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{c_4\underline{a}_{ij}\}}=\frac{\bar{a}_{ij}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}{\max\limits_i\{\bar{a}_{ij}\}-\min\limits_i\{\underline{a}_{ij}\}}=f(\bar{a}_{ij})$$

所以,$f(c_4\tilde{a}_{ij})=[f(\underline{a}_{ij}),f(\bar{a}_{ij})]=f(\tilde{a}_{ij})$。

证毕!

定理 5 规范化式(14)满足区间稳定性。

根据规范化函数 f 的定义,$\underline{c}_5=\min\limits_i\{f(\underline{a}_{ij})\}=0,\bar{c}_5=\max\limits_i\{f(\bar{a}_{ij})\}=1$,因此 $f(\tilde{a}_{ij})\in[0,1]$,即规范化结果处在一个确定的区间[0,1]内。

5 算例分析

考虑一个具有区间数的决策矩阵 A,其中,方案集 $S=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$,属性集 $Q=\{Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\}$,Q_1-Q_3 是效益型属性,Q_4 是成本型属性。

$$A=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\quad Q_1\quad&\quad Q_2\quad&\quad Q_3\quad&\quad Q_4\quad\end{array}\\ \begin{bmatrix}[1.8,2.2]&[1.2,1.8]&[1.8,2.2]&[5.4,5.6]\\ [2.3,2.7]&[2.4,3.0]&[1.6,2.0]&[6.4,6.6]\\ [1.6,2.0]&[1.7,2.3]&[1.9,2.3]&[4.5,4.6]\\ [2.0,2.4]&[1.5,2.1]&[1.8,2.2]&[4.9,5.1]\end{bmatrix}\end{array}$$

运用式(5)、式(6)对决策矩阵 A 进行规范化,得到矩阵

$$B'=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\quad Q_1\quad&\quad Q_2\quad&\quad Q_3\quad&\quad Q_4\quad\end{array}\\ \begin{bmatrix}[0.194,0.286]&[0.130,0.265]&[0.207,0.310]&[0.231,0.249]\\ [0.247,0.351]&[0.261,0.441]&[0.184,0.281]&[0.196,0.210]\\ [0.172,0.260]&[0.185,0.338]&[0.281,0.324]&[0.281,0.306]\\ [0.215,0.312]&[0.163,0.309]&[0.206,0.310]&[0.254,0.275]\end{bmatrix}\end{array}$$

根据该原始决策矩阵,通过区间数比较,可知方案在不同属性下的序关系,例如属性 Q_1 下 S_1 劣于 $S_2(\tilde{a}_{11}<\tilde{a}_{21})$,方案 S_2 优于 $S_3(\tilde{a}_{21}>\tilde{a}_{31})$,方案 S_4 不劣于 $S_3(\tilde{a}_{41}\geq\tilde{a}_{31})$;属性 Q_2 下 S_1 劣于 $S_2(\tilde{a}_{12}<\tilde{a}_{22})$,方案 S_2 优于 $S_3(\tilde{a}_{22}>\tilde{a}_{32})$,方案 S_2 优于 $S_4(\tilde{a}_{22}\geq\tilde{a}_{42})$;属性 Q_3 下 S_1 优于 $S_2(\tilde{a}_{13}<\tilde{a}_{23})$,方案 S_1 等于 $S_4(\tilde{a}_{13}=\tilde{a}_{43})$;属性 Q_4 下 S_3 优于 $S_4(\tilde{a}_{34}<\tilde{a}_{44})$,方案 S_4 优于 $S_1(\tilde{a}_{44}>\tilde{a}_{14})$,方案 S_1 不劣于 $S_2(\tilde{a}_{14}\geq\tilde{a}_{24})$。观察规范化后的决策矩阵 B',我们发现,方案之间的序关系发生了变化,例如属性 Q_1 下 S_1 不一定劣于 S_2,方案 S_2 不一定优于 S_3,方案 S_4 不一定不劣于 S_3;而且其他序关系都不一定成立,即属性 Q_2 下 S_1 劣于 S_2,方案 S_2 优于 S_3,方案 S_2 优于 S_4;属性 Q_3 下 S_1 优于 S_2,方案 S_1 等于 S_4;属性 Q_4 下 S_3 优于 S_4,方案 S_4 优于 S_1,方案 S_1 不劣于 S_2。

