模糊空间中的直觉模糊粗糙近似

薛占熬[1] 程惠茹[1] 黄海松[2] 肖运花[1]
(河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007)[1]
(河南理工大学万方科技学院公共基础课教学部 郑州 451400)[2]

摘 要 粗糙集和直觉模糊集的结合是一新的研究热点。在模糊近似空间中,结合模糊等价关系,构造直觉模糊粗糙近似算子,在 γ 算子和其余算子 γ^* 的基础上,证明了这些近似算子的性质。在模糊近似空间中,给出 λ 上(下)近似以及 $\alpha\beta$-截集的 λ 上(下)近似,证明了它们的性质;给出直觉模糊集的粗糙度 $\rho_A^{\alpha\beta}$ 和 λ 水平截集的粗糙度,并讨论了其性质。

关键词 模糊近似空间,模糊关系,粗糙近似算子,粗糙度
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Rough Approximations of Intuitions Fuzzy Sets in Fuzzy Approximation Space

XUE Zhan-ao[1] CHENG Hui-ru[1] HUANG Hai-song[2] XIAO Yun-hua[1]
(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[1]
(Public Basic Course Education Department, Wanfang College of Science & Technology,
Henan Polytechnic University, Zhengzhou 451400, China)[2]

Abstract Combination of Rough sets and intuitionistic fuzzy sets is a new research hot topic. With fuzzy equivalent relation, the intuitionstic fuzzy rough approximation operators were reconstructed in fuzzy approximation space, and their properties were proved based on γoperator and complementary operatorγ^* in the fuzzy approximation space. The λ upper (lower) approximation was presented, and λ upper (lower) approximation of $\alpha\beta$-cut set was presented, and their properties were proved in fuzzy approximation space. Furthermore, the rough degree $\rho_A^{\alpha\beta}$ of the intuitionstic fuzzy sets was introduced, and the rough degree of $\alpha\beta$-cut set was introduced in fuzzy approximation space, and their properties were discussed.

Keywords Fuzzy approximation space, Fuzzy relation, Rough approximation operator, Rough degree

粗糙集(Rough Sets, RS)是 Pawlak 教授于 1982 年提出的一种处理不确定性知识的数学工具,能较好地分析和处理不精确、不协调和不完备信息,在数据挖掘、机器学习等领域得到广泛的应用。直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Sets, IFS)是 Atanassov 于 1986 年提出的,是对 Zadeh 模糊集理论的拓展[1],它增加了一个非隶属度函数,既可以描述"亦此亦彼",又可以描述"非此非彼"的模糊概念,但是它在描述模糊概念时较强地依赖于人的主观认识。而粗糙集理论虽在处理问题时无需任何先验信息,但是它未能包含处理不精确或不确定性原始数据的机制,所以这两个理论具有很强的互补性。因此,近年来将直觉模糊集和粗糙集理论结合进行研究,已成为研究热点[5,6,8,15,16,18]。在文献[7]中,基于直觉模糊关系将粗糙集理论和模糊集理论有机地结合起来进行研究,丰富和发展了模糊粗糙集理论。Lin 等人研究了直觉模糊集上的多目标决策方法[4]。周雷和吴伟志对广义的直觉模糊粗糙近似算子、Atanassov 直觉模糊集上粗糙近似算子的刻画、直觉模糊集的粗糙测度等内容进行了深入研究[11,13,17]。Samamta 和 Mondal 对直觉模糊粗糙集和粗糙直觉模糊集进行了研究[6]。范成礼、雷英杰等对直觉模糊粗糙集的度量进行了研究[9,10]。黄兵等人对直觉模糊信息系统中基于优势关系的粗糙集模型进行了研究[12]。Tripathy 研究了模糊近似空间和直觉模糊近似空间中的粗糙集[14]。Thomas 研究了格上的粗糙直觉模糊集[18]。本文在模糊近似空间中,对直觉模糊粗糙近似算子的构造进行了研究。首先提出 γ 算子和 γ 余算子(γ^*)的概念,并证明了其性质;然后在模糊近似空间中,结合直觉模糊等价关系,构造了新的粗糙近似算子,并在 γ 算子的基础之上,讨论该近似算子的一些重要性质;再进一步定义了 λ 上(下)近似以及 $\alpha\beta$-截集的 λ 上(下)近似,给出了直觉模糊粗糙度的定义,并分别讨论了它们的性质。

1 基础理论

定义 1[1] 设 U 是一个非空论域,则称 $A=\{\langle x,\mu_A(x),$

到稿日期:2012-06-20 返修日期:2012-09-24 本文受国家自然科学基金项目(61273018),河南省教育厅自然科学研究计划项目(2009B520015)资助。
薛占熬(1963—),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论,E-mail:xuezhanao@163.com;程惠茹(1985—),女,硕士生,主要研究方向为模糊集和粗糙集理论;黄海松(1983—),男,硕士生,主要研究方向为代数学;肖运花(1986—),女,硕士生,主要研究方向为模糊集理论。

$\nu_A(x)\rangle|x\in U\}$为论域U中的直觉模糊集，其中，$\mu_A(x):U\to[0,1]$和$\nu_A(x):U\to[0,1]$分别代表元素x对A的隶属度和非隶属度，且$0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$。

定义 2[1] 设A和B是两个直觉模糊集合，则它们的等、包含、交、并定义如下：

(1)$A=B$当且仅当$\forall x\in U,\mu_A(x)=\mu_B(x),v_A(x)=v_B(x)$；

(2)$A\subseteq B$当且仅当$\forall x\in U,\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),\nu_B(x)\leqslant\nu_A(x)$；

(3)$A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$；

(4)$A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$。

定义 3[21] 设$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$是一模糊矩阵，对$\forall\lambda\in[0,1]$，称$M_{R_\lambda}=(r_{ij}(\lambda))_{m\times n}$为$M_R$的$\lambda$截矩阵。其中：

$$r_{ij}(\lambda)=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant\lambda\\0, & r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

由定义3可知，M_R的λ截矩阵M_{R_λ}指的是λ截关系，$\forall(u,v)\in U\times V,M_{R_\lambda}(u,v)=1\Leftrightarrow M_R(u,v)\geqslant\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$，显然$\lambda$截矩阵也是布尔矩阵。

定义 4[22] 设R是模糊关系，即$R\in F(U\times U)$。若R是U上的模糊等价关系，当且仅当R满足：

(1)自反性：$R(u,u)=1,\forall u\in U$；

(2)对称性：$R(u,v)=R(v,u),\forall u,v\in U$；

(3)传递性：$R(u,v)\geqslant\bigvee_{w\in U}(R(u,w)\wedge R(w,v)),\forall u,v\in U$，则$(U,R)$称为模糊近似空间。

