

图匹配技术研究

项英倬¹ 谭菊仙² 韩杰思¹ 石 浩³

(盲信号处理重点实验室 成都 610041)¹ (江南计算技术研究所 江苏 无锡 214000)²

(中国科学技术大学自动化系 合肥 230031)³

摘 要 图(Graph)在众多的科学领域和工程领域(如模式识别和计算机视觉)中具有广泛的应用,其具备强大的信息表达能力。当图被用来表示物体结构时,衡量物体的相似程度将会被转化成计算两个图的相似度,这就是图匹配(Graph Matching)。近几十年来,对图匹配相关技术和算法的研究已经成为了研究领域内的一个重要课题,尤其是随着大数据时代的来临,图作为数据之间关系的一种表示形式,将会受到越来越多的关注。文中对图匹配技术的发展现状进行了综述,详细介绍了该技术的理论基础,梳理了解决图匹配问题的几种主流思路。最后,结合图匹配技术的一种具体应用对几种算法的性能进行了对比分析。

关键词 图匹配,图同构,子图同构,图编辑距离

中图法分类号 TP311 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.004

Survey of Graph Matching Algorithms

XIANG Ying-zhuo¹ TAN Ju-xian² HAN Jie-si¹ SHI Hao³

(National Key Laboratory of Science and Technology on Blind Signal Processing, Chengdu 610041, China)¹

(Jiangnan Institute of Computing Technology, Wuxi, Jiangsu 214000, China)²

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230031, China)³

Abstract Graph has been applied to many fields of science and technology, such as pattern recognition and computer vision, because of its powerful representation of structure and information. When graph is used to represent object structure, calculating the similarity of two objects equals to calculating the similarity of two graphs. The research of graph matching algorithms has been carried out for decades, especially as the big data technology increasingly becomes hot recently. As a representation of relationship among data, graph has been paid more attention in the research. This paper gave a survey of the development of the graph matching technology as well as the foundation of this theory. Then, this paper made a summarization of graph matching methods, and compared the performance of several classical algorithms.

Keywords Graph matching, Graph isomorphism, Subgraph isomorphism, Graph edit distance

1 引言

图^[1]是一种常见的具有强大表达力的数据结构,因此图常被用来对数据关系进行展示以及对概念进行表示。在图的实际应用中,节点(Node)通常用来表示物体,边(Edge)通常用来表示物体之间的关系。图具有许多有趣的性质,如无论如何对其节点进行旋转、移动,或者镜面对称,都不会改变图中节点的性质以及相互之间的联系,即改变后的图与原来的图仍然是同一个图。图的这种不变性,以及它对物体和物体间关系的良好建模性,使得其在实际问题中具有广泛应用。在计算机视觉^[2-3]以及模式识别^[4]中,物体的相似性是一个很重要的研究课题,例如给定一个物体的数据模式以及一条查询,从数据库中检索出一个或者多个与查询相似的物体便会

涉及物体的相似性计算。如果使用图来表示一个物体,那么这个问题会被转化为图的相似度计算问题,也就是图匹配问题。

图匹配的相关概念主要包括图同构(Graph Isomorphism)、子图同构(Subgraph Isomorphism)和最大公共子图(Max common Subgraph)等^[5-8]。然而,实际应用中常常并不能保证输入的图能够与数据库中的图完美匹配,因此亟需一种错误容忍算法,即一种计算两个图的相似度的方法。

本文对近几十年来图匹配的相关研究进行了综述。第2节对图匹配的基本概念进行了介绍;第3节总结了与图匹配相关的理论基础;根据解决图匹配问题的几种思路,第4节研究并对比分析了图匹配的几种算法;第5节对算法应用及性能进行了介绍;最后总结全文并展望未来。

收稿日期:2017-05-24 返修日期:2017-07-19 本文受国家自然科学基金(61174124)资助。

项英倬(1990—),男,博士生,主要研究方向为人工智能,E-mail:xiangyzh@foxmail.com;谭菊仙(1967—),女,高级工程师,主要研究方向为信息处理,E-mail:441682944@qq.com(通信作者);韩杰思(1981—),男,工程师,主要研究方向为网络态势感知;石 浩(1990—),男,博士,主要研究方向为网络优化。