因此,我们可以得到结论,规范化式(5)和式(6)破坏了方案之间原有的序关系,其原因在于该公式不满足单调性。这验证了 2.3 节中的结论。

下面利用第 3 节给出的区间数决策矩阵规范化算法,对原始区间数决策矩阵 A 重新进行规范化处理。

第 1 步 已知 Q_1-Q_3 是效益型属性,本步不做处理,Q_4 是成本型属性,应用式(13)将 Q_4 下的属性值转换成效益型属性值,得到新的决策矩阵

$$A'=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\quad Q_1\quad&\quad Q_2\quad&\quad Q_3\quad&\quad Q_4\quad\end{array}\\ \begin{bmatrix}[1.8,2.2]&[1.2,1.8]&[1.8,2.2]&[1,1.2]\\ [2.3,2.7]&[2.4,3.0]&[1.6,2.0]&[0,0.2]\\ [1.6,2.0]&[1.7,2.3]&[1.9,2.3]&[2,2.2]\\ [2.0,2.4]&[1.5,2.1]&[1.8,2.2]&[1.5,1.7]\end{bmatrix}\end{array}$$

第 2 步 应用式(14),对决策矩阵 A' 中所有属性值进行规范化,得到规范化矩阵

$$B=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\quad Q_1\quad&\quad Q_2\quad&\quad Q_3\quad&\quad Q_4\quad\end{array}\\ \begin{bmatrix}[0.182,0.545]&[0.000,0.333]&[0.286,0.857]&[0.455,0.545]\\ [0.636,1.000]&[0.667,1.000]&[0.000,0.571]&[0.000,0.091]\\ [0.000,0.364]&[0.278,0.429]&[0.428,1.000]&[0.909,1.000]\\ [0.364,0.727]&[0.167,0.500]&[0.286,0.857]&[0.682,0.773]\end{bmatrix}\end{array}$$

第3步　检验规范化矩阵是否满足性质1—5。

(1)单调性

观察规范化矩阵 B，显然属性 Q_1 下方案 S_2 优于 S_3，方案 S_1 劣于 S_2、方案 S_4 不劣于 S_3 等等，保持了原始决策矩阵的序关系。这验证了定理1，即新的规范化函数满足单调性。

(2)平移不变性

若对矩阵 A 中 Q_1 下的所有属性值均平移一个常数 $c=0.1$(即属性值加一个常数 $c=0.1$)，那么得到新的矩阵为：

$$A^{(2)}=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}[1.9,2.3] & [1.2,1.8] & [1.8,2.2] & [5.4,5.6]\\ [2.4,2.8] & [2.4,3.0] & [1.6,2.0] & [6.4,6.6]\\ [1.7,2.1] & [1.7,2.3] & [1.9,2.3] & [4.5,4.6]\\ [2.1,2.5] & [1.5,2.1] & [1.8,2.2] & [4.9,5.1]\end{bmatrix}\end{array}$$

运用新的规范化算法后，得到规范化矩阵的属性 Q_1 下的列向量为

$$([0.182,0.545],[0.636,1],[0,0.364],[0.364,0.727])^{T}$$

这与未平移的矩阵规范化后的结果完全一样，验证了定理2，即新的规范化函数满足平移不变性。

(3)差异比不变性

设选定区间数 $\tilde{a}_j^*=[0.5,0.6]$ 是 Q_1 下的标准值，规范化前 $\dfrac{\tilde{a}_{11}-\tilde{a}_j^*}{\tilde{a}_{21}-\tilde{a}_j^*}=\dfrac{[1.8,2.2]-[0.5,0.6]}{[2.4,2.8]-[0.5,0.6]}=\dfrac{[1.2,1.7]}{[1.8,2.3]}$

$$\frac{f(\tilde{a}_{11})-f(\tilde{a}_j^*)}{f(\tilde{a}_{21})-f(\tilde{a}_j^*)}$$

$$=\frac{\left[\frac{1.8-1.6}{2.7-1.6},\frac{2.2-1.6}{2.7-1.6}\right]-\left[\frac{0.5-1.6}{2.7-1.6},\frac{0.6-1.6}{2.7-1.6}\right]}{\left[\frac{2.4-1.6}{2.7-1.6},\frac{2.8-1.6}{2.7-1.6}\right]-\left[\frac{0.5-1.6}{2.7-1.6},\frac{0.6-1.6}{2.7-1.6}\right]}$$