如果$R\in F(U\times U)$并且满足自反性、对称性，则称R为模糊相似关系。

一般地，当论域U是有限的，模糊等价关系R可以用模糊等价矩阵M_R来表示，根据定义3和定义4可知，关系R的性质可由矩阵M_R表示，具体如下：

(1)自反性：$r_{ii}=1$；

(2)对称性：$r_{ij}=r_{ji}$；

(3)传递性：$r_{ij}\geqslant\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})$。

如果关系R是模糊等价关系，其对应的矩阵M_R被称为等效布尔矩阵。如果R是模糊等价关系，对$\forall\lambda\in[0,1]$，λ截矩阵M_{R_λ}也是等效布尔矩阵。

引理 1[22] 设R是模糊关系，即$R\in F(U\times U)$。R是模糊等价关系当且仅当$R_\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$是模糊等价关系。

引理 2[22] 设R是模糊等价关系，$\forall\lambda,\mu\in[0,1]$，如果$\lambda<\mu$，则$R_\mu\subseteq R_\lambda$。

引理 3[22] 设R,S是两个模糊等价关系，则以下结论成立：

(1)$R\cap S$是模糊等价关系；

(2)$R\cup S$是模糊相似关系，但不是模糊等价关系；

(3)如果$R\cup S$满足传递性，则$R\cup S$是模糊等价关系。

下面给出γ算子与余算子γ^*的定义，并证明其性质。

定义 5 假设$\gamma:[0,1]\times[0,1]\to[0,1],\forall a,b\in[0,1]$，

$$a\gamma b=\begin{cases}1, & a\geqslant b\\a, & a<b\end{cases},a\gamma^* b=\begin{cases}0, & a\geqslant b\\1-a, & a<b\end{cases}$$

则称γ为γ算子，称γ^*为γ的余算子。

由定义5知，$a\gamma b+a\gamma^* b=1,\forall a,b\in[0,1]$。

定理 1 对$\forall a,b,c\in[0,1]$，γ算子具有如下性质：

(1)如果$a\leqslant b$，则$a\gamma c\leqslant b\gamma c$；

(2)$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$；

(3)$a\gamma(a\vee c)=a\gamma((a\wedge b)\vee c)$；

(4)$a\gamma(a\vee c)\leqslant(a\vee b)\gamma(a\vee b\vee c)$；

(5)$a\gamma b=a\gamma(a\vee b)$；

(6)$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

证明：(1)根据定义5，分3种情况来证明：

(i)当$c\leqslant a\leqslant b$时，$a\gamma c=1,b\gamma c=1$，得$a\gamma c\leqslant b\gamma c$。

(ii)当$a\leqslant b\leqslant c$时，得$a\gamma c=a,b\gamma c=b$，又因为$a\leqslant b$，所以$a\gamma c\leqslant b\gamma c$。

(iii)当$a\leqslant c\leqslant b$时，得$a\gamma c=a,b\gamma c=1$，又因为$a\in[0,1]$，所以$a\gamma c\leqslant b\gamma c$。

综上所述，如果$a\leqslant b$，则$a\gamma c\leqslant b\gamma c$。

(2)根据定义5，(i)当$a\wedge b\geqslant c$时，$a\geqslant c$且$b\geqslant c,(a\wedge b)\gamma c=1$。因为$a\geqslant c,b\geqslant c$，所以$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=1$，即得$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$。

(ii)当$a\wedge b<c$时，分3种情况：

(a)当$a<c,b<c$时，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=a\wedge b,(a\wedge b)\gamma c=a\wedge b$，所以，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$。

(b)当$a<c<b$时，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=a\wedge 1=a,(a\wedge b)\gamma c=a$，所以，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$。

(c)当$b<c<a$时，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=1\wedge b=b,(a\wedge b)\gamma c=b$，所以，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$。

由(i)(ii)得，$(a\gamma c)\wedge(b\gamma c)=(a\wedge b)\gamma c$。

(3)类似(2)的证明方法。

(4)根据定义5，(i)对$\forall a,b,c\in[0,1]$，当$c\geqslant(a\vee b)$时，$a\vee c=c,a\vee b\vee c=c$，推出$(a\vee b)\gamma(a\vee b\vee c)=(a\vee b)\gamma c\geqslant a\gamma c=a\gamma(a\vee c)$。

(ii)当$c<(a\vee b)$时，$a\vee b\vee c=a\vee b$，推出$(a\vee b)\gamma(a\vee b\vee c)=(a\vee b)\gamma(a\vee b)=1\geqslant a\gamma(a\vee c)$。

由(i)(ii)得，$a\gamma(a\vee c)\leqslant(a\vee b)\gamma(a\vee b\vee c)$。

(5)(i)当$a\leqslant b$时，$a\vee b=b,a\gamma(a\vee b)=a\gamma b$。

(ii)当$a>b$时，$a\vee b=a,a\gamma(a\vee b)=a\gamma a=1=a\gamma b$。

由(i)(ii)得，$\forall a,b\in[0,1],a\gamma b=a\gamma(a\vee b)$。

(6)(i)对于$\forall a,b,c\in[0,1]$，当$a\leqslant b,a\leqslant c$时，$a\leqslant b\vee c$，$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=1,(b\vee c)\gamma a=1$，得$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

(ii)$a>c\geqslant b$时，$b\vee c=c,(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=b\vee c=c,(b\vee c)\gamma a=c\gamma a=c$，得$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

(iii)$a>b\geqslant c$时，$b\vee c=b,(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=b\vee c=b,(b\vee c)\gamma a=b\gamma a=b$，得$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

(iv)$b<a\leqslant c$时，$b\vee c=c,(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=b\vee 1=1,(b\vee c)\gamma a=1$，得$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

综上所述，$(b\gamma a)\vee(c\gamma a)=(b\vee c)\gamma a$。

2 直觉模糊粗糙近似算子及其性质

在本节中，首先定义了新的直觉模糊粗糙近似算子，然后讨论近似算子的一些重要性质。

2.1 直觉模糊集中的上、下近似算子

定义 6 在模糊近似空间(U,R)中，A是U上的直觉模糊集合，R是论域U上的一个模糊等价关系，则A关于(U,R)的一对上近似$\overline{A}$和下近似$\underline{A}$及其隶属函数分别定义如下：

对于$\forall x\in U$，

$\underline{A}=\{\langle x,\mu_{\underline{A}}(x),v_{\underline{A}}(x)\rangle \mid x\in U\}$

$\overline{A}=\{\langle x,\mu_{\overline{A}}(x),v_{\overline{A}}(x)\rangle \mid x\in U\}$

$\mu_{\underline{A}}(x)=\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))$

$v_{\underline{A}}(x)=\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))$

$\mu_{\overline{A}}(x)=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y))$

$v_{\overline{A}}(x)=\bigwedge_{y\in U}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)))$