2 图匹配的基本概念

所谓图,是指一个数学结构 (V, E, ϕ) , 其中, V 是非空集, E 是定义在 V 上的二元关系集, ϕ 是 E 到 $V \times V$ 的函数。若 $\phi(E)$ 中的元素都是有序对, 则 (V, E, ϕ) 被称为有向图(Digraph), 记为 $D = (V(D), E(D), \phi_D)$; 若 $\phi(E)$ 中的元素都是无序对, 则 (V, E, ϕ) 被称为无向图(Undirected Graph), 记为 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ 。

本文中研究的图包括有向图以及无向图, 即所谓的关系图和关系结构。这些图通常包含有限的节点和有限的边。一般地, 每个节点(有时也被称作顶点)和边都会有一个标签或者属性。如果删除图 g 的一个顶点以及该顶点所附带的边, 则可以得到图 g 的一个子图, 记作 $g' \subset g$ 。图 G 与图 H 的同构是指, 存在两个双射 $\theta: V(D) \rightarrow V(H)$ 和 $\varphi: E(D) \rightarrow E(H)$ 使得对 $\forall a \in E(D)$, 都满足 $\Psi_D(a) = (x, y) \Leftrightarrow \Psi_H(\varphi(a)) = (\theta(x), \theta(y))$ 。

图匹配中的另一个重要概念是最大公共子图。最大公共子图是指图 g 与图 g' 之间所能重合的拥有最多节点的子图 g'' 。通常, 两个图的最大公共子图并不是唯一的。

图同构有助于判定两个物体是否相同, 因为图具有多种不同的表示形式, 而其属性却不会因其表示形式的不同而发生改变。同样地, 图同构技术可用于判断图所表示的物体是否是另外一个物体的一部分, 或者图所表示的物体是否存在于多个物体的集合中。最大公共子图的概念可以用来衡量两个图的相似程度, 尽管两个图可能并不存在同构或者子图同构。显然, 两个图之间的最大公共子图越大, 则两个图之间的相似程度越高。

由于实际应用中环境噪声无处不在, 因此使用图来表示实际物体时难免会受到噪声的干扰。在图匹配过程中需要考虑噪声的影响, 以使匹配算法对噪声具有一定的容忍程度。对于最大公共子图的匹配, 一种较好的替代方法是使用图编辑距离(Graph Edit Distance)^[8-9]来进行错误容忍的图匹配。一般情况下, 图的编辑操作(Edit Operation)包括删除、插入和替换。编辑操作不仅可以用于节点, 还可以用于边。图 g 与图 g' 之间的编辑距离是指将图 g 转变成图 g' 需要的最少的一系列编辑操作。显然, 两个图之间的编辑距离越短, 两个图的相似程度就越高。这样对图进行的编辑操作, 可以用于修正两个图之间节点的匹配错误。

在实际应用中, 一些编辑操作可能比其他的编辑操作更重要, 因此不同的操作对应的代价(Cost)也应不同。通常, 高频出现的编辑操作对应的代价应较小。比如, 一次的节点替换可以等价为一节点的删除加上一节点的增加, 因此替换操作的代价至少应该是删除与增加代价的和。通常使用代价函数(Cost Function)来对每个不同的编辑操作代价进行定量评价。如果给定了编辑操作的集合以及相应的代价函数, 就可以计算两个图的编辑距离, 也就是通过最小代价的编辑操作将一幅图 g 转化成另外一幅图 g' 所花费的代价。

事实上, 图同构、子图同构以及最大公共子图检测都是在特殊代价函数下的特殊形式的图编辑距离计算^[10]。同样, 也可以将有向的权重图匹配看作一种特殊的图编辑距离形