$$=\frac{[1.2,1.7]}{[1.8,2.3]}$$

这验证了定理3，即新的规范化算法满足差异比不变性。

(4)缩放无关性

假设决策矩阵中属性 Q_1 下的属性值均"放大"2倍(即属性值均乘以2)，那么得到新的矩阵为

$$A^{(4)}=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}[3.6,4.4] & [1.2,1.8] & [1.8,2.2] & [5.4,5.6]\\ [4.6,5.4] & [2.4,3.0] & [1.6,2.0] & [6.4,6.6]\\ [3.2,4.0] & [1.7,2.3] & [1.9,2.3] & [4.5,4.6]\\ [4.0,4.8] & [1.5,2.1] & [1.8,2.2] & [4.9,5.1]\end{bmatrix}\end{array}$$

运用新的规范化算法后，得到规范化矩阵的属性 Q_1 下的列向量为

$$([0.182,0.545],[0.636,1],[0,0.364],[0.364,0.727])^{T}$$

这与 B 中的结果完全一样，验证了定理4，即新的规范化算法满足缩放无关性。

(5)区间稳定性

观察规范化矩阵 B，所有属性值均在区间[0,1]内，并且最小值0和最大值1都可以取到。这验证了定理5，即新的规范化算法满足区间稳定性。

因此，矩阵 B 是最终的规范化区间数决策矩阵。

算例结果表明，新的方法能够克服现有方法的局限性，是比较有效的区间数决策矩阵规范化方法。

结束语　本文提出了区间数决策矩阵的规范化函数应满足的性质，针对现有区间数决策矩阵规范化方法的不足，提出一个新的区间数决策矩阵规范化方法，并证明了该方法满足强单调性、平移不变性、差异比不变性、缩放无关性和区间稳定性。本文研究对区间数决策矩阵的规范化处理具有指导意义，丰富了区间数多属性决策方法的研究。

参 考 文 献

[1] 樊治平，宫贤斌，张全. 区间数多属性决策中决策矩阵的规范化方法[J]. 东北大学学报：自然科学版，1999，20(3)：326-329

[2] 党耀国，刘思峰，刘斌. 多指标区间数关联决策模型研究[J]. 南京航空航天大学学报，2004，36(3)：403-406

[3] 王渭明，王国富，冯玉国. 区间数型多属性决策相对灰色关联分析方法及其应用[J]. 数学的实践与认识，2012，42(23)：75-80

[4] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策，2001，16(增刊)：818-821

[5] 徐泽水. 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法[J]. 系统工程学报，2002，17(2)：177-181

[6] 徐泽水，孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报，2002，5(3)：35-39

[7] 张吉军，刘家才. 区间数多指标决策问题的决策方法研究[J]. 预测，2002，21(1)：73-75

[8] 张吉军. 区间数多指标决策问题的灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术，2005，27(6)：1030-1033

[9] 刘洋，樊治平. 一种具有区间数信息的多目标指派方法[J]. 运筹与管理，2007，16(5)：17-22

[10] 钟诗胜，王体春，丁刚. 基于多指标灰区间数关联决策模型的产品方案设计[J]. 控制与决策，2008，23(12)：1378-1383

[11] 杨保华，方志耕，周伟，等. 基于信息还原算子的多指标区间灰数关联决策模型[J]. 控制与决策，2012，27(2)：182-186

[12] 吴维煊，刘秀梅，赵克勤. 区间数特性集对分析及在多指标决策中的应用[J]. 数学的实践与认识，2012，42(24)：66-71

[13] 郭秀英. 区间数多指标决策的一种新方法[J]. 西南石油大学学报：社会科学版，2009，2(1)：68-80

[14] 熊文涛. 区间数多准则决策方法及其应用研究[D]. 武汉：华中科技大学，2011

[15] 彭安华，肖兴明. 区间数多属性决策中属性值规范化方法[J]. 机械设计与研究，2011，27(6)：5-8

[16] 郭亚军，易平涛. 线性无量纲化方法的性质分析[J]. 统计研究，2008，25(2)：93-101