由定义 6 知，下近似$\underline{A}$和上近似$\overline{A}$ 依然是直觉模糊集。

定理 2 设 A 是论域 U 中的直觉模糊集合，R 是论域 U 上的模糊等价关系，$\underline{A}(\overline{A})$ 为集合 A 中的下（上）近似，对 $\forall x\in U$，其隶属函数和非隶属函数满足下列关系：$\mu_{\underline{A}}(x)+v_{\underline{A}}(x)\leqslant 1$；$\mu_{\overline{A}}(x)+v_{\overline{A}}(x)\leqslant 1$。

证明：由定义 6 得，$\forall x\in U$，

$$
\begin{aligned}
1-v_{\underline{A}}(x)&=1-\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\\
&=\bigwedge_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^*(1-R(x,y)))\\
&=\bigwedge_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma R(x,y))\\
&\geqslant\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma R(x,y))\\
&=\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma R(x,y)\vee\mu_A(y))=\mu_{\underline{A}}(y)
\end{aligned}
$$

因此，$\mu_{\underline{A}}(x)+v_{\underline{A}}(x)\leqslant 1$。

同理可证，$\mu_{\overline{A}}(x)+v_{\overline{A}}(x)\leqslant 1$。

R 是 U 上的模糊等价关系，相对应的关系矩阵 M_R 是等效布尔矩阵，$\forall x,y\in U$，$R(x,y)=1$ 或者 $R(x,y)=0$，根据等价关系和等价类的关系可得 $R(x,y)=\begin{cases}1, & y\in[x]_R\\ 0, & y\notin[x]_R\end{cases}$，其中 $[x]_R$ 是包含元素 x 的等价类。根据定义 6，任意直觉模糊集 A 上下近似的隶属度函数和非隶属度函数可以进一步简化为：

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underline{A}}(x)&=\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y))))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}\\
&\quad(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y))))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(\mu_A(y)\gamma 1))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}(\mu_A(y)\gamma\mu_A(y)))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(\mu_A(y)))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}1)=\bigwedge_{y\in[x]_R}(\mu_A(y))\\
&=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_R\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\underline{A}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\\
&=(\bigvee_{y\in[x]_R}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y)))\vee(\bigvee_{y\notin[x]_R}((1-\\
&\quad v_A(y))\gamma^* R(x,y)))\\
&=(\bigvee_{y\in[x]_R}((1-v_A(y))\gamma^* 1))=\bigvee_{y\in[x]_R}v_A(y)\\
&=\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_R\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{\overline{A}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y))\\
&=(\bigvee_{y\in[x]_R}((1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y)))\vee(\bigvee_{y\notin[x]_R}((1-\\
&\quad \mu_A(y))\gamma^* R(x,y)))\\
&=(\bigvee_{y\in[x]_R}((1-\mu_A(y))\gamma^* 1))=\bigvee_{y\in[x]_R}\mu_A(y)\\
&=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_R\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\overline{A}}(x)&=\bigwedge_{y\in U}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y))))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}\\
&\quad(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y))))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(v_A(y)\gamma 1))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}(v_A(y)\gamma v_A(y)))\\
&=(\bigwedge_{y\in[x]_R}(v_A(y)))\wedge(\bigwedge_{y\notin[x]_R}1)=\bigwedge_{y\in[x]_R}(v_A(y))\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_R\}
\end{aligned}
$$

定义 7 设 A 是论域 U 中的直觉模糊集，R 是论域 U 中的模糊等价关系，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，模糊近似空间 (U,R) 中 λ 上近似和 λ 下近似分别定义为：

$\underline{A}_{R_\lambda}=\{\langle x,\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x),v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\rangle \mid x\in U\}$

$\overline{A}_{R_\lambda}=\{\langle x,\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x),v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\rangle \mid x\in U\}$

其中，$\forall x\in U$，

$\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}$

$v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)=\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}$

$\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}$

$v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}$

式中，$[x]_{R_\lambda}$ 是指元素 x 在等价关系 R_λ 下的等价类。

2.2 直觉模糊粗糙近似算子的性质

定理 3 设 A,B 是论域 U 中的两直觉模糊集，则集合 A,B 的上、下近似满足下列性质：

(1)$\underline{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}$；

(2)如果 $A\subseteq B$，则$\underline{A}\subseteq\underline{B}$，$\overline{A}\subseteq\overline{B}$；

(3)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\underline{A\cap B}=\underline{A}\cap\underline{B}$；

(4)$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，$\underline{A\cup B}\supseteq\underline{A}\cup\underline{B}$；

(5)$\underline{A^c}=\overline{A}^c$，$\overline{A^c}=\underline{A}^c$。

证明：(1)对任意的 $x\in U$，由定义 6 得，

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underline{A}}(x)&=\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\\
&=\bigwedge_{\substack{y\in U\\ y\neq x}}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\wedge(\mu_A(x)\gamma(R\\
&\quad(x,x)\vee\mu_A(x)))\\
&=\bigwedge_{\substack{y\in U\\ y\neq x}}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\wedge\mu_A(x)\leqslant\mu_A(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\underline{A}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\\
&=\bigvee_{\substack{y\in U\\ y\neq x}}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\vee((1-v_A(x))\gamma^* R\\
&\quad(x,x))\\
&=\bigvee_{\substack{y\in U\\ y\neq x}}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\vee v_A(x)\geqslant v_A(x)
\end{aligned}
$$

同理，$\mu_{\overline{A}}(x)\geqslant\mu_A(x)$，$v_{\overline{A}}(x)\leqslant v_A(x)$。

因此，$\underline{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}$。

(2)因为 $A\subseteq B$，即对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，$v_A(x)\geqslant v_B(x)$，所以要证$\underline{A}\subseteq\underline{B}$，只需证明 $\mu_{\underline{A}}(x)\leqslant\mu_{\underline{B}}(x)$ 和 $v_{\underline{A}}(x)\geqslant v_{\underline{B}}(x)$即可。

①当 $\mu_A(y)\geqslant R(x,y)$时，$\exists x\in U$，对 $\forall y\in U$，得 $\mu_B(x)\geqslant\mu_A(y)\geqslant R(x,y)$。因为 R 是模糊等价关系，有 $R(x,x)=1$，所以 $\mu_A(y)=\mu_B(x)=1$，故 $\mu_{\underline{A}}(y)=\mu_{\underline{B}}(x)=1$。

②当 $\mu_A(y)<R(x,y)$时，$\exists x\in U$，对 $\forall y\in U$：

(i)如果 $R(x,y)<\mu_B(y)$，则 $\mu_A(y)<R(x,y)$，所以 $\forall x\in U$，$\mu_B(x)=1$，因此 $\mu_{\underline{A}}(x)=\mu_{\underline{B}}(x)=1$。