式^[11-13]。图匹配算法以及图编辑距离的计算算法将在第 4 节进行介绍, 相关概念的详细介绍请参考文献[14-15]。

3 理论基础

对于基于图编辑距离的图匹配技术与最大公共子图的关系, 目前已经有了大量的研究成果^[8]。本文认为, 最大公共子图与图编辑距离在特定的代价函数下是等价的。特别地, 最大公共子图 g'' 与两图的编辑距离 $d(g, g')$ 具有如式(1)所示的关系。

$$d(g, g') = |g| + |g'| - 2|g''| \quad (1)$$

其中, $|g|$, $|g'|$, $|g''|$ 分别代表图 g , g' , g'' 的节点个数。

因此, 任何算法中求解最大公共子图的运算都可以被用来计算图编辑距离; 反之也成立, 只要代价函数满足文献[8]中给出的条件。

与上述结果相似, 文献[16]提出了一种新的计算图相似度的方法 $\delta(g, g')$ 。该方法是基于最大公共子图的, 如式(2)所示。

$$\delta(g, g') = 1 - \frac{|mcs(g, g')|}{\max(|g|, |g'|)} \quad (2)$$

其中, $mcs(g, g')$ 为图 g 与图 g' 的最大公共子图, 与式(1)类似, $|g|$ 和 $|g'|$ 分别代表图 g 和图 g' 的节点个数。

文献[10]更深入地研究了代价函数对图编辑距离的影响, 并得出结论: 存在无穷多个不同的等效代价函数可以得到一个相同的编辑操作序列, 使得图 g 转变成图 g' 。也就是说, 给定一个代价函数的编辑距离 $d(g, g')$, 其他可以得到相同编辑距离的代价函数都是线性相关的。从实际应用角度看, 这个结论揭示了基于某个代价函数的任意图匹配算法将可以应用到无穷多的其他代价函数上, 只要这些代价函数属于同一个等价类。

文献[17]提出了两个图的最小公共父图的概念。图 g' 与图 g'' 的公共父图 g 同时将图 g' 与图 g'' 作为其子图。类似于两个数的最小公倍数, 最小公共父图指图 g' 与图 g'' 的公共父图所含节点数最少的图。可以证明, 最小公共父图的计算等价于最大公共子图的计算。两个图的最小公共父图与它们的图编辑距离存在类似于式(1)的关系^[17]。最大公共子图可被看作是两个图的交集, 而最小公共父图可被看作是两个图的并集。

4 图匹配算法

目前已有大量针对不同特征图的匹配算法, 最经典的图同构算法和子图同构算法由 Ullmann 于 1976 年提出^[5]。最大公共子图检测算法请参考文献[18-21], 经典的错误容忍图匹配算法请参考文献[22-27]。这些算法基本都是特别版本的 A* 搜索过程, 即通常都是进行树(Tree)的搜索, 并采用了某种启发式的回溯方法来减小搜索空间, 从而提高了搜索速度。目前, 对图匹配问题的研究出现了两个分支: 1) 研究启发式的搜索算法, 求解一个近似的最优解; 2) 研究图的精确匹配算法, 采用各种回溯策略来尽可能地加速匹配过程。

4.1 图匹配的近似求解算法

图匹配问题是一个 NP 问题, 子图匹配问题更是一个 NP

完全问题,即求解这类问题需要花费指数级的时间或者空间。退而求其次,可以通过多项式时间的算法来求解一个近似的最优解或者局部最优解。例如,文献[28-30]介绍了一种概率松弛方法(Probabilistic Relaxation Schemes)。其他方法还有基于神经网络的 Hopfield 网络^[31]和 Kohonen 图^[32]。文献[33-35]提出的基因算法,以及文献[36]提出的基于最大流的近似方法。然而,这些方法通常收敛于局部最优,无法找到全局最优。

尽管这些近似的求解方法有时并不能得到一个全局的最优解,但考虑到用时与解的性能,一个近似最优解在工程应用中也可以被接受。尤其在许多实际问题中,常常无法使用精确的求解算法来解决图之间的匹配,此时启发式的求解方法为这类问题的求解提供了一种有效途径。

4.2 图匹配的精确求解算法

图的精确匹配算法往往需要指数级的时间和空间,但是对于一些特殊的图或者特殊的应用场景,可以通过一些假定的条件来快速实现精确匹配,大幅度减少算法所花费的时间。

一个经典的且至今仍被广泛应用的算法为 Ullmann 提出的基于邻接矩阵(Adjacency Matrix)的树搜索算法。该算法采用基于节点度的剪枝方法,大幅缩减了回溯的搜索空间,从而增加了算法的速度。另一种经典的回溯算法由 Schmidt 和 Druffel^[27]提出,该算法将图表示为距离矩阵(Distance Matrix),并通过距离矩阵中的信息对图中的点进行初步划分;同时利用距离矩阵中的信息对搜索树进行剪枝操作,从而减少不必要的匹配操作。这两种经典算法都是在 1980 年之前提出的,均采用了对搜索树进行剪枝的思想来提高算法的执行速度,这种思想被后续多种算法所采用。