(ii)如果 $\mu_A(y)\leqslant\mu_B(y)<R(x,y)$，由定义 6 得，

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underline{A}}(x)&=\bigwedge_{y\in U}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\\
&=(\bigwedge_{\mu_A(y)<R(x,y)}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y))))\wedge\\
&\quad(\bigwedge_{\mu_A(y)\geqslant R(x,y)}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y))))\\
&=\bigwedge_{\mu_A(y)<R(x,y)}(\mu_A(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_A(y)))\\
&=\bigwedge_{\mu_A(y)<R(x,y)}\mu_A(y)\leqslant\bigwedge_{\mu_B(y)<R(x,y)}\mu_B(y)=\mu_{\underline{B}}(x)
\end{aligned}
$$

由①②得，$\mu_{\underline{A}}(x)\leqslant\mu_{\underline{B}}(x),\forall x\in U$。

下面证明 $v_{\underline{A}}(x)\geqslant v_{\underline{B}}(x)$。对 $\forall x\in U, v_A(x)\geqslant v_B(x)$，故 $1-v_A(x)\leqslant 1-v_B(x)$，由定理1(1)知，$(1-v_A(x))\gamma R(x,y)\leqslant(1-v_B(x))\gamma R(x,y),\forall x,y\in U$。由定义6得

$$\begin{aligned}v_{\underline{A}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma^* R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-v_A(y))\gamma(1-R(x,y))\geqslant\bigvee_{y\in U}((1-v_B(y))\gamma(1-R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-v_B(y))\gamma^* R(x,y)=v_{\underline{B}}(x)\end{aligned}$$

故，$\underline{A}\subseteq\underline{B}$。同理可证，$\overline{A}\subseteq\overline{B}$。

(3)对 $\forall x\in U$，由定义6和定理1(2)、(3)，得

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{A\cup B}}&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_{\overline{A\vee B}}(y))\gamma^* R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-(\mu_A(y)\vee\mu_B(y)))\gamma^* R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_A(y))\wedge(1-\mu_B(y)))\gamma^* R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-((1-\mu_A(y))\wedge(1-\mu_B(y))\gamma R(x,y)))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_A(y)\gamma(1-R(x,y))\vee(1-\mu_B(y))\gamma(1-R(x,y)))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-((1-\mu_A(y)\gamma R(x,y)\wedge(1-\mu_B(y))\gamma R(x,y)))\\&=(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_A(y)\gamma(1-R(x,y)))\vee(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_B(y))\gamma(1-R(x,y)))\\&=(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_A(y)\gamma^* R(x,y))\vee(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_B(y))\gamma^* R(x,y))\\&=\mu_{\overline{A}}(x)\vee\mu_{\overline{B}}(x)\\&=\mu_{\overline{A\cup B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\overline{A\cup B}}(x)&=v_{\overline{A}}(x)\wedge v_{\overline{B}}(x)\\&=(\bigwedge_{y\in U}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y))))\wedge(\bigwedge_{y\in U}(v_B(y)\gamma(R(x,y)\vee v_B(y))))\\&=(\bigwedge_{y\in U}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee(v_A(y)\wedge v_B(y)))))\wedge(\bigwedge_{y\in U}(v_B(y)\gamma(R(x,y)\vee(v_A(y)\wedge v_B(y)))))\\&=\bigwedge_{y\in U}((v_A(y)\wedge v_B(y))\gamma(R(x,y)\vee(v_A(y)\wedge v_B(y))))\\&=\bigwedge_{y\in U}v_{A\vee B}(y)\gamma(R(x,y)\vee v_{A\vee B}(y))=v_{\overline{A\cup B}}(x)\end{aligned}$$

故，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。同理，$\underline{A\cap B}=\underline{A}\cap\underline{B}$。

(4)对 $\forall x\in U$，由定义6和定理1(4)、(6)，得

$$\begin{aligned}\mu_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x)&=\mu_{\overline{A}}(x)\wedge\mu_{\overline{B}}(x)\\&=(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y))\wedge(\bigvee_{y\in U}(1-\mu_B(y))\gamma^* R(x,y))\\&\geqslant\bigvee_{y\in U}(((1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y))\wedge((1-\mu_B(y))\gamma^* R(x,y)))\\&=\bigvee_{y\in U}(((1-\mu_A(y))\gamma(1-R(x,y)))\wedge((1-\mu_B(y))\gamma(1-R(x,y))))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-(((1-\mu_A(y)\gamma R(x,y))\vee((1-\mu_B(y)\gamma R(x,y))))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-((1-\mu_A(y)\vee(1-\mu_B(y)))\gamma R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-(1-(\mu_A(y)\wedge\mu_B(y)))\gamma R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}(1-(1-\mu_{A\wedge B}(y))\gamma R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_{A\wedge B}(y)\gamma^* R(x,y))=\mu_{\overline{A\wedge B}}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x)&=v_{\overline{A}}(x)\vee v_{\overline{B}}(x)\\&=(\bigwedge_{y\in U}v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)))\vee(\bigwedge_{y\in U}v_B(y)\gamma(R(x,y)\vee v_B(y)))\\&\leqslant\bigwedge_{y\in U}((v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)))\vee(v_B(y)\gamma(R(x,y)\vee v_B(y))))\\&\leqslant\bigwedge_{y\in U}(((v_A(y)\vee v_B(y))\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)\vee v_B(y)))\vee((v_B(y)\vee v_A(y))\gamma(R(x,y)\vee v_B(y)\vee v_A(y))))\\&=\bigwedge_{y\in U}((v_A(y)\vee v_B(y))\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)\vee v_B(y)))\\&=\bigwedge_{y\in U}(v_{A\wedge B}(y)\gamma(R(x,y)\vee v_{A\wedge B}(y)))=v_{\overline{A\cap B}}(x)\end{aligned}$$

因此，$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$。同理，$\underline{A\cup B}\supseteq\underline{A}\cup\underline{B}$。

(5)对 $\forall x\in U$，由定义6，得

因为 $\mu_{A^c}(x)=v_A(x), v_{A^c}(x)=\mu_A(x)$，

$$\begin{aligned}\mu_{\underline{A^c}}(x)&=\bigwedge_{y\in U}(\mu_{A^c}(y)\gamma(R(x,y)\vee\mu_{A^c}(y)))\\&=\bigwedge_{y\in U}(v_A(y)\gamma(R(x,y)\vee v_A(y)))=v_{\overline{A}}(x)=\mu_{\overline{A}^c}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\underline{A^c}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-v_{A^c}(y))\gamma^* R(x,y))\\&=\bigvee_{y\in U}((1-\mu_A(y))\gamma^* R(x,y))=\mu_{\overline{A}}(y)=v_{\overline{A}^c}(x)\end{aligned}$$

因此，$\underline{A^c}=\overline{A}^c$。同理，$\overline{A^c}=\underline{A}^c$。

定理4 设 A 是论域 U 中的直觉模糊集合，R 是论域 U 上的模糊等价关系，则上、下近似满足：$\underline{(\underline{A})}=\underline{A}$；$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$。

证明：由于 $\underline{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}$，且 $A\subseteq B$，即为 $\underline{A}\subseteq\underline{B}$，$\overline{A}\subseteq\overline{B}$，得 $\underline{(\underline{A})}\subseteq\underline{A}$，$\overline{(\overline{A})}\supseteq\overline{A}$。下面先证 $\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)\geqslant\mu_{\underline{A}}(x),\forall x\in U$。分两种情况：

(1)如果 $\exists x\in U$ 使 $\mu_{\underline{A}}(y)\geqslant R(x,y)$，得 $\mu_A(y)\geqslant\mu_{\underline{A}}(y)\geqslant R(x,y),\forall y\in U$。因为 $R(x,x)=1$，显然，$\mu_A(y)=\mu_{\underline{A}}(y)=1$，根据定义4和定义6，得 $\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)=\mu_{\underline{A}}(x)=1$。

(2) $\forall x\in U$，$\exists y\in U$，使得 $\mu_{\underline{A}}(y)<R(x,y)$。

(i)如果 $R(x,y)\leqslant\mu_A(y)$，则对 $\forall y$ 都有 $\mu_{\underline{A}}(y)<R(x,y)$，得 $\mu_A(x)=1,\forall x\in U$，所以，$\mu_{\underline{A}}(x)=1,\forall x\in U$，故，对 $\forall y\in U$ 都有 $\mu_{\underline{A}}(y)\geqslant R(x,y)$，显然与对 $\forall y$ 都有 $\mu_{\underline{A}}(y)<R(x,y)$ 自相矛盾。所以，$\mu_{\underline{A}}(y)<R(x,y)$。

(ii)如果 $\mu_{\underline{A}}(y)\leqslant\mu_A(y)<R(x,y)$，由定义6，得 $\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)=\bigwedge_{\mu_{\underline{A}}(y)<R(x,y)}\mu_{\underline{A}}(y)$，则 $\exists x_0\in U$，使得 $\mu_{\underline{A}}(x_0)=\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)$。同理，由 $\mu_{\underline{A}}(x_0)=\bigwedge_{\mu_A(y)<R(x_0,y)}\mu_A(y)$，则 $\exists y_0\in U$，$\mu_A(y_0)=\mu_{\underline{A}}(x_0)$。所以，$\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)=\mu_{\underline{A}}(x_0)=\mu_A(y_0)\geqslant\mu_{\underline{A}}(x)$。由以上得，$\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)\geqslant\mu_{\underline{A}}(x),\forall x\in U$。

同理要证，$v_{\underline{(\underline{A})}}(x)\leqslant v_{\underline{A}}(x),\forall x\in U$ 也分两部分来证明。

(1) $\forall y\in U$，如果 $\exists x\in U$，使得 $R(x,y)\leqslant 1-v_{\underline{A}}(y)$，可得 $\mu_{\underline{A}}(x)=0$，因为 $\mu_A(x)\leqslant\mu_{\underline{A}}(x)$，所以 $\mu_A(x)=\mu_{\underline{A}}(x)=0$，因此，$\mu_{\underline{(\underline{A})}}(x)=\mu_A(x)=0$。

(2)对 $\forall x\in U$，如果 $\exists y\in U$，使得 $R(x,y)>1-v_{\underline{A}}(y)$，分两种情况：

(i)如果 $1-v_A(y)\geqslant R(x,y)>1-v_{\underline{A}}(y)$，得 $v_A(x)=0,\forall x\in U$，所以 $v_A(x)=0,\forall x\in U$。因此，$1-v_{\underline{A}}(x)=1\geqslant R(x,y)$。

(ii)如果 $R(x,y)>1-v_A(y)\geqslant 1-v_{\overline{A}}(y)$，由定义 6 得，

$$
\begin{aligned}
v_{\underline{(\underline{A})}}(x)&=\bigvee_{y\in U}((1-v_{\underline{A}}(y))\gamma^{*}R(x,y))\\
&=\bigvee_{y\in U}((1-v_{\underline{A}}(y))\gamma(1-R(x,y)))\\
&=1-\bigwedge_{y\in U}((1-v_{\underline{A}}(y))\gamma(1-R(x,y)))\\
&=1-\bigwedge_{R(x,y)>1-v_{\underline{A}}(y)}(1-v_{\underline{A}}(y))
\end{aligned}
$$

因此，$\exists x_0\in U$ 使得 $1-v_{\underline{A}}(x_0)=1-v_{\underline{(\underline{A})}}(x)$，显然，$1-v_{\underline{A}}(x_0)=\bigwedge_{R(x_0,y)>1-v_A(y)}(1-v_{\underline{(\underline{A})}}(x))$，$\exists y_0$ 使得 $1-v_A(y_0)=1-v_{\underline{A}}(x_0)$，所以，$v_{\underline{(\underline{A})}}(x)=1-(1-v_{\underline{A}}(x_0))=1-(1-v_A(y_0))\leqslant v_A(x)$。

综上所述，$\underline{(\underline{A})}=\overline{A}$，同理可证 $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$。

定理 5 设 A 是论域 U 中的直觉模糊集，R,S 是论域 U 上的两模糊等价关系，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，如果 $R\subseteq S$，则 λ 的下、上近似满足 $\underline{A}_{R_\lambda}\supseteq\underline{A}_{S_\lambda}$ 和 $\overline{A}_{R_\lambda}\subseteq\overline{A}_{S_\lambda}$。

证明：根据引理 1 和引理 2，设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$，$S=(s_{ij})_{m\times n}$，如果 $R\subseteq S$，则 $r_{ij}\leqslant s_{ij}$。所以对 $\forall\lambda\in[0,1]$，如果 $r_{ij}\geqslant\lambda$ 和 $s_{ij}\geqslant\lambda$，则 $R_\lambda\subseteq S_\lambda$，即 $[x]_{R_\lambda}\subseteq[x]_{S_\lambda}$。由定义 7 得，对 $\forall x\in U$ 有

$$
\begin{aligned}
\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)&=\inf\{\mu_A(x)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\\
&\geqslant\inf\{\mu_A(x)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}=\mu_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)\\
v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)&=\sup\{v_A(x)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\\
&\leqslant\sup\{v_A(x)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}=v_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)\\
\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)&=\sup\{\mu_A(x)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\\
&\leqslant\inf\{\mu_A(x)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}=\mu_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)\\
v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)&=\inf\{v_A(x)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\\
&\geqslant\inf\{v_A(x)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}=v_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

所以，$\underline{A}_{R_\lambda}\supseteq\underline{A}_{S_\lambda}$，$\overline{A}_{R_\lambda}\subseteq\overline{A}_{S_\lambda}$。