VF 算法是最近被提出的一种算法,它采用深度优先的树搜索策略,并使用一系列高效的规则集合对搜索树进行剪枝,剪枝的详细规则集合请参考文献[6]。Cordella 等^[46]提出了一种 VF2 算法,该算法是 VF 算法的一个改进版本。在 VF 算法的基础上,VF2 算法首先在待匹配的图中找到一个满足匹配条件的点集,然后判断新加入的点是否满足匹配条件,如果满足,则寻找下一个点,否则进行回溯。Mckay 等^[47-48]提出了将图转变成 Canonical Form 的形式并进行匹配的方法,该方法对某些种类的图具有相当快的速度。

以上几种算法的适用范围较广,因此其优化措施主要集中于如何制定一个高效的剪枝和回溯策略。下面的几种算法针对特定的应用场景进行了优化。

文献[42-43]提出了一个可以在图数据集 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 中搜索与给定模型 g 的编辑距离最小的图 g_i 。本文中最基本的假设是集合中的图并不是完全不相同的,即这些图具有一定的相似性,并且考虑了每个图都具有一个共同子图或者几个共同子图的特殊情况。因此,通过匹配共同的子图,可以进行一定的简化,从而降低匹配的复杂度。

在文献[42-43]提出的方法中,通过处理图集合 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 生成一个符号数据结构,并称其为网络模型。该网络模型是图集合的一种简化,其中多次出现的子图 s_i 将只会出现一次。这样,这些子图将会在输入图 g 的匹配中只被匹

配一次,从而提升了匹配算法的性能。更进一步,通过一个先行的过程,可以使该算法的效率得到进一步提升。该先行过程将会根据网络模型进行一定计算,并返回一个匹配代价的精确预估值。在文献[42,45]中,相同的先行过程被应用于图同构以及子图同构的检测算法中。

文献[42,44]介绍了一种更快速的图同构和子图同构的算法,它通过一个加强的预处理过程将图集合转变成为一个决策树。在决策过程中,输入的图 g 将经过该决策树的分类与筛选,得出所有与其存在同构的图。如果忽略预处理的时间,则该图同构算法的计算复杂度是输入图中节点个数的二次函数。特别地,该算法的计算复杂度独立于图集合中图的数量以及集合中每个图所包含边的数量。但是,预处理过程中决策树的大小与图集合中节点的个数呈指数关系,因此算法对内存的消耗将会呈现指数级的增长。该算法可以处理最多包含 30 个图的图集合,而其中每个图的节点最多有 11 个。

该决策树算法已经通过多种途径被扩展应用到了错误容忍的图匹配算法中^[49]。一种途径是在创造决策树时考虑错误的纠正。对于每一个样本图,将其变形的副本全部添加到决策树中,变形副本的个数取决于可容许错误的最大值。运行时,用决策树来对输入图进行图同构检测。由以上介绍可知,该过程的复杂度是输入图节点数的平方倍。然而,决策树的大小是所要考虑节点的指数倍,因此该算法只能处理相对较小的图。

另一种途径是错误的纠正仅在算法的执行过程中进行,即图集合的决策树并不包含任何错误信息。因此,决策树的编辑过程与原始的预处理过程完全一致。运行过程中会生成一些输入图的变形副本,变形副本的数量与错误门限相关。该算法的运行时间复杂度为 $O(\vartheta n^{2(\vartheta+1)})$,其中 n 是输入图的节点个数, ϑ 是允许的最大编辑操作数。

对于带权重的图匹配问题,文献[12,37]提出了使用特征值和线性编程的方法。树匹配问题是一种特殊的图匹配问题,文献[38-41]对其进行了介绍。

从以上介绍可以看出,目前精确求解图匹配问题的研究主要聚焦于高效地对搜索树进行剪枝,以减少回溯次数;其次是对特定场景下的匹配算法进行优化,以减少重复匹配的次數。然而,这些算法的提速通常是以大量消耗内存为代价的,也就是通过以空间换取时间的途径来提高图匹配的速度。在实际应用中,应结合实际情况,在算法的耗时和空间占用之间做出一定的权衡。

4.3 算法分析与总结

4.2 节介绍了各种图匹配的精确求解算法,这些算法针对具体的应用场景进行了一定的优化,或者通过一定的搜索策略来加快匹配的速度。下面选取其中具有普遍性的几种匹配算法来进行性能对比和分析。

Foggia 等^[64]在随机图上对 5 种不同的图同构算法进行了性能测试。本文针对拥有不同节点数目的图进行了同构检测,测试了 Ullmann 算法^[5]、SD 算法^[27]、VF 算法^[6]、VF2 算法^[46]以及 Nauty 算法^[48]的计算时间。图 1 给出了联通度为 0.01 时这 5 种算法的性能对比。

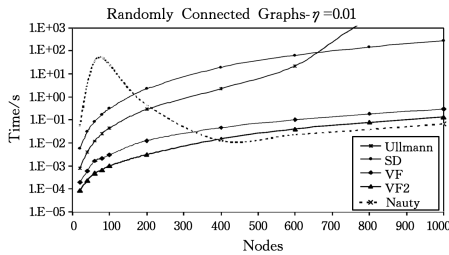


图1 5种图匹配算法的对比

Fig. 1 Comparison of five graph matching algorithms

可以看出, VF2 算法和 Nauty 算法比其他算法更优, 且 VF2 算法总是优于 VF 算法; 当图的节点数量小于 700 时, Ullmann 算法优于 SD 算法, 但当节点数量大于 700 时, Ullmann 算法已无法工作。更多详细的算法比较结果请参考文献[64]。

5 应用

图匹配算法在学术领域得到了广泛的应用, 最早被应用于化学结构分析领域^[50], 后来在基于事例的推理^[51-52]、机器学习^[53]、规划^[54]、语义网络^[55]、概念图^[56]以及计算机网络监控^[57]领域陆续得到应用。在模式识别以及机器视觉领域, 该技术被用于识别图形符号和字母汉字^[58]等。

在这些领域的应用中所面临的问题都可以被转化为图查询的操作。如果给定一个查询图的表示以及所要查询的图数据库, 那么图的查询操作便是一个图的匹配过程。目前已经有大量的图匹配方法, 而最大公共子图检测算法是联系一个查询 Q 与数据库中一个图 I 的桥梁。标准的最大公共子图匹配算法是基于最大完全图^[20]以及树搜索算法^[21]的。

文献[62]在一个真实的视频集合中对上述图匹配过程进行了测试。数据集中每个视频的时长为 4~20 s, 包含 12~19 个物体, 可以转化为 5956 幅图。表 1 列出了几种算法的性能对比, 参与对比的算法有文献[44]描述的决策树方法、Ullmann 的算法和 A^* 过程的子图同构检测算法, 每次查询的图包括 4~11 个节点。从表 1 中可以看出, 基于决策树的最大公共子图检测算法的运行速度最快, 但其空间复杂度也最高。更深入的实验请参考文献[63]。

表1 不同图匹配算法的性能评估

Table 1 Evaluation of different graph matching algorithms

算法	均值	最小值	最大值	α
Ullmann	393.2	252	607	113.1
A^* -based	617.1	362	861	178.2
决策树	16.6	6	23	6.5

6 总结

本文介绍了图匹配技术的研究进展。可以肯定, 随着大数据时代的到来, 图匹配技术将会得到越来越广泛和深入的研究, 并在人工智能和模式识别等相关领域得到广泛应用。目前已有大量的图匹配算法, 按照研究思路可以将其分为基于树搜索的精确匹配算法和启发式的近似求解算法。前者的研究重点在于如何对搜索树进行高效的剪枝, 以提高算法运行速度。然而, 目前绝大多数算法的加速策略都以增加内存