如果关系 R,S 满足自反性、对称性，同时可以构造传递闭包 $(R\cup S)^t$，则 $(R\cup S)^t$ 是模糊等价关系，且满足下列定理。

定理 6 设 A 是论域 U 中的一个直觉模糊集合，R,S 是 U 上的两个模糊等价关系。$\forall\lambda\in[0,1]$，则 λ 的下、上近似满足：

(1) $\underline{A}_{(R\cup S)^t_\lambda}=\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}$，$\overline{A}_{(R\cup S)^t_\lambda}=\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}$；

(2) $\underline{A}_{(R\cap S)_\lambda}=\underline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}$，$\overline{A}_{(R\cap S)_\lambda}=\overline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}$；

(3) $\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}\subseteq\underline{A}_{R_\lambda}\vee\underline{A}_{S_\lambda}$，$\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}\subseteq\overline{A}_{R_\lambda}\vee\overline{A}_{S_\lambda}$；

(4) $\underline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}\supseteq\underline{A}_{R_\lambda}\wedge\underline{A}_{S_\lambda}$，$\overline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}\subseteq\overline{A}_{R_\lambda}\wedge\overline{A}_{S_\lambda}$。

证明：要证(1)和(2)成立，只需证对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$(R\cup S)_\lambda=R_\lambda\cup S_\lambda$，$(R\cap S)_\lambda=R_\lambda\cap S_\lambda$ 即可。

设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$，$S=(s_{ij})_{m\times n}$，则 $(r_{ij}\vee s_{ij})(\lambda)=1$ 得 $r_{ij}\geqslant\lambda$ 或者 $s_{ij}\geqslant\lambda$。由 $(r_{ij}\wedge s_{ij})(\lambda)=1$ 得 $r_{ij}\geqslant\lambda$ 且 $s_{ij}\geqslant\lambda$。所以，$(R\cup S)_\lambda=R_\lambda\cup S_\lambda$，$(R\cap S)_\lambda=R_\lambda\cap S_\lambda$。

因此，$\underline{A}_{(R\cup S)^t_\lambda}=\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}$，$\overline{A}_{(R\cup S)^t_\lambda}=\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}$；$\underline{A}_{(R\cap S)_\lambda}=\underline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}$，$\overline{A}_{(R\cap S)_\lambda}=\overline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}$。

(3)对 $\forall x\in U$，

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}}(x)\\
&=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}\}\\
&=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cup[x]_{S_\lambda}\}\\
&\leqslant\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]\}_{R_\lambda}\vee\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\vee\mu_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}}(x)\\
&=\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}\}\\
&\geqslant\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cup[x]_{S_\lambda}\}\\
&\geqslant\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\wedge\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\wedge v_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}}(x)\\
&\geqslant\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}\}\\
&=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cup[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\vee\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\wedge\mu_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}}(x)\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^\mu}\}\\
&\leqslant\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cup[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\wedge\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\wedge v_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

根据定义 2，得 $\underline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}\subseteq\underline{A}_{R_\lambda}\vee\underline{A}_{S_\lambda}$，$\overline{A}_{(R_\lambda\cup S_\lambda)^t}\subseteq\overline{A}_{R_\lambda}\vee\overline{A}_{S_\lambda}$。

(4)对 $\forall x\in U$，

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\underline{A}_{(R_\lambda\cap S_\lambda)}}(x)\\
&=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda\cap S_\lambda}\}\\
&=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cap[x]_{S_\lambda}\}\\
&\geqslant\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\wedge\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\wedge\mu_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\underline{A}_{(R_\lambda\cap S_\lambda)}}(x)\\
&=\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda\cap S_\lambda}\}\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cap[x]_{S_\lambda}\}\\
&\leqslant\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\vee\sup\{v_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\vee v_{\underline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\overline{A}_{(R_\lambda\cap S_\lambda)}}(x)\\
&=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda\cap S_\lambda}\}\\
&=\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cap[x]_{S_\lambda}\}\\
&\leqslant\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\wedge\sup\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\vee\mu_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\overline{A}_{(R_\lambda\cap S_\lambda)}}(x)\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda\cap S_\lambda}\}\\
&=\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\cap[x]_{S_\lambda}\}\\
&\geqslant\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{R_\lambda}\}\vee\inf\{v_A(y)\mid y\in[x]_{S_\lambda}\}\\
&=v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\vee v_{\overline{A}_{S_\lambda}}(x)
\end{aligned}
$$

根据定义 2，得 $\underline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}\supseteq\underline{A}_{R_\lambda}\wedge\underline{A}_{S_\lambda}$，$\overline{A}_{R_\lambda\cap S_\lambda}\subseteq\overline{A}_{R_\lambda}\wedge\overline{A}_{S_\lambda}$。

定理 7 设 A 是论域 U 中的直觉模糊集，R 是论域 U 上的模糊等价关系，任意的 $\lambda,\gamma\in[0,1]$，如果 $\lambda<\gamma$，则 λ,γ 的下、上近似分别满足 $\underline{A}_{R_\lambda}\subseteq\underline{A}_{R_\gamma}$，$\overline{A}_{R_\lambda}\supseteq\overline{A}_{R_\gamma}$。

证明：由引理 2 和定理 6 易得证。

定义 8 令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$ 是两个模糊矩阵，定义 $A\gamma B=C=(c_{ij})_{m\times s}$，其中，$c_{ij}=\bigwedge_{k=1}^{n}(b_{kj}\gamma(a_{ik}\vee b_{kj}))$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,s$。

定义 9 令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$ 是两个模糊矩阵，定

义 $A\gamma^{*}B=D=(w_{ij})_{m\times s}$，其中，$w_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{n}((1-b_{kj})\gamma a_{ik})$，$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s$。

举例说明上述理论。

例 1　令 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$R$ 是论域 U 上的模糊等价关系，模糊等效矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0.7&0.8&0.8&0.7&0.65\\0.8&0.6&0.85&0.2&0.4\\0.3&0.15&0.1&0.7&0.5\\0.2&0.2&0.2&0.1&0.2\\0.8&0.85&0.9&0.65&0.3\end{bmatrix}$$

设 A 是一直觉模糊集，

$$A=\left\{\frac{[0.2,0.5]}{x_1},\frac{[0.7,0.2]}{x_2},\frac{[0.4,0.6]}{x_3},\frac{[0.1,0.9]}{x_4},\frac{[0.6,0.1]}{x_5}\right\}$$

则

$$\mu_A(x)=(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\mu_A(x_3),\mu_A(x_4),\mu_A(x_5))=(0.2,0.7,0.4,0.1,0.6)$$

$$v_A(x)=(v_A(x_1),v_A(x_2),v_A(x_3),v_A(x_4),v_A(x_5))=(0.5,0.2,0.6,0.9,0.1)$$

由定义 5、定义 8、定义 9 和定义 6 得直觉模糊集 A 的上下近似为：

$$\mu_{\underline{A}}=\mu_A\gamma R=[0.2,0.7,0.4,0.1,0.6]\gamma\begin{bmatrix}0.7&0.8&0.8&0.7&0.65\\0.8&0.6&0.85&0.2&0.4\\0.3&0.15&0.1&0.7&0.5\\0.2&0.2&0.2&0.1&0.2\\0.8&0.85&0.9&0.65&0.3\end{bmatrix}=[0.3,0.15,0.1,0.18,0.3]$$

$$\mu_{\overline{A}}=\mu_A\gamma^{*}R=[0.2,0.7,0.4,0.1,0.6]\gamma^{*}\begin{bmatrix}0.7&0.8&0.8&0.7&0.65\\0.8&0.6&0.85&0.2&0.4\\0.3&0.15&0.1&0.7&0.5\\0.2&0.2&0.2&0.1&0.2\\0.8&0.85&0.9&0.65&0.3\end{bmatrix}=[0.8,0.85,0.9,0.7,0.4]$$

$$v_{\underline{A}}=v_A\gamma^{*}R=[0.5,0.2,0.6,0.9,0.1]\gamma^{*}\begin{bmatrix}0.7&0.8&0.8&0.7&0.65\\0.8&0.6&0.85&0.2&0.4\\0.3&0.15&0.1&0.7&0.5\\0.2&0.2&0.2&0.1&0.2\\0.8&0.85&0.9&0.65&0.3\end{bmatrix}=[0.7,0.8,0.85,0.78,0.65]$$

$$v_{\overline{A}}=v_A\gamma R=[0.5,0.2,0.6,0.9,0.1]\gamma\begin{bmatrix}0.7&0.8&0.8&0.7&0.65\\0.8&0.6&0.85&0.2&0.4\\0.3&0.15&0.1&0.7&0.5\\0.2&0.2&0.2&0.1&0.2\\0.8&0.85&0.9&0.65&0.3\end{bmatrix}=[0.2,0.15,0.1,0.18,0.2]$$

所以，

$$\underline{A}=\left\{\frac{[0.3,0.7]}{x_1},\frac{[0.15,0.8]}{x_2},\frac{[0.1,0.85]}{x_3},\frac{[0.18,0.78]}{x_4},\frac{[0.3,0.65]}{x_5}\right\}$$

$$\overline{A}=\left\{\frac{[0.8,0.2]}{x_1},\frac{[0.85,0.15]}{x_2},\frac{[0.9,0.1]}{x_3},\frac{[0.7,0.18]}{x_4},\frac{[0.4,0.2]}{x_5}\right\}$$

3　直觉模糊近似空间中的粗糙度

随着粗糙集的发展，国内外学者提出了多种度量粗糙集的方式。Pawlak 在文献[19]中提出粗糙测度。1986 年 Banerjee 和 Sankar 在文献[20]中提出模糊集中的粗糙度。一般表示为 $\rho_A^{\alpha\beta}=1-\frac{|A_\alpha|}{|A_\beta|}$，其中，$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$，$\underline{A}_\alpha=\{x\in U|\mu_{\underline{A}}(x)\geqslant\alpha\}$。

而本文是在模糊近似空间上定义粗糙度，并讨论其性质。

定义 10　设 A 是一直觉模糊集，则直觉模糊近似空间 (U,R) 中 $\alpha\beta$-截集的下、上近似定义为：

$$\underline{A}_{\alpha\beta}=\{x\in U:\mu_{\underline{A}}(x)\geqslant\alpha,v_{\underline{A}}(x)\leqslant\beta\}$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta}=\{x\in U:\mu_{\overline{A}}(x)\geqslant\alpha,v_{\overline{A}}(x)\leqslant\beta\}$$

其中，$\alpha,\beta\in[0,1]$，$\alpha+\beta\leqslant1$。

定义 11　模糊近似空间 (U,R) 中直觉模糊集 A 的粗糙度 $\rho_A^{\alpha\beta}$ 在相对于参数 α,β 的定义为：

$$\rho_A^{\alpha\beta}=\begin{cases}1-\dfrac{|\overline{A}_{\alpha\beta}\cap\underline{A}_{\alpha\beta}|}{|\overline{A}_{\alpha\beta}|}, & \overline{A}_{\alpha\beta}\neq0\\0, & \overline{A}_{\alpha\beta}=0\end{cases}$$

注：如果模糊等价关系 R 变为经典集合中的等价关系，定义 11 中的 $\rho_A^{\alpha\beta}$ 就退化为 Pawlak 近似空间中的粗糙度；如果直觉模糊集 A 变为模糊集，定义 11 中的 $\rho_A^{\alpha\beta}$ 就退化为文献[20]中模糊粗糙度的定义。类似定义 10，在直觉模糊近似空间 (U,R) 中定义直觉模糊集 A 的 $\alpha\beta$-截集的 λ 下近似和上近似。

定义 12　$\underline{A}_{R_\lambda}$，$\overline{A}_{R_\lambda}$ 的 $\alpha\beta$-截集，$\underline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)$，$\overline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)$ 定义为：

$$\underline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)=\{x\in U:\mu_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\geqslant\alpha,v_{\underline{A}_{R_\lambda}}(x)\leqslant\beta\}$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)=\{x\in U:\mu_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\geqslant\alpha,v_{\overline{A}_{R_\lambda}}(x)\leqslant\beta\}$$

其中，$\alpha>0$，$\beta<1$，$\alpha+\beta\leqslant1$。

根据定义 11，模糊近似空间中包含 λ 水平截集的粗糙度可定义为：对 $\forall\lambda\in[0,1]$，

$$\rho_A^{\alpha\beta}(\lambda)=\begin{cases}1-\dfrac{|\overline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)\cap\underline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)|}{|\overline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)|}, & \overline{A}_{\alpha\beta}\neq0\\0, & \overline{A}_{\alpha\beta}=0\end{cases}$$

显然，由定义 11、定义 12 知，模糊近似空间中直觉模糊集粗糙度 $\rho_A^{\alpha\beta}$ 和 λ 水平截集的粗糙度 $\rho_A^{\alpha\beta}(\lambda)$ 满足 Pawlak 近似空间中粗糙度的性质。下面只讨论 λ 的水平截集粗糙度的性质。

定理 8　设 A 是论域 U 中的直觉模糊集，R 是 U 中的模糊等价关系，对任意的 $\lambda,\mu\in[0,1]$ 且 $\lambda<\mu$，则在模糊近似空间 (U,R) 中，直觉模糊集 A 包含 λ,μ 的水平截集的粗糙度 $\rho_A^{\alpha\beta}(\lambda)$，$\rho_A^{\alpha\beta}(\mu)$ 满足

$$\rho_A^{\alpha\beta}(\lambda)\geqslant\rho_A^{\alpha\beta}(\mu)$$

证明：根据定理 7 和定义 12，$\underline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)\subseteq\underline{A}_{\alpha\beta}(\mu)$，$\overline{A}_{\alpha\beta}(\lambda)\supseteq\overline{A}_{\alpha\beta}(\mu)$，再由定义 12 得 $\rho_A^{\alpha\beta}(\lambda)\geqslant\rho_A^{\alpha\beta}(\mu)$。