消耗为代价, 即以空间换时间。启发式的近似求解算法虽然能够给出一个近似最优解, 但是其研究的问题通常是无法通过精确匹配方法求解的。对于采用精确匹配时资源消耗大的场景, 采用启发式的方法得到一个近似最优解也是工程应用中经常使用的。本文提及的图匹配算法都非常经典, 且具有一定的普遍性。

本文最后介绍了图匹配算法在视频处理中的一个应用实例。将图匹配算法应用于一项特定的任务中需要解决两个关键点: 1) 找到合适的图表示方法来表示问题; 2) 确定合适的错误纠正方法, 例如图编辑操作以及相应的代价函数。利用图进行建模的过程中, 图的节点和边可以代表任何的事物, 与标签无关, 这样将会使得图具有相当的灵活性。图的编辑距离计算仅包括了对边和节点的删除、插入和替换, 因此它可以用来自对图进行建模。

结束语 目前, 图匹配算法中仍存在许多开放性问题值得深入研究, 比如计算机视觉以及模式识别中的许多应用并没有充分利用图的强大表现力。尽管图匹配问题是一个 NP 问题, 但是对于特定的图, 可以研究一些更加高效的匹配算法。比如, 文献[59]针对某种特殊的图提出了一种多项式时间复杂度的匹配算法; 文献[60-61]研究了一种有序图的匹配算法, 并指出对于有序图, 其同构问题可以在 $O(mn)$ 的时间复杂度内来求解, 其中 m 和 n 代表两个图的节点数量。这说明对于特定的某类图, 可以采用更加高效的算法来求解其同构问题。在将来的工作中, 寻找其他特定类别的图, 并研究该类别的图的高效匹配算法, 将是一个有价值的研究方向, 且会在计算机视觉以及模式识别领域得到广泛应用。

参考文献

- [1] WEST D B. Introduction to graph theory[M]. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001.
- [2] HARTLEY R, ZISSERMAN A. Multiple view geometry in computer vision[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] SZEGEDY C, VANHOUCHE V, IOFFE S, et al. Rethinking the inception architecture for computer vision[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016: 2818-2826.
- [4] WOLD S. Pattern recognition by means of disjoint principal components models[J]. Pattern Recognition, 1976, 8(3): 127-139.
- [5] ULLMANN J R. An algorithm for subgraph isomorphism[J]. Journal of the ACM (JACM), 1976, 23(1): 31-42.
- [6] CORDELLA L P, FOGGIA P, SANSONE C, et al. Performance evaluation of the VF graph matching algorithm[C]// International Conference on Image Analysis and Processing, 1999. IEEE, 1999: 1172.
- [7] KOTTHOFF L, MCCREESH C, SOLNON C. Portfolios of Subgraph Isomorphism Algorithms[C]// International Conference on Learning and Intelligent Optimization. Springer International Publishing, 2016: 107-122.
- [8] BUNKE H. On a relation between graph edit distance and maximum common subgraph[J]. Pattern Recognition Letters, 1997, 18(8): 689-694.