结束语　直觉模糊粗糙近似算子是直觉模糊粗糙集的核心所在，本文定义了 γ 算子和其余算子 γ^{*}，证明了该 γ 算子

（下转第 255 页）

学,2010
[10] 柳毅,沈勤. 带时间窗可回程取货车辆路径问题的元胞鱼群算法[J]. 系统管理学报,2011,20(6):739-743
[11] 钱鑫,吴晓军,张甜甜,等. 求解关键路径的元胞自动机算法[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2009,37(6):19-22
[12] 孙凌宇,冷明,彭宣戈. 一种基于元胞自动机的无向图剖分优化算法[J]. 计算机工程与应用,2008,44(24):46-48
[13] 夏小翔. 基于元胞自动机的微粒群算法研究[D]. 太原科技大学,2007
[14] Sidiropoulos E, Tolikas P. Genetic algorithms and cellular automata in aquifer management[J]. Applied Mathematical Modelling,2008,32(6):617-640
[15] D'Ambrosio D, Spataro W, Iovine G. Parallel genetic algorithms for optimising cellular automata models of natural complex phenomena: An application to debris flows [J]. Computers & Geosciences,2006(32):861-875
[16] Karafyllidis I. Acceleration of cellular automata algorithms using genetic algorithms [J]. Advances in Engineering Software, 1999 (30):419-437
[17] Fadaei A H, Setayeshi S, Kia S. An optimization method based on combination of cellular automata and simulated annealing for VVER-1000 NPP loading pattern[J]. Nuclear Engineering and Design,2009(239):2800-2808
[18] Mathey A-H, Krcmar E, Tait D, et al. Forest planning using co-evolutionary cellular automata [J]. Forest Ecology and Management,2007(239):45-56
[19] Yang Xin, Zheng Xin-qi, Lv Li-na. A spatiotemporal model of land use change based on ant colony optimization Markov chain and cellular automata[J]. Ecological Modelling,2012(233):11-19
[20] Feng Yong-jiu, Liu Yan, Tong Xiao-hua, et al. Modeling dynamic urban growth using cellular automata and particle swarm optimization rules[J]. Landscape and Urban Planning,2011(102):188-196
[21] 段其昌,黄大伟,雷蕾,等. 带扩展记忆的粒子群优化算法仿真分析[J]. 控制与决策,2011,26(7):1087-1090
[22] 汤京永,时贞军. 一类全局收敛的记忆梯度算法及其线性收敛性[J]. 数学进展,2007,36(1):67-75
[23] Chopard B, Droz M. Cellular Automata Modeling of Physical Systems[M]. London: Cambridge University Press,1998
[24] 黄光球,石昌文,孙周军. 基于记忆原理的 Web 入侵预警系统[J]. 系统工程与电子技术,2006,28(12):1940-1944
[25] 艾森克 M W,基恩 M T. 认知心理学(第 5 版)[M]. 上海:华东师范大学出版社,2009
[26] Iisufescu M. Finite Markov Processes and Their Applications [M]. Wiley: Chichester,1980

(上接第 226 页)

的一些性质。然后在模糊近似空间中,结合直觉模糊等价关系,构造了新的粗糙近似算子,并在 γ 算子的基础之上,讨论了该近似算子的一些重要性质。还基于截集给出 λ 上(下)近似,证明了其一些性质。最后在模糊近似空间上定义粗糙度,并讨论了其性质。

参考文献

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20:87-96
[2] 张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2007
[3] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough set [J]. International Journal of General Systems,1990,17(2):191-208
[4] Lin L, Yuan X H, Xia Z Q. Multicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences,2007,73(1):84-88
[5] Jena S P, Ghosh S K. Intuitionistic fuzzy rough sets[J]. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets,2002,8(1):1-18
[6] Samamta S K, Mondal T K. Intuitionistic fuzzy rough sets and rough intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Fuzzy Mathematics,2001,9(6):561-582
[7] Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences,2008,178(11):2448-2465
[8] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between inituitionistic fuzzy sets and their applications in reasoning [J]. Studies in Computational Intelligence,2005,2:101-116
[9] 殷宏燕,雷英杰,雷阳. 基于海明距离的直觉模糊粗糙集相似度量方法[J]. 计算机应用软件,2008,25(12):15-16
[10] 范成礼,雷英杰,张戈. 改进的直觉模糊粗糙集相似度量方法[J]. 计算机应用,2011,31(5):1344-1346
[11] Zhou Lei, Wu Wei-zhi. Characterization of rough set approximations in Atanassov intuitionistic fuzzy set theory[J]. Computers and Mathematics with Applications,2011,62:282-296
[12] Huang Bing, Li Hua-xiong, Wei Da-kuan. Dominance based rough set model in intuitionistic fuzzy information systems[J]. Knowledge-Based Systems,2012,28:115-123
[13] Wu Wei-zhi, Zhou Lei. On intuitionistic fuzzy topologies based on intuitionistic fuzzy reflexive and transitive relations[J]. Soft Computing A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications,2011,15(6):1183-1194
[14] Tripathy B K. Rough Sets on Fuzzy Approximation Spaces and Intuitionistic Fuzzy Approximation Spaces[J]. Studies in Computational Intelligence,2009,174:3-44
[15] Lin Meng-lei. A Characterization for Intuitionistic Fuzzy Sets Based on the Assistant Sets Generated by S-Rough Sets[J]. Advances in Soft Computing,2009,54:627-631
[16] Jiang Yun-cheng, Tang Yong, Wang Ju, et al. Reasoning within intuitionistic fuzzy rough description logics[J]. Information Sciences,2009,179(14):2362-2378
[17] Zhou Lei, Zhang Wen-xiu, Wu Wei-zhi. Roughness Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Lecture Notes in Computer Science,2008,5009:308-315
[18] Thomas K V, Nair, Latha S. Rough intuitionistic fuzzy sets in a lattice[J]. International Mathematical Forum, 2011, 6 (27): 1327-1335
[19] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11:341-356
[20] Banerjee M, Sankar K P. Roughness of a fuzzy set[J]. Information Science,1996,93:235-246
[21] Shen Yong-hong, Wang Fa-xing. Rough approximations of vague sets in fuzzy approximation space[J]. International Journal of approximate reasoning,2011,52:281-296
[22] 苗夺谦,李道国. 粗糙集理论、算法与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2008