- [9] GAO X, XIAO B, TAO D, et al. A survey of graph edit distance [J]. *Pattern Analysis and Applications*, 2010, 13(1): 113-129.
- [10] BUNKE H. Error correcting graph matching: On the influence of the underlying cost function[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(9): 917-922.
- [11] UMEYAMA S. An eigendecomposition approach to weighted graph matching problems [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(5): 695-703.
- [12] ALMOHAMAD H A, DUFFUAA S O. A linear programming approach for the weighted graph matching problem [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, 15(5): 522-525.
- [13] FIORI M, SAPIRO G. On spectral properties for graph matching and graph isomorphism problems [J]. *Information and Inference*, 2015, 4(1): 63-76.
- [14] BUNKE H. Error-tolerant graph matching: a formal framework and algorithms [C] // *Joint IAPR International Workshops on Statistical Techniques in Pattern Recognition (SPR) and Structural and Syntactic Pattern Recognition (SSPR)*. Springer Berlin Heidelberg, 1998: 1-14.
- [15] MESSMER B T, BUNKE H. A new algorithm for error-tolerant subgraph isomorphism detection [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, 20(5): 493-504.
- [16] BUNKE H, SHEARER K. A graph distance metric based on the maximal common subgraph [J]. *Pattern Recognition Letters*, 1998, 19(3): 255-259.
- [17] BUNKE H, JIANG X, KANDEL A. On the minimum common supergraph of two graphs [J]. *Computing*, 2000, 65(1): 13-25.
- [18] WILLETT P. Maximum Common Subgraph Isomorphism Algorithms: A Review [J]. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2017: 77(2): 213-232.
- [19] CHEN A C L, ELHAJJ A, GAO S, et al. Approximating the maximum common subgraph isomorphism problem with a weighted graph [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 85 (C): 265-276.
- [20] LEVI G. A note on the derivation of maximal common subgraphs of two directed or undirected graphs [J]. *Calcolo*, 1973, 9(4): 341-352.
- [21] MCGREGOR J J. Backtrack search algorithms and the maximal common subgraph problem [J]. *Software: Practice and Experience*, 1982, 12(1): 23-34.
- [22] FOGGIA P, PERCANNELLA G, VENTO M. Graph matching and learning in pattern recognition in the last 10 years [J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2014, 28(1): 1450001.
- [23] TSAI W H, FU K S. Error-correcting isomorphisms of attributed relational graphs for pattern analysis [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1979, 9(12): 757-768.
- [24] SHAPIRO L G, HARALICK R M. Structural descriptions and inexact matching [M]. *IEEE Computer Society*, 1981.
- [25] SANFELIU A, FU K S. A distance measure between attributed relational graphs for pattern recognition [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1983, SMC-13(3): 353-362.
- [26] ESHERA M A, FU K S. A graph distance measure for image analysis [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1984, SMC-14(3): 398-408.
- [27] SCHMID D C, DRUFFEL L E. A fast backtracking algorithm to test directed graphs for isomorphism using distance matrices [J]. *Journal of the ACM*, 1976, 23(3): 433-445.
- [28] CHRISTMAS W J, KITTLER J, PETROU M. Structural matching in computer vision using probabilistic relaxation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(8): 749-764.
- [29] WILSON R, HANCOCK E R. Graph matching by discrete relaxation [J]. *Pattern Recognition Letters*, 1999, 20(10): 1041-1052.
- [30] WILSON R C, HANCOCK E R. Structural matching by discrete relaxation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(6): 634-648.
- [31] FENG J S, LAUMY M, DHOME M. Inexact matching using neural networks [J]. *Machine Intelligence & Pattern Recognition*, 1994, 16: 177-184.
- [32] XU L, OJA E. Improved simulated annealing, Boltzmann machine, and attributed graph matching [M] // *Neural Networks*. Springer Berlin Heidelberg, 1990: 151-160.
- [33] CROSS A D, WILSON R C, HANCOCK E R. Genetic search for structural matching [C] // *European Conference on Computer Vision*. Springer Berlin Heidelberg, 1996: 514-525.
- [34] CROSS A D, WILSON R C, HANCOCK E R. Inexact graph matching using genetic search [J]. *Pattern Recognition*, 1997, 30(6): 953-970.
- [35] FARAHANI M M, CHAHARSOUHI S K. A genetic and iterative local search algorithm for solving subgraph isomorphism problem [C] // *2015 International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (IEOM)*. IEEE, 2015: 1-6.
- [36] WANG T L, ZHANG K Z, CHIRN G W. The approximate graph matching problem [C] // *Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, 1994. Vol. 2- Conference B: Computer Vision & Image Processing. IEEE, 1994: 284-288.
- [37] UMEYAMA S. An eigendecomposition approach to weighted graph matching problems [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(5): 695-703.
- [38] CANTONI V, CINQUE L, GUERRA C, et al. 2-D object recognition by multiscale tree matching [J]. *Pattern Recognition*, 1998, 31(10): 1443-1454.
- [39] OFLAZER K. Error-tolerant retrieval of trees [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(12): 1376-1380.
- [40] PELILLO M, KALEMM S, ZUCKER S W. Matching hierarchical structures using association graphs [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(11): 1105-1120.
- [41] WANG T L, SHAPIRO B A, SHASHA D, et al. An algorithm for finding the largest approximately common substructures of two trees [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, 20(8): 889-895.